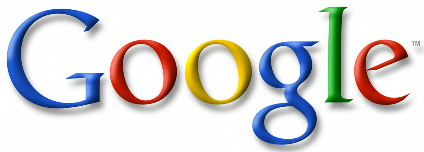

Google


UC-NRLF
B 3 740 299

[redacted]

[redacted]

ÖFVERSIGT AF K. SV. VET.-AKAD. FÖRHANDL. 1898. N:o 7.

MEDDELANDEN

FRÅN

LUNDS ASTRONOMISKA OBSERVATORIUM

N:o 1.

UEBER KOMETENBAHNEXCENTRICITÄTEN. I.

VON

ELIS STRÖMGREN

MITGETHEILT DEN 14 SEPTEMBER 1898 DURCH C. V. L. CHARLIER

STOCKHOLM 1898
KUNGL. BOKTRYCKERIET. P. A. NORSTEDT & SÖNER

Band I.

ÖFVERSIGT AF K. SV. VET.-AKAD. FÖRHANDL. 1898. N:o 7.

MEDDELANDEN

FRÅN

LUNDS ASTRONOMISKA OBSERVATORIUM

N:o 1.

UEBER KOMETENBAHNEXCENTRICITÄTEN. I.

VON

ELIS STRÖMGREN

MITGETEILT DEN 14 SEPTEMBER 1898 DURCH C. V. L. CHARLIER

STOCKHOLM 1898
KUNGL. BOKTRYCKERIET. P. A. NORSTEDT & SÖNER

Im Band 136 der Astronomischen Nachrichten (Pag. 133) findet sich ein Aufsatz von THRAEN, der eine Rückwärtsrechnung der Störungen für den Kometen 1886 II enthält. In einem vorigen Bande (132) der A. N. hatte THRAEN seine »Definitive Bahnbestimmung des Kometen 1886 II» publicirt, aus welcher für den betreffenden Kometen eine hyperbolische Bahn ($e =$ 1,000 2286) mit Bestimmtheit hervorging.

Als THRAEN später auf die Möglichkeit aufmerksam wurde, dass die Hyperbolicität des Kometen eine Folge von den durch die grossen Planeten in den Jahren vor dem Periheldurchgange bewirkten Störungen sein könnte, unternahm er eine Rückwärtsrechnung derjenigen Störungen, welche bei dem Kometen durch die Planeten Jupiter und Saturnus verursacht waren. Die Resultate dieser Arbeit hat er in den oben genannten Aufsatz niedergelegt.

THRAEN erhält:

1885 Dec. 8 (Oskulationsepoche)	$e =$	1.000 228
1884 Aug. 15		1.000 177
1883 April 23		1.000 052
1882 Okt. 5		1.000 002 ,

wo das Zeitintervall zwischen der ersten und der zweiten Epoche 520 Tage, zwischen der zweiten und der dritten 480 und zwischen der dritten und der vierten 200 Tage beträgt. Hieraus folgert

nun THRAEN, dass wenn wir zeitlich noch weiter zurückgehen würden, die Bahnexcentricität des Kometen 1886 II unter die Einheit herabsinken würde, und dass also der Komet sich ursprünglich in einer elliptischen Bahn unserer Sonne genähert hätte.

Als ich die Berechnung der Bahn des Kometen 1890 II abgeschlossen und für diese eine unzweifelhaft hyperbolische Excentricität gefunden, deren wahrscheinliche Fehler nicht den dreissigsten Theil ihres eigenen Überschusses über die Einheit betrug ($e_1 = 1{,}000\,4103 \pm 0{,}000\,0130$), beschloss ich, in derselben Weise wie es THRAEN bezüglich des Kometen 1886 II gemacht hatte zu untersuchen, ob nicht die Abweichung der Bahn von der Parabelform durch Störungen von Seiten der grossen Planeten verursacht wäre. Die Rechnung wurde nach der ENCKE'schen Methode ausgeführt, und zwar wurden Jupiter und Saturnus als störende Planeten herangezogen. Ich stand eben im Begriff die gewonnenen Störungswerthe für die Berechnung der Bahnexcentricitäten zu verwenden, als meine Aufmerksamkeit auf einen Umstand gelenkt wurde, welchen THRAEN übersehen hat, der mir aber für die in Frage stehende Aufgabe eine entscheidende Rolle zu spielen schien.

In meiner Arbeit über den oben genannten Kometen[1]) findet sich, Pag. 102—104, diejenige Auseinandersetzung, welche als Ausgangspunkt für meine fortgesetzte Rechnungen gedient hat. Ich werde hier das wichtigste rekapituliren.

Eine Störungsrechnung nach der ENCKE'schen Methode liefert die rechtwinkligen (Ekliptikal-) Koordinaten des gestörten Körpers so wie seine Geschwindigkeitskomponenten *in Bezug auf die Sonne.* Aus diesen relativen Koordinaten und Geschwindigkeiten lässt sich nach bekannten Formeln für jeden gegebenen Zeitmoment ein Elementsystem berechnen, die sogenannten oskulirenden Elemente. Da die Excentricität das einzige Element ist, das für unseren Zweck Bedeutung hat, bringe ich nur diejenigen Formeln, welche für die Berechnung dieses Elementes nötig sind:

---

[1]) Berechnung der Bahn des Kometen 1890 II. Acta reg. soc. phys. Lund, T. VI, 1896.

$$k\sqrt{p}\cos i = \frac{1}{w}\left\{x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right\}$$

$$k\sqrt{p}\sin i \sin \Omega = \frac{1}{w}\left\{y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right\}$$

$$k\sqrt{p}\sin i \cos \Omega = \frac{1}{w}\left\{x\frac{dz}{dt} - z\frac{dx}{dt}\right\},$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$e \sin v = \frac{\sqrt{p}}{wk \cdot r}\left\{x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt}\right\}$$

$$e \cos v = \frac{p}{r} - 1,$$

d. i.

$$p = \frac{1}{w^2 k^2}\left\{C^2 + C_1^2 + C_{11}^2\right\},$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$e^2 = \left(\frac{p}{r} - 1\right)^2 + \frac{p}{w^2 k^2 \cdot r^2}\left\{x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt}\right\}^2,$$

wo w das gewählte Zeitintervall (hier 40 Tage) bezeichnet und C, C_1, C_{11} an Stelle der drei Flächengeschwindigkeiten eingeführt sind.

Diese Formeln geben also die für jede Zeitepoche oskulirende Excentricität. Indessen auf die Frage nach der Bahn, in welcher sich der Komet ursprünglich unserer Sonne genähert hat, giebt die oskulirende Excentricität keine Antwort. In den durch die Störungsrechnung erhaltenen Werthen der Koordinaten und Geschwindigkeiten des Kometen sind die durch die störenden Planeten bewirkten Schwankungen in den Koordinaten und Geschwindigkeiten *der Sonne* mit enthalten. Wenn wir mit *einem* störenden Planeten rechnen, wird die periodische Bewegung der Sonne eine kleine Ellipse; sind *zwei* störende Planeten vorhanden, bekommen wir zwei superponirte Ellipsen, und in den Bahnelementen des Kometen muss eine Periodicität hervortreten, welche zusammengesetzt ist aus den Perioden des Kreislaufes der störenden Planeten um die Sonne, Perioden, die aber durch die fortschrei-

tende Bewegung des Kometen im Weltraume modificirt sind, da die Schwankungen in den Koordinaten und Geschwindigkeiten der Sonne für die oskulirenden Elemente des Kometen je nach der eigenen Lage und der eigenen Bewegung des Kometen eine verschiedene Rolle spielen.

Was nun zuerst die Schwankungen in den Geschwindigkeitskomponenten betrifft, so wird ihre Einwirkung auf die Bahnelemente des Kometen zunehmen, je weiter sich der Komet von der Sonne entfernt, weil mit wachsender Sonnendistanz die eigenen Geschwindigkeitskomponenten des Kometen abnehmen, während die Geschwindigkeiten *der Sonne* zwischen bestimmte Maximi- und Minimiwerthe oscilliren. Bezüglich der Schwankung in *den Koordinaten* der Sonne ist das Verhältniss umgekehrt, weil sich diese ebenso wie die *Geschwindigkeitskomponenten* der Sonne innerhalb gewissen fixen Grenzen halten, während die Koordinaten *des Kometen* unbegrenzt zunehmen.

Da also die oskulirenden Excentricitäten des Kometen (und ihre Bahnelemente überhaupt) eine periodische Schwankung aufzeigen müssen, welche mit wachsender Sonnendistanz jedenfalls nicht abnehmen wird, und da sie somit gegen gewisse Endwerthe nicht konvergiren, können sie offenbar für unsern Zweck nicht verwerthet werden.

Es giebt zwei Wege, um diese Schwierigkeit zu beseitigen. Wir können, nach bekannten Regeln, die Bewegung des Kometen auf den Schwerpunkt desjenigen Systemes, welches von der Sonne und von den störenden Planeten gebildet wird, beziehen. Dann verschwindet die Periodicität in den Geschwindigkeiten des Kometen, und die Excentricitätswerthe müssen allmählich gegen den Werth konvergiren, welcher die Bahnexcentricität angiebt zu einer Zeit, wo der Komet so weit entfernt war, das die Störungen in seiner Bewegung ausser Acht gelassen werden können, d. h. der Excentricitätswerth, welcher wirklich die ursprüngliche Beschaffenheit der Kometenbahn kennzeichnet.

Ich habe deshalb eine Berechnung dieser Excentricitätswerthe in Bezug auf den Schwerpunkt des Systems ausgeführt,

fand aber dass, wenigstens für diesen Kometen, die Konvergenz zu langsam fortschreitet, und habe mich deshalb nach einer anderen Methode umsehen müssen, welche dasselbe Resultat aber mit geringerer Arbeit liefert.

Wenn wir die Koordinaten des Kometen in Bezug auf die Sonne und seine Geschwindigkeiten in Bezug auf einen innerhalb des Systemes fixen Punkt der Berechnung der Elemente zugrunde legen, so bekommen wir neue Excentricitätswerthe, Werthe die nicht oskulirend sind und keine Schwerpunktsexcentricitäten darstellen, die aber doch gegen denselben Endwerth wie diese konvergiren, und zwar, wenigstens bei dem Kometen 1890 II, rascher als diese.

Dass die neuen Elemente gegen dasselbe Ziel wie die Schwerpunktselemente konvergiren müssen, geht aus der vorigen Darstellung mit Evidenz hervor: was die Geschwindigkeitskomponenten betrifft, so haben wir in beiden Fällen dieselben Werthe benutzt; als Werthe für *die Koordinaten* des Kometen haben wir in dem einen Falle die Koordinaten in Bezug auf den Schwerpunkt, im anderen die Koordinaten in Bezug auf die Sonne angewandt, und wie oben angedeutet wurde, spielen die Differenzen in den Koordinaten eine um so geringere Rolle, je weiter sich der Komet von der Sonne entfernt.

* * *

In der oben genannten Arbeit »Berechnung der Bahn etc.» habe ich die Resultate der Rückwärtsrechnung bis auf 1886 Aug. 25 inclusive angegeben, wobei doch zu bemerken ist, dass die Störungen nur bis auf 1887 Febr. 1 direct berechnet worden, wonach ich die folgenden Werthe extrapolirt habe, eine Extrapolirung, die sich übrigens bei einer fortgesetzten Störungsrechnung als durchaus berechtigt erwiesen hat.

Später habe ich die Störungsrechnung bis auf 1883 Nov. 29 zurückgeführt, direct bis auf 1885 Jan. 2 inclusive, und von dann ab durch Extrapolirung. Ich bringe im Folgenden die Resultate dieser neuen Arbeit mit den früher publicirten zusammen.

Die Ekliptik-Elemente des Kometen waren:

Oskulationsepoche 1890 März 17.

$T =$ 1890 Juni 1.570 236 M. Z. Berlin.

$\left.\begin{array}{l} \omega = \ \ 68^\circ\, 56'\ \ 3''.83 \\ \Omega = 320\ \ 20\ \ 43.02 \\ i = 120\ \ 33\ \ 21.94 \end{array}\right\}$ M. AE. 1890.0

Log $q = 0.280\,4835$

$e = 1.000\,4103$

Hieraus wurden folgende Koordinaten berechnet:

Komet 1890 II.

Datum.	x_0	y_0	z_0
1890 Mai 16.0	+ 0.19394	— 1.26017	+ 1.43377
April 6	0.76803	1.50380	1.13089
Febr. 25	1.30047	1.66383	0.76408
Jan. 16.	1.77967	1.75457	+ 0.36438
1889 Dec. 7	2.20694	1.79341	— 0.04683
Okt. 28	2.58887	1.79509	0.45755
Sept. 18	2.93265	1.76999	0.86181
Aug. 9.	3.24482	1.72576	1.25690
Juni 30	3.53086	1.66748	1.64210
Mai 21.	3.79455	1.59875	2.01683
April 11	4.03971	1.52205	2.38177
März 2.	4.26894	1.43933	2.73747
Jan. 21.	4.48405	1.35198	3.08397
1888 Dec. 12	4.68738	1.26090	3.42247
Nov. 2.	4.88012	1.16694	3.75336
Sept. 23	5.06314	1.07085	4.07652
Aug. 14	5.23805	0.97281	4.39339
Juli 5	5.40518	0.87355	4.70360
Mai 26.	5.56570	0.77297	5.00830
April 16	5.72005	0.67169	5.30726
März 7.	5.86854	0.56968	5.60080
Jan. 27.	6.01215	0.46725	5.88952
1887 Dec. 18	6.15078	0.36438	6.17362
Nov. 8.	6.28507	0.26121	6.45327
Sept. 29	6.41534	0.15796	6.72868
Aug. 20	6.54184	— 0.05453	7.00035
Juli 11.	6.66480	+ 0.04889	7.26812
Juni 1	6.78444	0.15228	7.53229
April 22	6.90102	0.25560	7.79304
März 13	7.01467	0.35883	8.05050
Febr. 1.	7.12563	0.46192	8.30491
1886 Dec. 23	7.23387	0.56484	8.55626
Nov. 13	7.33983	0.66757	8.80475
Okt. 4	7.44348	0.77009	9.05051
Aug. 25	7.54507	0.87237	9.29358
Juli 16.	7.64438	0.97444	9.53417
Juni 6	7.74182	1.07625	9.77226
April 27	7.83736	1.17780	10.00800
März 18	7.93117	1.27908	10.24140
Febr. 6.	+ 8.02323	+ 1.38008	— 10.47267

Komet 1890 II (Forts.).

Datum.	x_0	y_0	z_0
1885 Dec. 28	+ 8.11368	+ 1.48080	— 10.70188
Nov. 18	8.20261	1.58125	10.92897
Okt. 9	8.29001	1.68140	11.15408
Aug. 30	8.37597	1.78125	11.37720
Juli 21	8.46058	1.88083	11.59848
Juni 11	8.54384	1.98011	11.81792
Mai 2	8.62587	2.07911	12.03575
März 23	8.70667	2.17778	12.25178
Febr. 11	8.78626	2.27617	12.46614
Jan. 2	+ 8.86472	+ 2.37426	— 12.67885

Jupiter.

Datum.	x	y	z
1890 Mai 16	+ 2.61392	— 4.39338	— 0.04270
April 6	2.35308	4.55446	0.03621
Febr. 25	2.08396	4.69951	0.02961
Jan. 16	1.80757	4.82819	0.02289
1889 Dec. 7	1.52494	4.94017	0.01610
Okt. 28	1.23708	5.03522	0.00925
Sept. 18	0.94501	5.11314	— 0.00237
Aug. 9	0.64976	5.17385	+ 0.00452
Juni 30	0.35234	5.21727	0.01139
Mai 21	+ 0.05375	5.24339	0.01823
April 11	— 0.24500	5.25228	0.02500
März 2	0.54299	5.24405	0.03169
Jan. 21	0.83922	5.21890	0.03829
1888 Dec. 12	1.13274	5.17696	0.04475
Nov. 2	1.42266	5.11856	0.05108
Sept. 23	1.70808	5.04400	0.05724
Aug. 14	1.98816	4.95362	0.06323
Juli 5	2.26203	4.84779	0.06902
Mai 26	2.52891	4.72698	0.07459
April 16	2.78801	4.59162	0.07993
März 7	3.03859	4.44225	0.08503
Jan. 27	3.27995	4.27937	0.08988
1887 Dec. 18	3.51140	4.10357	0.09445
Nov. 8	3.73228	3.91542	0.09873
Sept. 29	3.94200	3.71556	0.10278
Aug. 20	4.13998	3.50463	0.10641
Juli 11	4.32567	3.28330	0.10978
Juni 1	4.49855	3.05226	0.11282
April 22	4.65820	2.81224	0.11554
März 13	4.80414	2.56394	0.11791
Febr. 1	4.93602	2.30813	0.11993
1886 Dec. 23	5.05344	2.04551	0.12161
Nov. 13	5.15610	1.77702	0.12293
Okt. 4	5.24369	1.50328	0.12389
Aug. 25	5.31600	1.22517	0.12449
Juli 16	5.37280	0.94348	0.12478
Juni 6	5.41393	0.65904	0.12460
April 27	5.43927	0.37267	0.12411
März 18	5.44870	— 0.08523	0.12326
Febr. 6	— 5.44221	+ 0.20246	+ 0.12204

Jupiter (Forts.).

Datum.		x	y	z
1885	Dec. 28	— 5.41975	+ 0.48956	+ 0.12047
	Nov. 18	5.38137	0.77523	0.11854
	Okt. 9	5.32714	1.05861	0.11627
	Aug. 30	5.25716	1.33886	0.11365
	Juli 21	5.17159	1.61518	0.11070
	Juni 11	5.07061	1.88659	0.10741
	Mai 2	4.95450	2.15242	0.10380
	März 23	4.82349	2.41178	0.09989
	Febr. 11	4.67789	2.66385	0.09567
	Jan. 2	4.51811	2.90784	0.09115
1884	Nov. 23	4.34453	3.14295	0.08637
	Okt. 14	4.15760	3.36840	0.08131
	Sept. 4	3.95783	3.58345	0.07601
	Juli 26	3.74578	3.78734	0.07046
	Juni 16	3.52188	3.97936	0.06470
	Mai 7	3.28693	4.15879	0.05873
	März 28	3.04152	4.32508	0.05258
	Febr. 17	2.78637	4.47737	0.04626
	Jan. 8	2.52222	4.61528	0.03979
1883	Nov. 29	2.24985	4.73815	0.03319
	Okt. 20	— 1.97009	+ 4.84546	+ 0.02648

Saturnus.

Datum.		x	y	z
1890	Mai 16	— 8.3015	+ 4.1292	+ 0.2637
	April 6	8.1879	4.3279	0.2558
	Febr. 25	8.0695	4.5240	0.2478
	Jan. 16	7.9462	4.7175	0.2396
1889	Dec. 7	7.8182	4.9081	0.2312
	Okt. 28	7.6854	5.0958	0.2227
	Sept. 18	7.5481	5.2804	0.2141
	Aug. 9	7.4062	5.4619	0.2054
	Juni 30	7.2597	5.6400	0.1965
	Mai 21	7.1089	5.8147	0.1875
	April 11	6.9537	5.9859	0.1784
	März 2	6.7943	6.1534	0.1692
	Jan. 21	6.6306	6.3172	0.1599
1888	Dec. 12	6.4629	6.4771	0.1504
	Nov. 2	6.2911	6.6330	0.1409
	Sept. 23	6.1155	6.7848	0.1313
	Aug. 14	5.9361	6.9323	0.1216
	Juli 5	5.7529	7.0756	0.1119
	Mai 26	5.5662	7.2145	0.1021
	April 16	5.3760	7.3489	0.0922
	März 7	5.1824	7.4787	0.0822
	Jan. 27	4.9855	7.6038	0.0722
1887	Dec. 18	4.7855	7.7241	0.0622
	Nov. 8	4.5824	7.8395	0.0521
	Sept. 29	4.3764	7.9500	0.0420
	Aug. 20	4.1676	8.0554	0.0318
	Juli 11	3.9562	8.1558	0.0216
	Juni 1	— 3.7423	+ 8.2510	+ 0.0115

Saturnus (Forts.).

Datum.	x	y	z
1887 April 22	— 3.5260	+ 8.3409	+ 0.0018
März 13	3.3074	8.4255	— 0.0089
Febr. 1.	3.0867	8.5047	0.0191
1886 Dec. 23	2.8639	8.5785	0.0293
Nov. 13	2.6394	8.6468	0.0394
Okt. 4	2.4131	8.7095	0.0496
Aug. 25	2.1853	8.7667	0.0597
Juli 16.	1.9561	8.8182	0.0697
Juni 6	1.7256	8.8641	0.0797
April 27	1.4939	8.9043	0.0897
März 18	1.2614	8.9387	0.0996
Febr. 6.	1.0279	8.9674	0.1095
1885 Dec. 28	0.7938	8.9903	0.1192
Nov. 18	0.5592	9.0074	0.1289
Okt. 9	0.3242	9.0187	0.1385
Aug. 30	— 0.0890	9.0242	0.1481
Juli 21.	+ 0.1463	9.0239	0.1575
Juni 11	0.3815	9.0177	0.1668
Mai 2	0.6164	9.0058	0.1760
März 23	0.8510	8.9880	0.1852
Febr. 11	1.0850	8.9644	0.1942
Jan. 2	1.3184	8.9351	0.2030
1884 Nov. 23	1.5509	8.9000	0.2117
Okt. 14	1.7825	8.8592	0.2203
Sept. 4	2.0128	8.8127	0.2288
Juli 26.	2.2419	8.7606	0.2371
Juni 16	2.4696	8.7028	0.2453
Mai 7	2.6957	8.6394	0.2533
März 28	2.9201	8.5705	0.2611
Febr. 17	3.1426	8.4962	0.2688
Jan. 8	3.3632	8.4163	0.2763
1883 Nov. 29	3.5816	8.3312	0.2836
Okt. 20	+ 3.7977	+ 8.2407	— 0.2908

Für die Berechnung der rechtwinkligen Koordinaten der störenden Planeten habe ich die Polarkoordinaten des Berliner Jahrbuches benutzt. Dabei ist zu bemerken, dass diese von 1884 ab von 1880.0 auf 1890.0 reducirt werden müssten.

Mit diesen Werthen für die Koordinaten des Kometen und der störenden Planeten wurde die Störungsrechnung ausgeführt und folgende Resultate erhalten. Die Bezeichnung ist in allen Punkten dieselbe wie die in Oppolzers »Lehrbuch etc.» angewandte.

	1890 Mai 16.	1890 April 6.	1890 Febr. 25.	1890 Jan. 16.	1889 Dec. 7.	1889 Okt. 28.	1889 Sept. 18.	1889 Aug. 9.	1889 Juni 30.	1889 Mai 21.
♃ X_1	+ 144.95	+ 149.66	+ 104.66	+ 4.24	— 92.31	— 137.77	— 142.13	— 129.03	— 111.96	— 96.00
— X_2	— 88.39	— 78.91	— 69.30	— 59.60	— 49.85	— 40.10	— 30.37	— 20.71	— 11.13	— 1.68
♄ X_1	— 11.06	— 9.82	— 8.92	— 8.25	— 7.72	— 7.30	— 6.96	— 6.66	— 6.40	— 6.17
— X_2	+ 14.07	+ 13.92	+ 13.77	+ 13.60	+ 13.43	+ 13.24	+ 13.05	+ 12.84	+ 12.63	+ 12.40
$\Sigma(X)$	+ 59.57	+ 74.85	+ 40.21	— 50.01	— 136.45	— 171.93	— 166.41	— 143.56	— 116.86	— 91.45
♃ Y_1	— 187.66	— 288.03	— 405.49	— 467.04	— 425.89	— 330.22	— 239.04	— 171.43	— 125.03	— 93.52
— Y_2	+ 148.56	+ 152.73	+ 156.28	+ 159.20	+ 161.51	+ 163.21	+ 164.33	+ 164.87	+ 164.86	+ 164.31
♄ Y_1	+ 7.01	+ 6.40	+ 5.89	+ 5.49	+ 5.16	+ 4.90	+ 4.68	+ 4.49	+ 4.33	+ 4.20
— Y_2	— 7.00	— 7.36	— 7.72	— 8.07	— 8.43	— 8.78	— 9.13	— 9.47	— 9.81	— 10.14
$\Sigma(Y)$	— 39.09	— 136.26	— 251.04	— 310.42	— 267.65	— 170.89	— 79.16	— 11.54	+ 34.35	+ 64.85
♃ Z_1	— 88.43	— 110.19	— 106.02	— 58.85	+ 4.16	+ 45.69	+ 61.46	+ 62.72	+ 58.25	+ 52.23
— Z_2	+ 1.44	+ 1.21	+ 0.98	+ 0.75	+ 0.53	+ 0.30	+ 0.08	— 0.14	— 0.36	— 0.57
♄ Z_1	— 1.52	— 0.96	— 0.49	— 0.11	+ 0.21	+ 0.48	+ 0.71	+ 0.91	+ 1.09	+ 1.25
— Z_2	— 0.45	— 0.43	— 0.42	— 0.41	— 0.40	— 0.38	— 0.37	— 0.36	— 0.34	— 0.33
$\Sigma(Z)$	— 88.96	— 110.37	— 105.95	— 58.62	+ 4.50	+ 46.09	+ 61.88	+ 63.13	+ 58.64	+ 52.58
Log h	8.826 283	8.751 343	8.621 203	8.468 203	8.313 433	8.166 643	8.031 163	7.907 883	7.794 403	7.691 263
— Log N	0.007 299	0.006 139	0.004 547	0.003 195	0.002 236	0.001 595	0.001 167	0.000 878	0.000 676	0.000 533
Log q	1.033 014	0.771 062	0.937 021	1,917 115	2.297 627	2.471 388	2.581 277	2.514 269	2.426 846	2.243 149
Log f	0.477 120	0.477 120	0.477 120	0.477 112	0.477 100	0.477 089	0.477 084	0.477 086	0.477 092	0.477 102
$\Delta\Sigma(X)$	— 4.94	+ 0.29	+ 1.11	+ 11.67	+ 26.18	+ 34.72	+ 35.44	+ 31.21	+ 24.89	+ 18.35
$\Delta\Sigma(Y)$	+ 7.60	— 0.25	— 0.68	— 4.58	— 4.75	+ 1.00	+ 9.17	+ 16.43	+ 21.51	+ 24.37
$\Delta\Sigma(Z)$	+ 11.06	+ 1.90	+ 1.89	+ 5.99	+ 4.90	+ 0.07	— 3.94	— 5.39	— 4.70	— 2.72

		1889 April 11.	1889 März 2.	1889 Jan. 21.	1888 Dec. 12.	1888 Nov. 2.	1888 Sept. 23.	1888 Aug. 14.	1888 Juli 5.	1888 Mai 26.	1888 April 16.
♃	X_1	— 82.45	— 71.33	— 62.28	— 54.90	— 48.83	— 43.81	— 39.61	— 36.07	— 33.06	— 30.47
	— X_2	+ 7.62	+ 16.74	+ 25.67	+ 34.38	+ 42.86	+ 51.09	+ 59.06	+ 66.74	+ 74.14	+ 81.24
♄	X_1	— 5.97	— 5.78	— 5.61	— 5.45	— 5.31	— 5.17	— 5.05	— 4.93	— 4.81	— 4.71
	— X_2	+ 12.17	+ 11.92	+ 11.67	+ 11.40	+ 11.13	+ 10.85	+ 10.56	+ 10.25	+ 9.95	+ 9.63
	$\Sigma(X)$	— 68.63	— 48.45	— 30.55	— 14.57	— 0.15	+ 12.96	+ 24.96	+ 35.99	+ 46.22	+ 55.69
♃	Y_1	— 71.76	— 56.39	— 45.24	— 36.93	— 30.61	— 25.70	— 21.82	— 18.69	— 16.14	— 14.04
	— Y_2	+ 163.25	+ 161.68	+ 159.64	+ 157.15	+ 154.22	+ 150.88	+ 147.14	+ 143.04	+ 138.58	+ 133.80
♄	Y_1	+ 4.07	+ 3.97	+ 3.87	+ 3.79	+ 3.71	+ 3.64	+ 3.57	+ 3.51	+ 3.45	+ 3.40
	— Y_2	— 10.47	— 10.80	— 11.12	— 11.43	— 11.73	— 12.03	— 12.33	— 12.61	— 12.89	— 13.16
	$\Sigma(Y)$	+ 85.09	+ 98.46	+ 107.15	+ 112.58	+ 115.59	+ 116.79	+ 116.56	+ 115.25	+ 113.00	+ 110.00
♃	Z_1	+ 46.31	+ 41.05	+ 36.53	+ 32.71	+ 29.48	+ 26.75	+ 24.43	+ 22.45	+ 20.76	+ 19.29
	— Z_2	— 0.78	— 0.98	— 1.17	— 1.36	— 1.54	— 1.71	— 1.88	— 2.04	— 2.19	— 2.33
♄	Z_1	+ 1.39	+ 1.52	+ 1.64	+ 1.75	+ 1.85	+ 1.95	+ 2.04	+ 2.13	+ 2.21	+ 2.29
	— Z_2	— 0.31	— 0.30	— 0.28	— 0.27	— 0.25	— 0.23	— 0.22	— 0.20	— 0.18	— 0.17
	$\Sigma(Z)$	+ 46.61	+ 41.29	+ 36.72	+ 32.83	+ 29.54	+ 26.76	+ 24.37	+ 22.34	+ 20.60	+ 19.08
	Log h	7.596 643	7.509 463	7.428 943	7.354 093	7.284 283	7.219 033	7.157 713	7.099 993	7.045 393	6.993 703
	— Log N	0.000 429	0.000 351	0.000 292	0.000 245	0.000 209	0.000 180	0.000 156	0.000 137	0.000 121	0.000 107
	Log q	1.794 429	1.790 707n	2.279 571n	2.503 586n	2.647 308n	2.750 781n	2.829 775n	2.892 098n	2.942 321n	2.983 309n
	Log f	0.477 114	0.477 128	0.477 142	0.477 156	0.477 169	0.477 182	0.477 195	0.477 206	0.477 216	0.477 216
	$\Delta\Sigma(X)$	+ 12.44	+ 7.46	+ 3.45	+ 0.31	— 2.09	— 3.90	— 5.23	— 6.17	— 6.82	— 7.24
	$\Delta\Sigma(Y)$	+ 25.44	+ 25.22	+ 24.16	+ 22.58	+ 20.71	+ 18.72	+ 16.71	+ 14.74	+ 12.86	+ 11.10
	$\Delta\Sigma(Z)$	— 0.19	+ 2.42	+ 4.85	+ 6.96	+ 8.71	+ 10.10	+ 11.16	+ 11.98	+ 12.43	+ 12.72

	1888 März 7.	1888 Jan. 27.	1887 Dec. 18.	1887 Nov. 8.	1887 Sept. 29.	1887 Aug. 20.	1887 Juli 11.	1887 Juni 1.	1887 April 22.	1887 März 13.
♃ X_1	— 28.24	— 26.29	— 24.59	— 23.09	— 21.77	— 20.59	— 19.53	— 18.58	— 17.72	— 16.95
♃ — X_2	+ 88.03	+ 94.51	+ 100.66	+ 106.49	+ 111.98	+ 117.14	+ 121.96	+ 126.43	+ 130.55	+ 134.33
♄ X_1	— 4.60	— 4.51	— 4.41	— 4.32	— 4.24	— 4.15	— 4.07	— 3.99	— 3.92	— 3.84
♄ — X_2	+ 9.30	+ 8.97	+ 8.62	+ 8.27	+ 7.92	+ 7.55	+ 7.18	+ 6.80	+ 6.42	+ 6.03
$\Sigma(X)$	+ 64.49	+ 72.68	+ 80.28	+ 87.35	+ 93.89	+ 99.95	+ 105.54	+ 110.66	+ 115.33	+ 119.57
♃ Y_1	— 12.28	— 10.79	— 9.52	— 8.42	— 7.48	— 6.65	— 5.92	— 5.28	— 4.70	— 4.19
♃ — Y_2	+ 128.70	+ 123.30	+ 117.64	+ 111.72	+ 105.55	+ 99.17	+ 92.57	+ 85.78	+ 78.82	+ 71.69
♄ Y_1	+ 3.35	+ 3.31	+ 3.26	+ 3.22	+ 3.18	+ 3.15	+ 3.11	+ 3.07	+ 3.04	+ 3.00
♄ — Y_2	— 13.42	— 13.68	— 13.92	— 14.16	— 14.38	— 14.60	— 14.81	— 15.00	— 15.18	— 15.36
$\Sigma(Y)$	+ 106.35	+ 102.14	+ 97.46	+ 92.36	+ 86.87	+ 81.07	+ 74.95	+ 68.57	+ 61.98	+ 55.14
♃ Z_1	+ 18.03	+ 16.92	+ 15.95	+ 15.11	+ 14.36	+ 13.70	+ 13.11	+ 12.59	+ 12.13	+ 11.71
♃ — Z_2	— 2.46	— 2.59	— 2.71	— 2.82	— 2.92	— 3.01	— 3.10	— 3.17	— 3.24	— 3.30
♄ Z_1	+ 2.37	+ 2.44	+ 2.52	+ 2.59	+ 2.66	+ 2.73	+ 2.80	+ 2.86	+ 2.93	+ 2.99
♄ — Z_2	— 0.15	— 0.13	— 0.11	— 0.09	— 0.08	— 0.06	— 0.04	— 0.02	0.00	+ 0.02
$\Sigma(Z)$	+ 17.79	+ 16.64	+ 15.65	+ 14.79	+ 14.02	+ 13.36	+ 12.77	+ 12.26	+ 11.82	+ 11.42
Log h	6.944 653	6.897 943	6.853 393	6.810 823	6.770 083	6.730 993	6.693 463	6.657 376	6.622 615	6.589 099
— Log N	0.000 096	0.000 086	0.000 077	0.000 070	0.000 064	0.000 058	0.000 054	0.000 049	0.000 043	0.000 042
Log q	3.017 000n	3.044 724n	3.067 453n	3.085 949n	3.100 779n	3.112 348n	3.121 023n	3.127 073n	3.130 705n	3.132 100n
Log f	0.477 234	0.477 242	0.477 248	0.477 254	0.477 258	0.477 268	0.477 265	0.477 268	0.477 268	0.477 268
$\Delta\Sigma(X)$	— 7.48	— 7.58	— 7.58	— 7.51	— 7.38	— 7.21	— 7.01	— 6.80	— 6.57	— 6.34
$\Delta\Sigma(Y)$	+ 9.45	+ 7.94	+ 6.55	+ 5.28	+ 4.14	+ 3.10	+ 2.17	+ 1.34	+ 0.59	— 0.07
$\Delta\Sigma(Z)$	+ 12.83	+ 12.78	+ 12.60	+ 12.32	+ 11.96	+ 11.53	+ 11.05	+ 10.53	+ 9.97	+ 9.40

	1887 Febr. 1.	1886 Dec. 23.	1886 Nov. 13.	1886 Okt. 4.	1886 Aug. 25.	1886 Juli 16.	1886 Juni 6.	1886 April 27.	1886 März 18.	1886 Febr. 6.
♃ X_1	− 16.24	− 15.60	− 15.02	− 14.48	− 13.98	− 13.53	− 13.11	− 12.71	− 12.35	− 12.01
♃ $-X_2$	+ 137.75	+ 140.81	+ 143.51	+ 145.85	+ 147.83	+ 149.43	+ 150.67	+ 151.53	+ 152.02	+ 152.12
♄ X_1	− 3.77	− 3.70	− 3.63	− 3.56	− 3.49	− 3.42	− 3.35	− 3.29	− 3.22	− 3.16
♄ $-X_2$	+ 5.63	+ 5.23	+ 4.83	+ 4.42	+ 4.01	+ 3.59	+ 3.17	+ 2.74	+ 2.32	+ 1.89
$\Sigma(X)$	+ 123.37	+ 126.74	+ 129.69	+ 132.23	+ 134.37	+ 136.07	+ 137.38	+ 138.27	+ 138.77	+ 138.84
♃ Y_1	− 3.73	− 3.32	− 2.94	− 2.60	− 2.28	− 1.99	− 1.78	− 1.49	− 1.26	− 1.05
♃ $-Y_2$	+ 64.41	+ 57.00	+ 49.46	+ 41.81	+ 34.07	+ 26.24	+ 18.34	+ 10.88	+ 2.38	− 5.66
♄ Y_1	+ 2.97	+ 2.94	+ 2.90	+ 2.87	+ 2.83	+ 2.80	+ 2.76	+ 2.72	+ 2.68	+ 2.65
♄ $-Y_2$	− 15.53	− 15.68	− 15.82	− 15.95	− 16.07	− 16.18	− 16.27	− 16.36	− 16.43	− 16.49
$\Sigma(Y)$	+ 48.12	+ 40.94	+ 33.60	+ 26.13	+ 18.55	+ 10.87	+ 3.10	− 4.75	− 12.63	− 20.55
♃ Z_1	+ 11.35	+ 11.02	+ 10.73	+ 10.47	+ 10.24	+ 10.04	+ 9.86	+ 9.70	+ 9.57	+ 9.45
♃ $-Z_2$	− 3.35	− 3.39	− 3.42	− 3.45	− 3.46	− 3.47	− 3.47	− 3.46	− 3.44	− 3.41
♄ Z_1	+ 3.06	+ 3.12	+ 3.19	+ 3.25	+ 3.31	+ 3.37	+ 3.43	+ 3.49	+ 3.55	+ 3.61
♄ $-Z_2$	+ 0.03	+ 0.05	+ 0.07	+ 0.09	+ 0.11	+ 0.13	+ 0.15	+ 0.16	+ 0.18	+ 0.20
$\Sigma(Z)$	+ 11.09	+ 10.80	+ 10.57	+ 10.36	+ 10.20	+ 10.07	+ 9.97	+ 9.89	+ 9.86	+ 9.85
Log h	6.556 732	6.525 455	6.495 193	6.465 883	6.437 469	6.409 897	6.383 125	6.357 109	6.331 801	6.307 177
− Log N	0.000 039	0.000 036	0.000 034	0.000 032	0.000 030	0.000 028	0.000 026	0.000 025	0.000 023	0.000 022
Log q	3.131 382$_n$	3.128 665$_n$	3.124 026$_n$	3.117 525$_n$	3.109 203$_n$	3.099 059$_n$	3.087 111$_n$	3.073 340$_n$	3.057 708$_n$	3.040 165$_n$
Log f	0.477 268	0.477 267	0.477 266	0.477 264	0.477 261	0.477 258	0.477 254	0.477 250	0.477 245	0.477 240
$\Delta\Sigma(X)$	− 6.12	− 5.90	− 5.68	− 5.48	− 5.28	− 5.10	− 4.93	− 4.77	− 4.63	− 4.50
$\Delta\Sigma(Y)$	− 0.66	− 1.18	− 1.63	− 2.02	− 2.36	− 2.65	− 2.89	− 3.10	− 3.26	− 3.39
$\Delta\Sigma(Z)$	+ 8.81	+ 8.21	+ 7.61	+ 7.00	+ 6.41	+ 5.82	+ 5.24	+ 4.67	+ 4.12	+ 3.59

	1885 Dec. 28.	1885 Nov. 18.	1885 Okt. 9.	1885 Aug. 30.	1885 Juli 21.	1885 Juni 11.	1885 Mai 2.	1885 März 23.	1885 Febr. 11.	1885 Jan. 2.
♃ X_1	− 11.70	− 11.40	− 11.12	− 10.86	− 10.61	− 10.38	− 10.15	− 9.94	− 9.74	− 9.54
$-X_2$	+ 151.85	+ 151.18	+ 150.13	+ 148.68	+ 146.83	+ 144.59	+ 141.91	+ 138.89	+ 135.42	+ 131.55
♄ X_1	− 3.09	− 3.02	− 2.96	− 2.89	− 2.83	− 2.76	− 2.70	− 2.63	− 2.56	− 2.50
$-X_2$	+ 1.46	+ 1.03	+ 0.60	+ 0.16	− 0.27	− 0.70	− 1.13	− 1.56	− 1.99	− 2.42
$\Sigma(X)$	+ 138.52	+ 137.79	+ 136.65	+ 135.09	+ 133.12	+ 130.75	+ 127.93	+ 124.76	+ 121.13	+ 117.09
♃ Y_1	− 0.86	− 0.68	− 0.51	− 0.35	− 0.21	− 0.07	+ 0.05	+ 0.17	+ 0.28	+ 0.38
$-Y_2$	− 13.72	− 21.78	− 29.83	− 37.86	− 45.86	− 53.80	− 61.66	− 69.44	− 77.12	− 84.67
♄ Y_1	+ 2.61	+ 2.56	+ 2.52	+ 2.47	+ 2.43	+ 2.38	+ 2.33	+ 2.28	+ 2.23	+ 2.17
$-Y_2$	− 16.53	− 16.57	− 16.59	− 16.59	− 16.59	− 16.58	− 16.55	− 16.50	− 16.45	− 16.39
$\Sigma(Y)$	− 28.50	− 36.47	− 44.41	− 52.33	− 60.23	− 68.07	− 75.83	− 83.49	− 91.06	− 98.51
♃ Z_1	+ 9.35	+ 9.27	+ 9.20	+ 9.15	+ 9.11	+ 9.09	+ 9.07	+ 9.07	+ 9.08	+ 9.10
$-Z_2$	− 3.38	− 3.33	− 3.28	− 3.21	− 3.14	− 3.06	− 2.97	− 2.88	− 2.77	− 2.65
♄ Z_1	+ 3.67	+ 3.73	+ 3.78	+ 3.84	+ 3.89	+ 3.94	+ 3.99	+ 4.04	+ 4.08	+ 4.13
$-Z_2$	+ 0.22	+ 0.24	+ 0.25	+ 0.27	+ 0.29	+ 0.31	+ 0.32	+ 0.34	+ 0.36	+ 0.37
$\Sigma(Z)$	+ 9.86	+ 9.91	+ 9.95	+ 10.05	+ 10.15	+ 10.28	+ 10.41	+ 10.57	+ 10.75	+ 10.95
Log h	6.283 189	6.259 807	6.237 013	6.214 771	6.193 054	6.171 841	6.151 105	6.130 834	6.111 004	6.091 597
− Log N	0.000 021	0.000 020	0.000 019	0.000 018	0.000 017	0.000 016	0.000 015	0.000 014	0.000 013	0.000 013
Log q	3.020 627$_n$	3.000 011$_n$	2.975 184$_n$	2.948 998$_n$	2.920 260$_n$	2.888 712$_n$	2.854 078$_n$	2.815 977$_n$	2.773 924$_n$	2.727 286$_n$
Log f	0.477 235	0.477 230	0.477 225	0.477 218	0.477 212	0.477 205	0.477 199	0.477 192	0.477 186	0.477 179
$\Delta\Sigma(X)$	− 4.38	− 4.28	− 4.18	− 4.09	− 4.02	− 3.96	− 3.91	− 3.88	− 3.85	− 3.83
$\Delta\Sigma(Y)$	− 3.49	− 3.56	− 3.60	− 3.62	− 3.62	− 3.60	− 3.56	− 3.50	− 3.43	− 3.34
$\Delta\Sigma(Z)$	+ 3.07	+ 2.58	+ 2.08	+ 1.62	+ 1.17	+ 0.75	+ 0.34	− 0.05	− 0.41	− 0.75

	(X)			(Y)			(Z)		
	$f = w^2 \frac{d^2\xi}{dt^2}$	$'f$	$''f$	$f = w^2 \frac{d^2\eta}{dt^2}$	$'f$	$''f$	$f = w^2 \frac{d^2\zeta}{dt^2}$	$'f$	$''f$
1890 Mai 16 . .	+ 54.63		+ 75.86	— 31.49		— 152.26	— 77.90		— 113.09
		— 73.71			+ 141.49			+ 108.35	
April 6 . .	+ 75.14		+ 2.15	— 136.51		— 10.77	— 108.47		— 4.74
		+ 1.48			+ 4.98			— 0.12	
Febr. 25 . .	+ 41.32		+ 3.58	— 251.72		— 5.79	— 104.56		— 4.86
		+ 42.75			— 246.74			— 104.68	
Jan. 16 . .	— 38.34		+ 46.33	— 315.00		— 252.53	— 52.63		— 109.54
		+ 4.41			— 561.74			— 157.31	
1889 Dec. 7. . .	— 110.27		+ 50.74	— 272.40		— 814.27	+ 9.40		— 266.85
		— 105.86			— 834.14			— 147.91	
Okt. 28 . .	— 137.21		— 55.12	— 169.89		— 1648.41	+ 46.16		— 414.76
		— 243.07			— 1004.03			— 101.75	
Sept. 18 . .	— 130.97		— 298.19	— 69.99		— 2652.44	+ 57.94		— 516.51
		— 374.04			— 1074.02			— 53.81	
Aug. 9 . .	— 112.35		— 672.23	+ 4.89		— 3726.46	+ 57.74		— 570.32
		— 486.39			— 1069.13			+ 3.93	
Juni 30 . .	— 91.97		— 1158.62	+ 55.86		— 4795.59	+ 53.94		— 566.39
		— 578.36			— 1013.27			+ 57.87	
Mai 21 . .	— 73.10		— 1736.98	+ 89.22		— 5808.86	+ 49.86		— 508.52
		— 651.46			— 924.05			+ 107.73	
April 11. .	— 56.19		— 2388.44	+ 110.53		— 6732.91	+ 46.42		— 400.79
		— 707.65			— 813.52			+ 154.15	
März 2 . .	— 40.99		— 3096.09	+ 123.68		— 7546.43	+ 43.71		— 246.64
		— 748.64			— 689.84			+ 197.86	
Jan. 21 . .	— 27.10		— 3844.73	+ 131.31		— 8236.27	+ 41.57		— 48.78
		— 775.74			— 558.53			+ 239.43	
1888 Dec. 12 . .	— 14.26		— 4620.47	+ 135.16		— 8794.80	+ 39.79		+ 190.65
		— 790.00			— 423.37			+ 279.22	

	(X)			(Y)			(Z)		
	$f = w^2 \frac{d^2\xi}{dt^2}$	$'f$	$''f$	$f = w^2 \frac{d^2\eta}{dt^2}$	$'f$	$''f$	$f = w^2 \frac{d^2\zeta}{dt^2}$	$'f$	$''f$
1888 Nov. 2 . .	— 2.24		— 5410.47	+ 136.30		— 9218.17	+ 38.25		+ 469.87
		— 792.24			— 287.07			+ 317.47	
Sept. 23 . .	+ 9.06		— 6202.71	+ 135.51		— 9505.24	+ 36.86		+ 787.34
		— 783.18			— 151.56			+ 354.83	
Aug. 14 . .	+ 19.73		— 6985.89	+ 133.27		— 9656.80	+ 35.53		+ 1141.67
		— 763.45			— 18.29			+ 389.86	
Juli 5 . . .	+ 29.82		— 7749.34	+ 129.99		— 9675.09	+ 34.27		+ 1531.53
		— 733.63			+ 111.70			+ 424.13	
Mai 26 . .	+ 39.40		— 8482.97	+ 125.86		— 9563.39	+ 33.03		+ 1955.66
		— 694.23			+ 237.56			+ 457.16	
April 16 . .	+ 48.45		— 9177.20	+ 121.10		— 9325.83	+ 31.80		+ 2412.82
		— 645.78			+ 358.66			+ 488.96	
März 7 . .	+ 57.01		— 9822.98	+ 115.80		— 8967.17	+ 30.62		+ 2901.78
		— 588.77			+ 474.46			+ 519.58	
Jan. 27 . .	+ 65.10		— 10411.75	+ 110.08		— 8492.71	+ 29.42		+ 3421.36
		— 523.67			+ 584.54			+ 549.00	
1887 Dec. 18 . .	+ 72.70		— 10935.42	+ 104.01		— 7908.17	+ 28.25		+ 3970.36
		— 450.97			+ 688.55			+ 577.25	
Nov. 8 . .	+ 79.84		— 11386.39	+ 97.64		— 7219.62	+ 27.11		+ 4547.61
		— 371.13			+ 786.19			+ 604.36	
Sept. 29 . .	+ 86.51		— 11757.52	+ 91.01		— 6433.43	+ 25.98		+ 5151.97
		— 284.62			+ 877.20			+ 630.34	
Aug. 20 . .	+ 92.74		— 12042.14	+ 84.17		— 5556.28	+ 24.89		+ 5782.31
		— 191.88			+ 961.37			+ 655.28	
Juli 11 . .	+ 98.53		— 12234.02	+ 77.12		— 4594.86	+ 23.82		+ 6437.54
		— 93.35			+ 1038.49			+ 679.05	
Juni 1 . .	+ 103.86		— 12327.37	+ 69.91		— 3556.37	+ 22.79		+ 7116.59
		+ 10.51			+ 1108.40			+ 701.84	
April 22 . .	+ 108.76		— 12316.86	+ 62.57		— 2447.97	+ 21.79		+ 7818.48
		+ 119.27			+ 1170.97			+ 723.63	

1887 März 13 . .	+ 113.23	+ 232.50	— 12197.59	+ 55.07	+ 1226.04	— 1277.00	+ 20.82	+ 744.45	+ 8542.06
Febr. 1 . .	+ 117.25	+ 349.75	— 11965.09	+ 47.46	+ 1273.50	— 50.96	+ 19.90	+ 764.85	+ 9286.51
1886 Dec. 23 . .	+ 120.84	+ 470.59	— 11615.84	+ 39.76	+ 1313.26	+ 1222.54	+ 19.01	+ 783.86	+ 10050.86
Nov. 13 . .	+ 124.01	+ 594.60	— 11144.75	+ 31.97	+ 1345.23	+ 2535.80	+ 18.18	+ 801.54	+ 10834.22
Okt. 4 . . .	+ 126.75	+ 721.35	— 10550.15	+ 24.11	+ 1369.84	+ 3881.03	+ 17.36	+ 818.90	+ 11635.76
Aug. 25 . .	+ 129.09	+ 850.44	— 9828.80	+ 16.19	+ 1385.53	+ 5250.87	+ 16.61	+ 835.51	+ 12454.66
Juli 16 . .	+ 130.97	+ 981.41	— 8978.36	+ 8.22	+ 1393.75	+ 6635.90	+ 15.89	+ 851.40	+ 13290.17
Juni 6 . .	+ 132.45	+ 1113.86	— 7996.95	+ 0.21	+ 1393.96	+ 8029.65	+ 15.21	+ 866.61	+ 14141.57
April 27 . .	+ 133.50	+ 1247.86	— 6883.09	— 7.85	+ 1386.11	+ 9423.61	+ 14.56	+ 881.17	+ 15008.18
März 18 . .	+ 134.14	+ 1381.50	— 5635.78	— 15.89	+ 1370.22	+ 10809.72	+ 13.98	+ 895.15	+ 15889.35
Febr. 6 . .	+ 134.34	+ 1515.84	— 4254.23	— 23.94	+ 1346.28	+ 12179.94	+ 13.44	+ 908.59	+ 16784.50
1885 Dec. 28 . .	+ 134.14	+ 1649.98	— 2738.39	— 31.99	+ 1314.29	+ 13526.22	+ 12.93	+ 921.52	+ 17693.09
Nov. 18 . .	+ 133.51	+ 1783.49	— 1088.41	— 40.03	+ 1274.26	+ 14840.51	+ 12.49	+ 934.01	+ 18614.61
Okt. 9 . . .	+ 132.47	+ 1915.96	+ 695.08	— 48.01	+ 1226.25	+ 16114.77	+ 12.08	+ 946.04	+ 19548.62
Aug. 30 . .	+ 131.00	+ 2046.96	+ 2611.04	— 55.95	+ 1170.30	+ 17341.02	+ 11.67	+ 957.71	+ 20494.66
Juli 21 . .	+ 129.10	+ 2176.06	+ 4658.00	— 63.85	+ 1106.45	+ 18511.32	+ 11.32	+ 969.03	+ 21452.87
Juni 11 . .	+ 126.79	+ 2302.85	+ 6834.06	— 71.67	+ 1034.78	+ 19617.77	+ 11.03	+ 980.06	+ 22421.40
Mai 2 . . .	+ 124.02	+ 2426.87	+ 9136.91	— 79.39	+ 955.39	+ 20652.55	+ 10.75	+ 990.81	+ 23401.46

	(X)			(Y)			(Z)		
	$f = w^2 \frac{d^2\xi}{dt^2}$	$'f$	$''f$	$f = w^2 \frac{d^2\eta}{dt^2}$	$'f$	$''f$	$f = w^2 \frac{d^2\zeta}{dt^2}$	$'f$	$''f$
1885 März 23 . .	+ 120.88		+ 11563.78	— 86.99		+ 21607.94	+ 10.52		+ 24392.27
		+ 2547.75			+ 868.40			+ 1001.88	
Febr. 11 . .	+ 117.28		+ 14111.53	— 94.49		+ 22476.34	+ 10.84		+ 25393.60
		+ 2665.08			+ 773.91			+ 1011.67	
Jan. 2 . . .	+ 113.26		+ 16776.56	— 101.85		+ 23250.25	+ 10.20		+ 26405.27
		+ 2778.29			+ 672.06			+ 1021.87	
1884 Nov. 23 . .	+ 108.82		+ 19554.85	— 109.07		+ 23922.31	+ 10.10		+ 27427.14
		+ 2887.11			+ 562.99			+ 1031.97	
Okt. 14 . .	+ 103.96		+ 22441.96	— 116.13		+ 24485.30	+ 10.04		+ 28459.11
		+ 2991.07			+ 446.86			+ 1042.01	
Sept. 4 . .	+ 98.68		+ 25433.03	— 123 02		+ 24932.16	+ 10.02		+ 29501.12
		+ 3089.75			+ 323.84			+ 1052.03	
Juli 26 . .	+ 92.98		+ 28522.78	— 129.72		+ 25256.00	+ 10.04		+ 30553.15
		+ 3182 73			+ 194.12			+ 1062.07	
Juni 16 . .	+ 86.86		+ 31705.51	— 136.22		+ 25450.12	+ 10.10		+ 31615.22
		+ 3269.59			+ 57.90			+ 1072.17	
Maj 7 . . .	+ 80.32		+ 34975.10	— 142.50		+ 25508.02	+ 10.20		+ 32687.39
		+ 3349.91			— 84.60			+ 1082.37	
März 28 . .	+ 73.36		+ 38325.01	— 148.54		+ 25423.42	+ 10.34		+ 33769.76
		+ 3423.27			— 233.14			+ 1092.71	
Febr. 17 . .	+ 65.98		+ 41748.28	— 154.32		+ 25190.28	+ 10.52		+ 34862.47
		+ 3489.25			— 387.46			+ 1103.23	
Jan. 8 . . .	+ 58.18		+ 45237.53	— 159.82		+ 24802.82	+ 10.74		+ 35965.70
		+ 3547.43			— 547.28			+ 1113.97	
1883 Nov. 29 . .	+ 49.96		+ 48784.96	— 165.02		+ 24255.54	+ 11.00		+ 37079.67

wo die Grössen von 1884 Nov. 23 bis auf 1883 Nov. 29 extrapolirt sind.

Mit Hülfe von diesen Tabellen über die Störungswerthe wurde nun die Rechnung weiter geführt. Zuerst habe ich aus den für 1890 März 17 oskulirenden Elementen die ungestörten Koordinaten des Kometen x_0, y_0, z_0 und seine Geschwindigkeiten $\frac{dx_0}{dt}$, $\frac{dy_0}{dt}$, $\frac{dz_0}{dt}$ berechnet. Dann wurden aus den Störungstabellen die Kometenstörungen in Koordinaten ξ, η, ζ und Geschwindigkeiten $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$ genommen. Werden diese Störungswerthe zu x_0, y_0, z_0 und $\frac{dx_0}{dt}$, $\frac{dy_0}{dt}$, $\frac{dz_0}{dt}$ resp. addirt, so erhält man die Koordinaten und die Geschwindigkeiten des Kometen in Bezug auf die Sonne $x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$, und aus diesen werden mit Hülfe der Formeln, pag. 407, die oskulirenden Excentricitäten abgeleitet.

Um *die konvergirenden* Excentricitätswerthe zu erhalten, haben wir zu den Geschwindigkeitskomponenten $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ die von den Planetenstörungen bewirkten Geschwindigkeiten der Sonne zu addiren; diese Geschwindigkeiten, welche $\frac{d\xi_\odot}{dt}$, $\frac{d\eta_\odot}{dt}$, $\frac{d\zeta_\odot}{dt}$ bezeichnet werden können, erhalten wir durch Verwendung der Gleichungen:

$$\frac{d\xi_\odot}{dt} = -\frac{\Sigma m_1 \frac{dx_1}{dt}}{1 + \Sigma m_1}$$

$$\frac{d\eta_\odot}{dt} = -\frac{\Sigma m_1 \frac{dy_1}{dt}}{1 + \Sigma m_1}$$

$$\frac{d\zeta_\odot}{dt} = -\frac{\Sigma m_1 \frac{dz_1}{dt}}{1 + \Sigma m_1},$$

wobei m_1, $\frac{dx_1}{dt}$, $\frac{dy_1}{dt}$, $\frac{dz_1}{dt}$ die Massen und Geschwindigkeiten der störenden Planeten bezeichnen, welche Geschwindigkeiten aus den Tabellen pagg. 411—413 durch Anwendung der Formel:

$$\frac{df(a)}{dt} = f'(a) - \frac{1}{6} f'''(a) + \dots$$

erhalten werden können.

Werden nun diese Werthe der Geschwindigkeiten der Sonne zu den relativen Geschwindigkeiten des Kometen addirt, so müssen wir wiederum die Formeln pag. 407 benutzen, wo als Koordinaten die gestörten Koordinaten des Kometen x, y, z zu gebrauchen sind und als Geschwindigkeiten die auf diese Weise korrigirten Koordinaten $\frac{dx}{dt} + \frac{d\xi_\odot}{dt}$, $\frac{dy}{dt} + \frac{d\eta_\odot}{dt}$, $\frac{dz}{dt} + \frac{d\zeta_\odot}{dt}$, welche Grössen im Folgenden $\left(\frac{dx}{dt}\right)$, $\left(\frac{dy}{dt}\right)$, $\left(\frac{dz}{dt}\right)$ bezeichnet werden.

In der oben citirten Arbeit hatte ich diese Rechnungen für fünf Epochen mit einem Intervalle von 320 Tagen ausgeführt, und die Resultate deuteten eine kontinuirliche Abnahme der Excentricität an, obwohl aus den wenigen Daten keine sichere Schlussfolgerung bezüglich der Grenze, gegen welche die Excentricitätswerthe schliesslich konvergiren, gezogen werden konnte. Jetzt, wo ein grösseres Material vorliegt, habe ich die Rechnung weiter geführt und zwar mit kürzerem Intervalle, 160 Tage.

Um einen Anhaltspunkt für die Abschätzung der Genauigkeit der logaritmischen Rechnung zu gewinnen, habe ich auch für die ungestörten Koordinaten und Geschwindigkeiten die Ausdrücke C, C_1, C_{11} berechnet, Quantitäten, welche in der ungestörten Bewegung konstante Werthe besitzen müssen.

Wir bekommen also:

	1889 Sept. 18	1889 April 11	1888 Nov. 2	1888 Mai 26	1887 Dec. 18	1887 Juli 11	1887 Febr. 1
x_0	+ 2.982 662	+ 4.039 712	+ 4.879 996	+ 5.565 762	+ 6.150 889	+ 6.664 797	+ 7.125 620
y_0	— 1.770 007	— 1.522 071	— 1.166 978	— 0.773 028	— 0.364 351	+ 0.048 887	+ 0.461 921
z_0	— 0.861 788	— 2.881 802	— 3.753 195	— 5.008 286	— 6.173 648	— 7.268 128	— 8.304 894
$\frac{dx_0}{dt}$	— 0.327 0220	— 0.236 7804	— 0.187 7841	— 0.157 2724	— 0.186 4515	— 0.121 2572	— 0.109 6341
$\frac{dy_0}{dt}$	— 0.035 6340	— 0.079 9594	— 0.095 1387	— 0.100 9810	— 0.103 0132	— 0.103 4182	— 0.103 0052
$\frac{dz_0}{dt}$	+ 0.399 9681	+ 0.360 1721	+ 0.326 9982	+ 0.301 6306	+ 0.281 8395	+ 0.265 9434	+ 0.252 8406
ξ	— 31	— 289	— 541	— 848	— 1 093	— 1 223	— 1 196
η	— 266	— 672	— 921	— 955	— 790	— 459	— 5
ζ	— 51	— 40	+ 47	+ 196	+ 397	+ 644	+ 929
$\frac{d\xi}{dt}$	+ 310	+ 681	+ 792	+ 715	+ 488	+ 143	— 291
$\frac{d\eta}{dt}$	+ 1046	+ 870	+ 855	— 175	— 687	— 1001	— 1250
$\frac{d\zeta}{dt}$	+ 78	— 131	— 298	— 441	— 563	— 667	— 754
korr. $\left(\frac{d\xi}{dt}\right)$	— 2402	— 2899	— 2247	— 1971	— 1582	— 1103	— 556
korr. $\left(\frac{d\eta}{dt}\right)$	— 139	+ 481	+ 1073	+ 1612	+ 2071	+ 2438	+ 2691
korr. $\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)$	+ 41	+ 88	+ 32	+ 25	+ 14	+ 2	— 11

	1886 Aug. 25	1886 März 18	1885 Okt. 9	1885 Mai 2	1884 Nov. 23	1884 Juni 16	1884 Jan. 8
x_0	+ 7.545 066	+ 7.931 276	+ 8.290 123	+ 8.625 990	+ 8.942 258	+ 9.241 570	+ 9.526 049
y_0	+ 0.872 382	+ 1.279 073	+ 1.681 395	+ 2.079 086	+ 2.472 079	+ 2.860 400	+ 3.244 143
z_0	— 9.293 587	— 10.241 441	— 11.154 013	— 12.035 706	— 12.890 089	— 13.720 052	— 14.528 000
$\frac{dx_0}{dt}$	— 0.100 4235	— 0.092 9229	— 0.086 6806	— 0.081 3933	— 0.076 8489	— 0.072 8948	— 0.069 4181
$\frac{dy_0}{dt}$	— 0.102 1782	— 0.101 1424	— 0.100 0080	— 0.098 8859	— 0.097 6611	— 0.096 5088	— 0.095 3738
$\frac{dz_0}{dt}$	+ 0.241 8059	+ 0.232 3472	+ 0.224 1202	+ 0.216 8768	+ 0.210 4319	+ 0.204 6478	+ 0.199 4167
ξ	— 982	— 562	+ 71	+ 915	+ 1 956	+ 3 171	+ 4 524
η	+ 525	+ 1 081	+ 1 611	+ 2 065	+ 2 391	+ 2 544	+ 2 479
ζ	+ 1 246	+ 1 589	+ 1 955	+ 2 340	+ 2 743	+ 3 162	+ 3 597
$\frac{d\xi}{dt}$	— 786	— 1314	— 1850	— 2365	— 2833	— 3227	— 3519
$\frac{d\eta}{dt}$	— 1378	— 1379	— 1251	— 996	— 618	— 127	+ 467
$\frac{d\zeta}{dt}$	— 827	— 888	— 940	— 985	— 1027	— 1067	— 1109
korr. $\left(\frac{d\xi}{dt}\right)$	+ 36	+ 650	+ 1262	+ 1848	+ 2381	+ 2884	+ 3184
korr. $\left(\frac{d\eta}{dt}\right)$	+ 2826	+ 2832	+ 2712	+ 2462	+ 2087	+ 1599	+ 1008
korr. $\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)$	— 25	— 38	— 51	— 62	— 72	— 79	— 84

ξ, η, ζ und $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$ sind in derselben Decimale wie x_0, y_0, z_0 und $\frac{dx_0}{dt}$, $\frac{dy_0}{dt}$, $\frac{dz_0}{dt}$ bez. ausgedrückt, d. i. jene in der sechsten, diese in der siebenten Decimale.

Die ungestörte Bewegung.

	1889 Sept. 18	1889 April 11	1888 Nov. 2	1888 Mai 26	1887 Dec. 18	1887 Juli 11	1887 Febr. 1
c	−0.683 3338	−0.683 3331	−0.683 3335	−0.683 3337	−0.683 3336	−0.683 3334	−0.683 3335
c_{I}	−0.738 6551	−0.738 6546	−0.738 6550	−0.738 6549	−0.738 6550	−0.738 6551	−0.738 6548
c_{II}	+0.891 1470	+0.891 1465	+0.891 1472	+0.891 1464	+0.891 1471	+0.891 1468	+0.891 1467

	1886 Aug. 25	1886 März 18	1885 Okt. 9	1885 Mai 2	1884 Nov. 23	1884 Juni 16	1884 Jan. 8
c	−0.683 3335	−0.683 3335	−0.683 3342	−0.683 3337	−0.683 3338	−0.683 3338	−0.683 3335
c_{I}	−0.738 6551	−0.738 6552	−0.738 6556	−0.738 6553	−0.738 6553	−0.738 6553	−0.738 6547
c_{II}	+0.891 1467	+0.891 1461	+0.891 1475	+0.891 1468	+0.891 1469	+0.891 1470	+0.891 1470

Die oskulirenden Werthe.

	1889 Sept. 18	1889 April 11	1888 Nov. 2	1888 Mai 26	1887 Dec. 18	1887 Juli 11	1887 Febr. 1
C	— 0.683 0581	— 0.683 0183	— 0.683 1893	— 0.683 4408	— 0.683 7029	— 0.683 9303	— 0.684 0880
C_{I}	— 0.738 6872	— 0.738 6730	— 0.738 7837	— 0.738 9772	— 0.739 2096	— 0.739 4413	— 0.739 6331
C_{II}	+ 0.891 1680	+ 0.891 1606	+ 0.891 1310	+ 0.891 0347	+ 0.890 8477	+ 0.890 5588	+ 0.890 1668
Log p	0.581 5329	0.581 5116	0.581 5945	0.581 7045	0.581 7982	0.581 8265	0.581 7787
e	1.000 3620	1.000 1916	1.000 1586	1.000 1828	1.000 2811	1.000 2862	1.000 3392

	1886 Aug. 25	1886 März 18	1885 Okt. 9	1885 Mai 2	1884 Nov. 23	1884 Juni 16	1884 Jan. 8
C	— 0.684 1514	— 0.684 1014	— 0.683 9276	— 0.683 6235	— 0.683 1984	— 0.682 6477	— 0.682 0051
C_{I}	— 0.739 7533	— 0.739 7690	— 0.739 6531	— 0.739 3798	— 0.738 9357	— 0.738 3095	— 0.737 4986
C_{II}	+ 0.889 6803	+ 0.889 1128	+ 0.888 4901	+ 0.887 8408	+ 0.887 2001	+ 0.886 6130	+ 0.886 1309
Log p	0.581 6343	0.581 3807	0.581 0159	0.580 5407	0.579 9664	0.579 8115	0.578 6033
e	1.000 3856	1.000 4214	1.000 4449	1.000 4537	1.000 4479	1.000 4267	1.000 3904

1889 Sept. 18	e = 1.000 3620	1886 Aug. 25	e = 1.000 3856
April 11	1916	März 18	4214
1888 Nov. 2	1586	1885 Okt. 9	4449
Mai 26	1828	Mai 2	4537
1887 Dec. 18	2811	1884 Nov. 23	4479
Juli 11	2862	Juni 16	4267
Febr. 1	3892	Jan. 8	3904

Die konvergirenden Werthe.

	1889 Sept. 18	1889 April 11	1888 Nov. 2	1888 Mai 26	1887 Dec. 18	1887 Juli 11	1887 Febr. 1
Log x	0.467 2574	0.606 3247	0.688 3713	0.745 4585	0.788 8572	0.823 7072	0.852 7498
Log y	0.248 0403$_n$	0.182 6266$_n$	0.067 4058$_n$	9.888 7318$_n$	9.562 4606$_n$	8.685 0983	9.664 5630
Log z	9.935 4261$_n$	0.376 9128$_n$	0.574 3957$_n$	0.699 6678$_n$	0.790 5136$_n$	0.861 3838$_n$	0.919 2855$_n$
Log r	0.548 0543	0.692 8858	0.796 9706	0.876 5915	0.940 5829	0.993 8819	1.039 4578
Log $\left(\frac{dx}{dt}\right)$	9.514 8547$_n$	9.374 5691$_n$	9.273 8797$_n$	9.196 9992$_n$	9.135 3264$_n$	9.084 0518$_n$	9.040 2810$_n$
Log $\left(\frac{dy}{dt}\right)$	8.550 7578$_n$	8.902 1351$_n$	8.977 6820$_n$	9.003 4058$_n$	9.012 2879$_n$	9.013 9931$_n$	9.012 2511$_n$
Log $\left(\frac{dz}{dt}\right)$	9.602 0383	9.556 4989	9.514 5100	9.479 4155	9.449 9173	9.424 6806	9.402 7154
C	— 0.683 5241	— 0.683 1893	— 0.682 9282	— 0.682 6962	— 0.682 4872	— 0.682 3004	— 0.682 1452
C_1	— 0.738 7065	— 0.738 5642	— 0.738 3847	— 0.738 1718	— 0.737 9317	— 0.737 6694	— 0.737 3991
C_{11}	+ 0.890 9732	+ 0.890 6047	+ 0.890 3030	+ 0.890 0615	+ 0.889 8799	+ 0.889 7582	+ 0.889 6978
Log p	0.581 6095	0.581 2910	0.581 0121	0.580 7566	0.580 5246	0.580 3176	0.580 1445
e	1.001 0120	1.000 6288	1.000 4242	1.000 3069	1.000 2357	1.000 1908	1.000 1622

	1886 Aug. 25	1886 März 18	1885 Okt. 9	1885 Mai 2	1884 Nov. 23	1884 Juni 16	1884 Jan. 8
Log x	0.877 6065	0.899 8123	0.918 5647	0.935 8551	0.951 5422	0.965 8947	0.979 1190
Log y	9.940 9680	0.107 2622	0.226 0856	0.318 3036	0.393 4822	0.456 8128	0.511 4317
Log z	0.968 1252$_n$	1.010 2937$_n$	1.047 3551$_n$	1.080 3871$_n$	1.110 1635$_n$	1.137 2556$_n$	1.162 0982$_n$
Log r	1.079 2156	1.114 4434	1.146 0485	1.174 6937	1.200 8774	1.224 9818	1.247 3072
Log $\left(\frac{dx}{dt}\right)$	9.002 1596$_n$	8.968 4330$_n$	8.938.2164$_n$	8.910 8644$_n$	8.885 8931$_n$	8.862 9806$_n$	8.841 6823$_n$
Log $\left(\frac{dy}{dt}\right)$	9.008 7424$_n$	9.004 3089$_n$	8.999 3999$_n$	8.994.2700$_n$	8.989 0679$_n$	8.983 8798$_n$	8.978 7569$_n$
Log $\left(\frac{dz}{dt}\right)$	9.383 3139	9.365 9643	9.350 2889	9.336 0024	9.322 8847	9.310 7638	9.299 5016
C	— 0.682 0228	— 0.681 9385	— 0.681 8918	— 0.681 8840	— 0.681 9158	— 0.681 9811	— 0.682 0782
C_1	— 0.737 1296	— 0.736 8739	— 0.736 6874	— 0.736 4297	— 0.736 2639	— 0.736 1391	— 0.736 0615
C_{11}	+ 0.889 6948	+ 0.889 7482	+ 0.889 8553	+ 0.890 0112	+ 0.890 2038	+ 0.890 4278	+ 0.890 6754
Log p	0.580 0071	0.579 9113	0.579 8579	0.579 8484	0.579 8828	0.579 9559	0.580 0668
e	1.000 1447	1.000 1846	1.000 1289	1.000 1260	1.000 1249	1.000 1248	1.000 1280

Datum.	e	f'	f''	f'''	f''''
1889 Sept. 18	1.001 012				
		— 383			
April 11	1.000 629		+ 178		
		— 205		— 90	
1888 Nov. 2	1.000 424		+ 88		+ 47
		— 117		— 43	
Mai 26	1.000 307		+ 45		+ 25
		— 72		— 18	
1887 Dec. 18	1.000 235		+ 27		+ 8
		— 45		— 10	
Juli 11	1.000 190		+ 17		+ 4
		— 28		— 6	
Febr. 1	1.000 162		+ 11		+ 2
		— 17		— 4	
1886 Aug. 25	1.000 145		+ 7		+ 1
		— 10		— 3	
März 18	1.000 135		+ 4		+ 2
		— 6		— 1	
1885 Okt. 9	1.000 129		+ 3		+ 0
		— 3		— 1	
Mai 2	1.000 126		+ 2		
		— 1			
1884 Nov. 23	1.000 125		+ 0		
		— 1			
Juni 16	1.000 124		+ 0		
		— 1			
Jan. 8	1.000 123				

* * *

Wenn wir die zwei Reihen der Excentricitätswerthe untersuchen, finden wir die Auseinandersetzung pagg. 406—409 vollauf bestätigt. Die oskulirenden Excentricitäten zeigen eine periodische Ab- und Zunahme, und die nach meinem Vorschlage aus den gestörten Koordinaten und den gestörten, für die Bewegung der Sonne korrigirten, Geschwindigkeiten berechneten Excentricitätswerthe liefern eine Tabelle, wo die Differenzen (resp. die Derivirten) aller Ordnungen gegen Null konvergiren, woraus mit Bestimmtheit hervorgeht, dass die Excentricitätswerthe selbst gegen einen gewissen Endwerth konvergiren, der übrigens bei der letzten angewandten Zeitepoche beinahe erreicht worden war.

Das Resultat der Rechnung ist: *Der Komet 1890 II hat sich ursprünglich in einer hyperbolischen Bahn mit der Excentricität* 1.000 12 *der Sonne genähert.*

Dass die *oskulirenden* Excentricitäten nicht für unseren Zweck zu gebrauchen sind, war schon a priori klar und ist durch die numerische Rechnung vollauf bestätigt worden. Dass die Excentricitätswerthe THRAENS kontinuirlich abzunehmen scheinen, ist zweifelsohne eine Folge davon, dass seine Rechnung einen allzu kurzen Zeitraum umfasst. Wenn wir z. B. bei dem Kometen 1890 II die oskulirenden Excentricitäten ins Auge fassen, finden wir, dass sie von 1888 Nov. 2 bis zu 1885 Mai 2 kontinuirlich zunehmen, obgleich die ausführliche Tabelle deutlich angiebt, dass diese Zunahme nur periodischer Natur ist. Eine Rechnung, welche einen grösseren Zeitraum umfasst und mit kleinerem Intervalle ausgeführt wird, wird ohne Zweifel ein Resultat ergeben, das mit dem für den Kometen 1890 II erhaltenen vollkommen analog ist.

* * *

Zuletzt wollen wir mit einigen Worten eine andere Frage berühren, welche mit den Hauptpunkten der vorigen Darstellung am engsten verknüpft ist. Aus dem oben Erwähnten geht es hervor, dass die oskulirende Excentricität einer Kometenbahn zur Zeit des Periheldurchganges nicht benutzt werden kann, um einen exakten Ausdruck der Beschaffenheit der Bahn zu geben für die Zeit, wo der Komet sich in grosser Entfernung von der Sonne befindet. Dies aus zwei Gründen, erstens in Folge der Störungen in der Lage und in den Geschwindigkeiten des Kometen und zweitens in Folge derjenigen Korrektionen, welche auf Grund der Bewegung der *Sonne* in den Geschwindigkeiten des Kometen gemacht werden müssen.

Bei einer Kometenbahn mit einer Excentricität, welche zu der Oskulationsepoche etwas kleiner als die Einheit ist, d. h. bei einer sehr langgestreckten elliptischen Bahn, kann man, um einen sicheren Werth der Umlaufszeit des Kometen zu bekommen, nicht ohne weiteres die oskulirende Excentricität verwenden. Um in dieser Beziehung zu einem Resultate zu gelangen, ist es

nothwendig eine Rückwärtsrechnung der Störungen auszuführen und ausserdem für die Geschwindigkeiten der Sonne Korrektionen zu machen.

Riem hat in einem kleinen Aufsatze »Über eine frühere Erscheinung des Kometen 1881 III Tebbut» nachzuweisen versucht, dass der Komet 1881 III einer derjenigen Kometen sei, von welchen alte chinesische Beobachtungen vorliegen.

Für den Kometen 1881 III hat Riem gefunden:[1])

Oskulationsepoche 1881 Juni 7.5.

$$q = 0.734\,5580$$
$$e = 0.995\,9540.$$

Aus diesen Werthen ergiebt sich eine Umlaufszeit (oskulirende!) von 2446 Jahren. Jedoch darf man diese Umlaufszeit zwischen 2390 und 2480 variiren, ohne mit den Beobachtungen in Widerspruch zu gerahten. Riem gelangt nun zu dem Resultate, dass der Komet 1881 III mit einem in China im Jahre 612 v. Chr. beobachteten Kometen identisch ist, und bestimmt daraus die Umlaufszeit zu 2493 Jahren, ein Werth, der ja dem erhaltenen Maximiwerthe 2480 sehr nahe kommt.

Wenn wir bei dem Kometen 1890 II die oskulirende Excentricität 1890 März 17 (1.000 410) mit dem erhaltenen Grenzwerthe (1.000 123) vergleichen, so finden wir eine Differenz von 0.000 287. Wenn ich bei dem Kometen 1881 III eine Variation der Excentricität von nur 0.000 200 annehme und q als konstant voraussetzt, erhalten wir folgende Werthe der Umlaufszeit:

$e =$	0.995 754	0.995 954	0.996 154
$T =$	2276	2446	2640,

wo also die zwei Abweichungen der Umlaufszeit mit der Annahme, der Komet 1881 III wäre der 612 Jahre vor unserer Zeitrechnung beobachtete, nicht vereinbar wären.

---

[1]) Über die Bahn des grossen Kometen 1881 III. Abh. der Kais. Leop.-Carol. deutschen Akad. der Naturforscher. Halle, 1896.

Ich habe indessen eine Rückwärtsrechnung der Störungen für diesen Kometen angefangen, und ich werde hoffentlich mit der Zeit die Frage beantworten können, ob der dritte Komet von 1881 mit dem im Jahre 612 v. Chr. beobachteten identisch sein kann, eine Frage, die meines Erachtens noch als eine offene bezeichnet werden muss.



ÖFVERSIGT AF K. SV. VET.-AKAD. FÖRHANDL. 1898. N:o 7.

MEDDELANDEN

FRÅN

LUNDS ASTRONOMISKA OBSERVATORIUM

N:o 2.

EINE METODE DEN JUPITERSRADIUS ZU BESTIMMEN

VON

C. A. SCHULTZ-STEINHEIL

MITGETEILT DEN 14 SEPTEMBER 1898 DURCH C. V. L. CHARLIER

STOCKHOLM 1898
KUNGL. BOKTRYCKERIET. P. A. NORSTEDT & SÖNER

ÖFVERSIGT AF K. SV. VET.-AKAD. FÖRHANDL. 1898. N:o 7.

MEDDELANDEN

FRÅN

LUNDS ASTRONOMISKA OBSERVATORIUM

N:o 2.

EINE METODE DEN JUPITERSRADIUS ZU BESTIMMEN

VON

C. A. SCHULTZ-STEINHEIL

MITGETEILT DEN 14 SEPTEMBER 1898 DURCH C. V. L. CHARLIER

STOCKHOLM 1898
KUNGL. BOKTRYCKERIET. P. A. NORSTEDT & SÖNER

Den Durchmesser eines Planets durch direkte Messungen zu bestimmen ist eine Sache, die sich als sehr schwierig erwiesen hat, da viele Umstände beitragen, eine solche Bestimmung unsicher zu machen. Umfassende teoretische so wie praktische Untersuchungen hierüber sind von SEELIGER in einer Abhandlung: »Die scheinbare Vergrösserung des Erdschattens bei Mondfinsternissen» und von HARTWIG in seiner Abhandlung: »Untersuchungen über die Durchmesser der Planeten Venus und Mars» ausgeführt worden. Lange war es meine Absicht, den Jupitersradius zu bestimmen gemäss einer Metode, wo die Ungelegenheiten, welche bei den direkten Messungen der Scheibe unvermeidlich sind, zum grössten Teile vermieden werden, obgleich ich nicht Gelegenheit gehabt habe, für diesen Zweck dienliche Instrumente anzuwenden. Als ich in der Mitte von Februar dieses Jahr nach Lund übersiedelte, und der Direktor der Sternwarte Prof. CHARLIER mir gütigst gestattete, den Refraktor zu benutzen, war es meine Hoffnung, Messungen zur Bestimmung des Jupitersradius ausführen zu können. Da es aber den ganzen Frühling nebelich war, und erst kurz vor der Mitte des Sommers heiter wurde, als Jupiter schon zu nahe am Horizonte lag, um für Beobachtung dienlich zu sein, ist diese meine Hoffnung bis

jetzt betrogen worden. Obwohl ich also noch nicht Gelegenheit gehabt habe, die Güte der Metode durch Beobachtung zu prüfen, glaube ich doch, dass es nicht ohne Interesse sein kann, die Principien der Metode in aller Kürze darzulegen.

Der Grundgedanke derselbe ist: die Rektascentions- und Deklinations-differenzen zwischen einem Satelliten und dem Schatten, welchen ein anderer Satellit auf den Jupiter wirft, zu messen. Dadurch wird ganz und gar die schwierige Einstellung des Mikrometerfadens auf dem Rande der Jupitersscheibe, was eben die Hauptursache der Unsicherheit der direkten Bestimmungen ist, vermieden. Da Sonnenfinsternisse auf dem Jupiter sehr oft vorkommende Ergebnisse sind, muss eine solche Bestimmung des Jupitersradius leicht während eines Winters ausgeführt werden können, wenn nur nicht die Witterung so beispielslos ungünstig ist, wie sie in Lund das letzte Jahr war. Da der Schatten der Satelliten bei verschiedenen Gelegenheiten auf beträchtig verschiedene Latituden fällt, wäre es nach dieser Metode vielleicht möglich, den Jupitersradius auf verschiedenen Latituden zu bestimmen, und dadurch zur Bestimmung der Form des Jupiters beizutragen.

Wir nehmen ein Koordinatensystem mit Origo im Centrum vom Jupiter, mit der xy-Ebene parallel der Ekliptik an, und lassen die x-Achse vorläufig unbestimmt.

In diesem Systeme seien

die Koordinaten der Sonne (S) . . . . X Y Z R

» » des Satelliten, dessen Schatten beobachtet wird (s) . . . . x y z r

» » eines anderen Satelliten (s_1) . . . . x_1 y_1 z_1 r_1

» » des Schattens auf dem Jupiter (σ) . ξ η ζ ϱ

m der Abstand zwischen σ und s_1

I der Winkel zwischen ϱ und r_1.

Die zu bestimmende Grösse ist also in erster Hand der Abstand vom Jupiterscentrum bis σ, und deshalb werden Rektascentions- und Deklinations-differenzen zwischen σ und s_1 gemessen.

Die Gleichung des Geraden durch S und s ist

$$\frac{p-x}{\cos\alpha}=\frac{q-y}{\cos\beta}=\frac{r-z}{\cos\gamma}\quad\ldots\ldots\ldots(1)$$

wo

$$\cos\alpha=\frac{X-x}{P};\ \cos\beta=\frac{Y-y}{P};\ \cos\gamma=\frac{Z-z}{P}$$

$$P^2=(X-x)^2+(Y-y)^2+(Z-z)^2;\qquad P>0$$

und p q r die laufenden Koordinaten sind.

Zur Bestimmung der ξ η ζ haben wir

$$m^2=(x_1-\xi)^2+(y_1-\eta)^2+(z_1-\zeta)^2\quad\ldots\ldots(2)$$

$$\frac{\xi-x}{\cos\alpha}=\frac{\eta-y}{\cos\beta}=\frac{\zeta-z}{\cos\gamma}.$$

Daraus folgt

$$\xi=x-z\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}+\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\zeta$$

$$\eta=y-z\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}+\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\zeta$$

welche Werte von ξ und η in (2) eingesetzt

$$\left.\begin{aligned}m^2\cos^2\gamma=&[(x_1-x)\cos\gamma+z\cos\alpha-\zeta\cos\alpha]^2\\&+[(y_1-y)\cos\gamma+z\cos\beta-\zeta\cos\beta]^2\\&+[(z_1-z)\cos\gamma+z\cos\gamma-\zeta\cos\gamma]^2\end{aligned}\right\}\quad\ldots(3)$$

geben, oder

$$m^2\cos^2\gamma=(f-\zeta\cos\alpha)^2+(g-\zeta\cos\beta)^2+(h-\zeta\cos\gamma)^2\qquad(4)$$

wo

$$\left.\begin{aligned}f&=(x_1-x)\cos\gamma+z\cos\alpha\\g&=(y_1-y)\cos\gamma+z\cos\alpha\\h&=(z_1-z)\cos\gamma+z\cos\gamma\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots(5)$$

oder, wenn man setzt

$$\left.\begin{aligned}F^2&=f^2+g^2+h^2\\G&=f\cos\alpha+g\cos\beta+h\cos\gamma\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots(6)$$

wird

$$\zeta=+G\pm\sqrt{G^2-F^2+m^2\cos^2\gamma}.$$

Die ξ η und ζ werden also durch folgende Gleichungen bestimmt:

$$\left.\begin{aligned}\xi &= x - z\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma} + \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\zeta\\ \eta &= y - z\frac{\cos\beta}{\cos\gamma} + \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\zeta\\ \zeta &= + G \pm \sqrt{G^2 - F^2 + m^2\cos^2\gamma}\,.\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots(7)$$

Das Zeichen in der letzten Gleichung kann folgendermassen bestimmt werden, wenn π der Abstand zwischen σ und s ist.

$$\varrho^2 = r^2 + \pi^2 - 2r\pi\cos(r\pi)$$

d. h.

$$\pi = r\cos(r\pi) - \sqrt{r^2\cos^2(r\pi) + \varrho^2 - r^2}$$

hier das Zeichen — weil

$$\pi < r\cos(r\pi)$$

$$\zeta = z - \pi\cos\gamma\,.\quad\ldots(8)$$

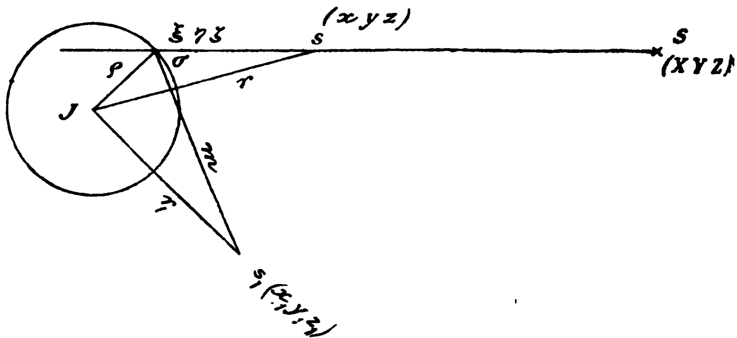
Durch (8) wird ζ bestimmt, wenn ϱ bekannt ist, was auch annähernd wahr ist. Da man also den Wert von ζ sehr nahe kennt, kann man über das Zeichen in der letzten Gleichung (7) beurtheilen.

Das System (7) giebt ξ η und ζ ohne Kenntniss von ϱ. Die dritte Gleichung (7) kann für numerische Rechnung nach den gewöhnlichen Metoden, um Gleichungen zweiten Grades zu berechnen, bequem gemacht werden.

ϱ wird durch eine der folgenden Gleichungen bestimmt:

$$\left.\begin{aligned}\varrho^2 &= m^2 - r_1^2 + 2(\xi x_1 + \eta y_1 + \zeta z_1)\\ \varrho^2 &= \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2\,.\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots(9)$$

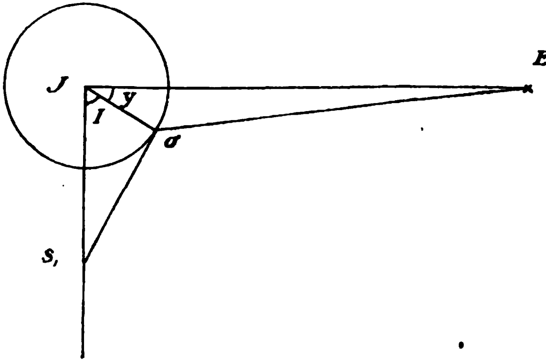
Fig. 1.



Während der Beobachtung soll s_1 so liegen dass r_1 nahe senkrecht gegen den Geraden ist, der durch J und E (Erde) geht, so dass man nicht m in Verkürzung sieht und der Beobachtungsfehler nachher vergrössert wird.

Wir haben jetzt zu untersuchen wo auf Jupiter der Schatten liegen muss, damit die Beobachtungen gute Resultate geben sollen.

Fig. 2.



Hier nehmen wir der Einfachkeit wegen an, dass s_1 J E und σ in einer Ebene liegen.

$$\wedge\, s_1JE \text{ und } s_1\sigma E \text{ aprox. } 90^\circ$$

$$\wedge\, s_1J\sigma = I \text{ und } \wedge\, \sigma JE = y\,.$$

Je grösser y ist je näher am Rande liegt der Schatten und, da $\wedge\, JE\sigma$ immer sehr klein ist so, liegt der Schatten am Rande der Jupitersscheibe von der Erde gesehen, wenn $y = 90^\circ$. Da σ gut beobachtet werden kann auch sehr nahe am Rande (was ich gefunden habe) müssen die Beobachtungen angefangen werden können, wenigstens wenn $y = 60^\circ$ d. h. $I = 30^\circ$.

Fig. 1. giebt

$$m^2 = \varrho^2 + r_1^2 - 2r_1\varrho \cos I$$

also

$$d\varrho = \frac{\varrho \cos I - r_1}{\varrho - r_1 \cos I} dr_1$$

oder wenn wir setzen

$$r_1 = a \cdot \varrho \qquad\qquad a > 1$$

$$d\varrho = \frac{\cos I - a}{1 - a \cos I} dr_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

welche Gleichung die Änderung von ϱ mit r_1 giebt

1:o) $I = 0$.

Wir bekommen dann

$$d\varrho = dr_1$$

ein Fehler in r_1 bewirkt also einen gleichgrossen Fehler in ϱ.

2:o) $I = 90°$

die Gleichung (10) giebt

$$d\varrho = - a dr_1$$

d. h. ein Fehler in r_1 bewirkt einen a Mal so grossen Fehler in ϱ.

Für $\cos I = \frac{1}{a}$ wird $\frac{\cos I - a}{1 - a \cos I} = \infty$ welches, wenn a nicht zu klein angenommen wird, in der Nähe von $I = 90°$ eintrifft.

Die Beobachtungen um ϱ zu bestimmen müssen also ausgeführt werden, wenn der Schatten nicht zu weit vom Rande liegt, und da der Schatten auch in der Nähe vom Rande ganz scharf ist, so kann dies nicht für die Güte der Beobachtung nachteilig sein. Wenn I nahe 90° ist, sehen wir, dass ein Fehler in ϱ einen viel kleineren Fehler in r_1 bewirkt, also geben Beobachtungen in der Nähe von der Mitte der Scheibe eine gute Bestimmung von r_1.

Um zu untersuchen, wie Fehler in m und ϱ auf einander einwirken, schreiben wir

$$d\varrho = \frac{\sqrt{1 + a^2 - 2a \cos I}}{1 - a \cos I} dm$$

für $I = 0°$ $d\varrho = dm$; für $I = 60°$ (und $a = 25$) $d\varrho = - 2dm$ approx. Wenn $\cos I = \frac{1}{a}$ liegt der Schatten nahe an der Mitte der Scheibe.

Zwischen den Änderungen von r_1 und m besteht folgende Relation

$$dr_1 = \frac{\sqrt{1 + a^2 - 2a \cos I}}{a - \cos I} dm ,$$

welche giebt wenn $I = 90^\circ$

$$dr_1 = \frac{\sqrt{1 + a^2}}{a} dm .$$

Beobachtungsfehler werden also sowohl bei Bestimmung von ϱ wie von r_1 vergrössert, aber nicht in hohem Grade. Da die Beobachtungen in Rektascention so wie in Deklination mit Fadenmikrometer ausgeführt werden können, werden aber die Beobachtungsfehler klein und daher auch der Fehler des Resultats klein. Für diese Bestimmung ist es nicht Vortheilhaft σs statt m zu messen, weil besonders in der Nähe von der Opposition $\wedge E\sigma s$ sehr klein ist, und daher die Beobachtungsfehler sehr viel vergrössert werden.

Um ξ η und ζ zu bestimmen kann man auch, vielleicht besser, folgendes System, welches viel einfacher ist, anwenden

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x - \pi \cos \alpha \\ \eta &= y - \pi \cos \beta \\ \zeta &= z - \pi \cos \gamma \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (11)$$

wo π nach (8) durch successive Annäherungen bestimmt wird.

Nachdem ein ϱ_φ (Colatitud φ) bestimmt ist, muss man daraus ϱ_0 (Äquatorsradius) bestimmen. Wenn wir die x-Achse des Koordinatsystemes im aufsteigenden Knoten vom Jupitersäquator auf die xy-Ebene legen, haben wir:

$$\begin{aligned} \xi &= \varrho \cos \beta \cos \lambda \\ \eta &= \varrho \cos \beta \sin \lambda \\ \zeta &= \varrho \sin \beta . \end{aligned}$$

Wenn wir weiter mit φ den Abstand vom Jupiters Pol (P) bis zum Schatten (σ) bezeichnen, so ergiebt sich

Fig. 3.

$$\cos\varphi = \cos\varepsilon \sin\beta - \sin\varepsilon \cos\beta \sin\lambda$$

aus welcher Gleichung φ bestimmt wird.

Fig. 4.

$$\frac{\rho_\varphi^2 \sin^2\varphi}{\rho_0^2} + \frac{\rho_\varphi^2 \cos^2\varphi}{\rho_p^2} = 1.$$

Abplattung $\alpha = \frac{\rho_0 - \rho_p}{\rho_0}$

also

$$\frac{\sin^2\varphi}{\rho_0^2} + \frac{\cos^2\varphi}{\rho_0^2(1-\alpha)^2} = \frac{1}{\rho_\varphi^2}$$

$$\therefore \rho_0 = \rho_\varphi \cdot \frac{\sqrt{1-\alpha(2-\alpha)\sin^2\varphi}}{1-\alpha}.$$

Hier ist angenommen, dass der Jupiter ein Rotationsellipsoid ist.

Wir haben noch den grössten Abstand vom Jupitersekvator, wo ein Schatten fallen kann, zu bestimmen.

Fig. 5.

$$\frac{\sin \tau}{\sin (v + \varepsilon)} = \frac{r}{R_1}; \quad \frac{\varrho}{R_1 + \pi} = \frac{\sin \tau}{\sin (\omega + \varepsilon)}$$

$$\therefore \sin (\omega + \varepsilon) = \frac{R_1 + \pi}{\varrho} \cdot \frac{r}{R_1} \cdot \sin (v + \varepsilon)$$

$$\therefore \sin (\omega + \varepsilon) = \frac{r}{\varrho} \left(1 + \frac{\pi}{R_1}\right) \sin (v + \varepsilon)$$

oder annähernd

$$\sin (\omega + \varepsilon) = \frac{r}{\varrho} \sin (v + \varepsilon) .$$

Für die verschiedenen Satelliten bekommt man hieraus die gesuchten grössten Abstände approx.

	I.	II.	III.	IV.
$\omega - v =$	16°	26°	44°	90°.

Natürlich können aber Beobachtungen bei diesen Grenzlagen des Schattens nicht mit gutem Erfolge ausgeführt werden, da der Schatten dann so schief fällt, dass er nicht gut definiirt sein kann. Wir sehen doch, dass Beobachtungen auf beträchtig verschiedene Latituden ausgeführt werden können.

Da die x-Achse unseres Koordinatensystemes nicht durch den Frühlingspunkt geht, müssen die Koordinaten, die angewandt werden, zuerst auf unseres System reduzirt werden.

Wir wollen noch den Einfluss eines Fehlers in I auf die Bestimmung von ϱ untersuchen und gehen von der Gleichung

$$\varrho^2 = m^2 - r_1^2 + 2\varrho r_1 \cos I$$

aus, also

$$\frac{d\varrho}{\varrho} = \frac{r_1 \cos I}{\varrho - r_1 \cos I} \cdot \frac{d \cos I}{\cos I}$$

setzen wir z. B.

$$r_1 = 24\varrho ; \ \cos I = 30^\circ ; \ dI = 10' ; \ \varrho = 40''$$

wird

$$d\varrho = 0'',071 .$$

Wir sehen also, dass auch mit recht grossen Fehlern in I man gute Werte von ϱ bekommen kann. Ein Fehler in der

Longitude des Satellitens hat dagegen eine grosse Einwirkung auf I; sollte diese Kvantitet nicht genügend genau bestimmt werden können, kann man folgendermassen verfahren. Wenn der Schatten auf der Mitte der Scheibe fällt, kann man I gleichzeitig mit r_1 bestimmen und mit diesem Werte von I, kann man für naheliegende Zeiten die Werte von I durch Extrapolation verbessern.

Wir haben noch zu zeigen wie man m aus den Beobachtungen erhält. Wir nehmen an, dass die Beobachtungen wegen Refraktion etc. korrigirt sind und nennen die so reduzirten Beobachtungen $d\alpha$ und $d\delta$.

$$(d\alpha \cos \delta)^2 + (d\delta)^2 = \omega^2$$

wo ω der Winkel ist, unter welchem m von Centrum der Erde aus gesehen wird.

$$d\alpha \cos \delta \sqrt{1 + \left(\frac{d\delta}{d\alpha \cdot \cos \delta}\right)^2} = \omega$$

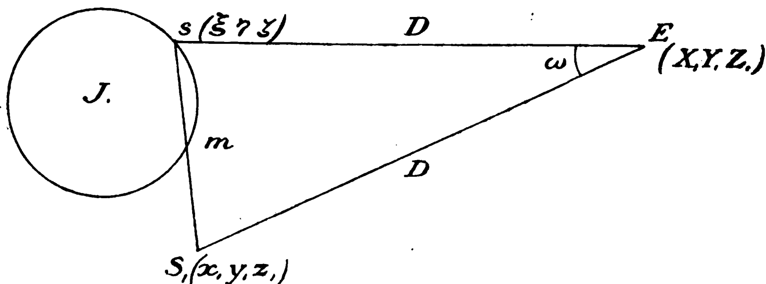
oder

$$\frac{d\alpha \cos \delta}{\cos p} = \omega \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12)$$

wo

$$\frac{d\delta}{d\alpha \cos \delta} = \operatorname{tg} p$$

Fig. 6.



$$D^2 = (X_1 - \xi)^2 + (Y_1 - \eta)^2 + (Z_1 - \zeta)^2$$
$$D_1^2 = (X_1 - x_1)^2 + (Y_1 - y_1)^2 + (Z_1 - z_1)^2$$

$$m^2 = D^2 + D_1^2 - 2DD_1 \cos\omega$$

$$\therefore m^2 = (D - D_1)^2 + 4DD_1 \sin^2 \tfrac{1}{2}\omega$$

$$\therefore m = \frac{D - D_1}{\cos q} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (13)$$

wo

$$\mathrm{tg}^2 q = \frac{4DD_1}{(D - D_1)^2} \sin^2 \tfrac{1}{2}\omega$$

da $\xi\eta\zeta$ aus m berechnet werden und D aus $\xi\eta\zeta$, müssen wir als erste Annäherung

$$m = 2D_1 \sin \tfrac{1}{2}\omega$$

oder

$$m = D_1 \omega \sin 1'' \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (14)$$

setzen, was möglich ist, da die Beobachtungen ausgeführt werden sollen, wenn σE nahe senkrecht zu σs_1 ist.

Da ich noch keine Beobachtungen habe um ϱ zu bestimmen, habe ich es nicht angemessen gefunden in Detail alle Formeln anzugeben die für die Reduktionen nötig sind; hoffe aber später, wenn Beobachtungsmaterial vorhanden ist, Gelegenheit zu haben, näheres darüber zu erörtern.



ÖFVERSIGT AF K. SV. VET.-AKAD. FÖRHANDL. 1898. N:o 9.

MEDDELANDEN

FRÅN

LUNDS ASTRONOMISKA OBSERVATORIUM

N:o 3.

UEBER AKROMATISCHE LINSENSYSTEME AUS EINER GLASSORTE

VON

C. V. L. CHARLIER

MITGETEILT DEN 9 NOVEMBER 1898

STOCKHOLM
KUNGL. BOKTRYCKERIET. P. A. NORSTEDT & SÖNER
1899

ÖFVERSIGT AF K. SV. VET.-AKAD. FÖRHANDL. 1898. N:o 9.

MEDDELANDEN

FRÅN

LUNDS ASTRONOMISKA OBSERVATORIUM

N:o 3.

UEBER AKROMATISCHE LINSENSYSTEME AUS EINER GLASSORTE

VON

C. V. L. CHARLIER

MITGETEILT DEN 9 NOVEMBER 1898

STOCKHOLM
KUNGL. BOKTRYCKERIET. P. A. NORSTEDT & SÖNER
1899

1. Den folgenden Untersuchungen werde ich die Resultate von GAUSS in seinen »Dioptrische Untersuchungen» zu Grund legen, und ich werde deswegen diese Resultate kurz auseinandersetzen mit den für das Folgende nothwendigen Zusätzen.

Indem wir mit ϱ_0, ϱ_1, ϱ_2 etc. die *Radien* der auf einander folgenden sphærischen Flächen bezeichnen, mit n^0, n', n'' etc. die *Brechungsindices* der Medien, mit t', t'', t''' etc. die *optischen Dicken* derselben, d. h. die Abstände, in der Achse gemessen, zwischen den auf einander folgenden brechenden Flächen durch das entsprechende Brechungsvermögen dividirt, so dass

$$t' = \frac{N' - N^0}{n'}; \quad t'' = \frac{N'' - N'}{n''}, \quad t''' = \frac{N''' - N''}{n'''} \text{ etc.},$$

wo N^0, N' etc. die x-Koordinaten der Scheitel der Flächen bezeichnen, setzen wir weiter mit GAUSS:

$$u^0 = -\frac{n' - n^0}{\varrho_0}; \quad u' = -\frac{n'' - n'}{\varrho_1}; \quad u'' = -\frac{n''' - n''}{\varrho_2} \text{ etc.},$$

so dass u^0, u' etc. die invertirten Werthe der Fokaldistansen der Flächen mit entgegengesetztem Zeichen bedeuten. Dann ist die Lage des (zweiten) Brennpunktes und der zweiten Hauptebene von zwei Grössen g und k abhängig, die durch folgende Rekursionsformeln bestimmt sind:

$$(1)\quad \begin{cases} k_0 = 0\,, \quad g_0 = 1 \\ k_s = u^0 + u' g_1 + u'' g_2 + \ldots + u^{(s-1)} g_{s-1} \\ g_s = 1 + t' k_1 + t'' k_2 + \ldots + t^{(s)} k_s\,, \end{cases}$$

oder

$$(1^*)\quad \begin{cases} k_s = k_{s-1} + u^{(s-1)} g_{s-1} \\ g_s = g_{s-1} + t^{(s)} k_s\,. \end{cases}$$

Die x-Koordinaten des Brennpunktes (F) und des zweiten Hauptpunktes (E) sind durch die folgenden Ausdrücke bestimmt:

$$(2)\quad \begin{cases} F - N = -\dfrac{g}{k} \\ E - N = \dfrac{1-g}{k}\,, \end{cases}$$

und also

$$(2^*)\quad F - E = -\frac{1}{k}.$$

Die letzte Formel bestimmt die sogenannte Brennweite, so dass k ist dem invertirten Werthe der Brennweite mit entgegengesetztem Zeichen gleich. Nehmen wir also die Brennweite des gesammten Systems als Einheit für die Längen an, so ist

$$(3)\quad k = -1\,.$$

2. Die obigen Formeln gelten für das Licht von einer bestimmten Farbe, sei es die D-Linie. Nehmen wir einen Strahl von einer anderen Wellenlänge in Betracht, so erleiden die Grössen k und g, und somit auch die Lage des Brennpunktes und des zweiten Hauptpunktes kleine Veränderungen. Die Veränderungen, die bei dem Übergang von einer Wellenlänge zu einer anderen hervorgerufen werden, wollen wir mit dem Zeichen $\varDelta$ andeuten. Wir haben dann

$$(4)\quad \begin{cases} \varDelta u^{(r)} = A_r u^{(r)} \\ \varDelta t^{(r)} = -\dfrac{\varDelta n^{(r)}}{n^{(r)}}\, t^{(r)}\,, \end{cases}$$

wo

$$(4^*)\quad A_r = \frac{\varDelta n^{(r+1)} - \varDelta n^{(r)}}{n^{(r+1)} - n^{(r)}}\,.$$

3. Soll die Brennweite des Systems bei einer Veränderung $\Delta\lambda$ der Wellenlänge des Lichtes unverändert bleiben, so muss nach (2*)

$$\Delta k = 0 .$$

Aus der Formel (2) folgt weiter, dass, wenn die Gleichung $\Delta k = 0$ erfüllt ist, so wird

$$\Delta g = 0$$

die Bedingung dafür sein, dass der zweite Hauptpunkt des Linsensystems bei der betreffenden Veränderung in dem Brechungsvermögen des Lichtes seine Lage nicht verändert.

Nun ist aber — wenn man von dem Einfluss der Farbe auf die anderen Bildfehler, die s. g. sphærischen Abweichungen, absieht — die Bedingungen für ein *akromatisches* Bild *erstens*, dass die Brennweiten der Strahlen von der Farbe unabhängig sind, und *zweitens*, dass dies ebenfalls mit der Lage des zweiten Hauptpunktes der Fall ist. Wenn diese Bedingungen erfüllt sind, so wird das Bild *vollkommen* akromatisch. Ein Linsensystem, das wirklich solche Bilden erzeugt, lässt sich auch in der That konstruiren, wie im Folgenden bewiesen werden wird. Im Allgemeinen muss man sich damit begnügen, dass die Brennpunkte und die zweiten Hauptpunkte für *zwei* Farben zusammenfallen. Die Bedingung dafür lautet

$$\Delta k = \Delta g = 0$$
$$k = -1 .$$

Soll das Linsensystem ein *vollkommen* akromatisches Bild erzeugen, so müssen diese Gleichungen für *alle* Farben identisch erfüllt sein.

4. Würde das Linsensystem aus getrennten Linsen in der Luft bestehen, so wäre nach (4*)

$$A_0 = A_1 ; \quad A_2 = A_3 ; \text{ etc.,}$$

und wenn wir also setzen

$$\left\{\begin{array}{l} x = u^0 + u' , \\ y = u'' + u''' , \\ z = u^{IV} + u^V , \end{array}\right. \tag{5}$$

etc.,

so bekommt man:

$$(6)\qquad \begin{cases} \Delta x = Ax\,, \\ \Delta y = By\,, \\ \Delta z = Cz\,, \end{cases}$$
etc.,

wo

$$(7)\qquad \begin{cases} A = \dfrac{\Delta n'}{n' - 1}\,, \\ B = \dfrac{\Delta n'''}{n''' - 1}\,, \\ C = \dfrac{\Delta n^{\mathrm{V}}}{n^{\mathrm{V}} - 1}\,. \end{cases}$$
etc.

Die Grössen x, y, z etc. bezeichnen offenbar die invertirten Brennweiten der 1sten, 2ten, 3ten etc. Linse, mit entgegengesetztem Zeichen, wobei man von der Dicke der Linsen abgesehen hat.

5. *Zwei Linsen mit kleinem Abstande.* Gewöhnlich muss man sich in der Optik damit begnügen, dass die Brennweiten und die zweiten Hauptpunkte für *zwei* Farben zusammenfallen. Dies lässt sich bekanntlich schon mit zwei Linsen erreichen, und zwar erhält man hierfür die Bedingungsgleichungen:

$$(8)\qquad \begin{cases} k = -1 = x + y + h_1 \\ \Delta k = 0 = Ax + By + h_2 \\ \Delta g = 0\,, \end{cases}$$

wo h_1 und h_2 Glieder, die mit den Dicken der Linsen und dem Abstand multiplicirt sind, enthalten. Die dritte Gleichung ($\Delta g = 0$) lässt sich durch geeignete Wahl der Dicken der Linsen und des Abstandes zwischen denselben erfüllen. Wir werden uns augenblicklich nicht mit derselben beschäftigen. Aus den zwei ersten Gleichungen erhält man in der ersten Annäherung

$$-1 = x + y$$
$$0 = Ax + By\,,$$

also

$$(9)\qquad x = \frac{B}{A - B}\,; \quad y = -\frac{A}{A - B}\,,$$

nach welchen Formeln die Brennweiten der Linsen eines zweilinsigen akromatischen Objektivs gewöhnlich gerechnet werden.

6. *Zwei Linsen mit endlichem Abstande.* Ist der Abstand zwischen den beiden Linsen des Objektives gross, so geben die durch die Formel (9) berechneten Zahlen keine Annäherung zu dem wirklichen Werth der Brennweiten. Es lässt sich in diesem Falle überhaupt nicht ein akromatisches Objektiv konstruiren, ohne dass man sich solcher Linsen bedient, deren Dicken von derselben Grössenordnung sind wie der Abstand der Linsen. Wenn man indessen die Unveränderlichkeit der Lage des zweiten Hauptpunktes für verschieden gefärbter Strahlen aufgiebt, und nur den Werth der Brennweite in Betracht zieht, so lässt sich auch in diesem Fall ein akromatisches Linsensystem aus zwei Linsen darstellen.

Wenn wir in der ersten Annäherung die Dicken der beiden Linsen vernachlässigen, so erhält man zur Bestimmung von x und y, indem mit t der Abstand zwischen der Linsen bezeichnet wird, die Gleichungen:

(10) $$\begin{cases} -1 = x + y + txy \\ \;\;\,0 = Ax + By + txy(A + B) . \end{cases}$$

Aus dieser Gleichung folgt, wenn man die erste mit $A + B$ multiplicirt und von der zweiten subtrahirt:

$$A + B = -Bx - Ay .$$

Wird aus dieser Gleichung y in die erste Gleichung (10) eingesetzt, so erhält man folgende Formel zur Bestimmung von x

$$x^2 + x\left[\frac{1}{t}\left(1 - \frac{A}{B}\right) + \frac{A}{B} + 1\right] + \frac{1}{t} = 0 .$$

Besonders einfach gestaltet sich diese Formel, wenn man $A = B$ setzt, also die Linsen aus *derselben* Glassorte annimmt. Es wird dann:

(11) $$x = -1 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{t}} .$$

Diese Gleichung zeigt, dass wenn $t > 1$ angenommen wird, sich aus *einer einzigen* Glassorte ein akromatisches Linsensystem aufbauen lässt. Man findet weiter dass, da in diesem Falle ($A = B$) die zweite Bedingungsgleichung (10) von der Farbe vollständig unabhängig ist, so wird das Linsensystem nicht nur für zwei Farben akromatisirt sein, sondern für *alle* Farben.

Hier ist aber zu beachten 1) dass das so erhaltene Linsensystem eine negative Vereinigungsweite hat, d. h. dass parallel einfallende Strahlen ein virtuelles Bild geben, und dass somit ein solches Linsensystem zwar als Okular, nicht aber als Objektiv benutzt werden kann; 2) dass die Gleichung $\Delta g = 0$ nicht erfüllt werden kann, dass also die ausgehenden Strahlen von verschiedener Farbe zwar *parallel sind*, nicht aber in einem Punkte vereinigt werden.

Von dieser Art ist z. B. das nach HUYGENS genannte Okular.

7. *Eine beliebige Zahl von Linsen auf kleinen Abständen.* Ganz analog wie man aus zwei Linsen ein akromatisches Fernrohr bauen kann, bei dem *zwei* Farben zu einem Bild vereinigt werden, so kann man *teoretisch* mit Hülfe von n Linsen die Strahlen von n verschiedenen Wellenlängen in einem Fokus vereinigen. *Praktisch* stellt sich aber die Sache bedeutend anders in Folge der Eigenschaften der bis jetzt fabricirten Gläser. Betrachten wir z. B. drei Linsen, mit den Zerstreuungen A_1, B_1, C_1 für eine Farbe, A_2, B_2 und C_2 für eine andere, so sind die Gleichungen für die Einhaltung der Brennweiten die folgenden

$$(12) \qquad \begin{cases} -1 = x + y + z + h_1 \\ 0 = A_1 x + B_1 y + C_1 z + h_2 \\ 0 = A_2 x + B_2 y + C_2 z + h_3 , \end{cases}$$

wo h_1, h_2 und h_3 mit den Dicken der Linsen und mit den Abständen multiplicirte Glieder enthalten. In der ersten Annäherung setzt man nun $h_1 = h_2 = h_3 = 0$. Die drei obigen Gleichungen geben nun bestimmte Werthe von x, y und z unter einer *Voraussetzung, dass nämlich die Determinante:*

$$\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1 \\ A_1, & B_1, & C_1 \\ A_2, & B_2, & C_2 \end{vmatrix},$$

welche wir kurzweg mit Δ bezeichnen wollen, *von Null verschieden ist.* Nun ist aber im Allgemeinen dem nicht so. Nimmt man beliebig drei verschiedene Glassorten in Betracht, so wird in 9 Fällen von 10 die genannte Determinante nur sehr wenig von *Null* verschieden sein. Zwar lassen sich solche Kombinationen finden, für welche Δ einen von Null verschiedenen Werth erhält. Es lässt sich aber zur Zeit nicht entscheiden, ob man hier mit zufälligen Fehlern in der Bestimmung der Brechungsvermögen der Linsen zu thun hat, oder ob man wirklich zu einer Lösung der Gleichungen (12) gekommen ist.

Es hilft hier nicht die Zahl der Linsen zu vermehren, da man jedesmal die Untersuchung matematisch auf ein dreilinsiges System zurückführen kann.

8. *Eine beliebige Zahl von Linsen auf endlichen Abständen.* Indem wir mit Δ_1 und Δ_2 die durch die Dispersion in *zwei verschiedenen Stellen des Spektrums* hervorgebrachte Veränderung einer Grösse bezeichnen, so sind die Bedingungen dafür, dass die Brennweite und der zweite Hauptpunkt für *drei* verschiedene Strahlen unverändert bleiben, durch die folgenden 5 Gleichungen gegeben:

$$(13) \qquad 1 + k = 0 = \Delta_1 k = \Delta_2 k = \Delta_1 g = \Delta_2 g\,.$$

Wir werden die Lösung dieser Gleichungen in dem Falle, betrachten, dass es sich um *drei* Linsen auf endlichen Abständen handelt.

Bezeichnen wir nun mit ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4 und ψ_5 diejenigen Theile dieser Gleichungen, die mit der Dicke der Linsen verschwinden, welche Theile also nach unserer Voraussetzung als kleine Grössen betrachtet werden können; und sind φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 und φ_5 der übrige Theil von den fünf Gleichungen, so dass

$$\begin{aligned}1 + k &= \varphi_1 + \psi_1 \\ \Delta_1 k &= \varphi_2 + \psi_2 \\ \Delta_2 k &= \varphi_3 + \psi_3 \\ \Delta_1 g &= \varphi_4 + \psi_4 \\ \Delta_2 g &= \varphi_5 + \psi_5 ,\end{aligned}$$

so können wir die Grössen φ als Funktionen von x, y, z, t'' und t^{IV} betrachten, und in der ersten Annäherung haben wir die Gleichungen

(14) $$0 = \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4 = \varphi_5$$

zu untersuchen.

Setzen wir

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= A_1 x + B_1 y + t''xy(A_1 + B_1) \\ \Omega_2 &= A_2 x + B_2 y + t''xy(A_2 + B_2) \\ g &= 1 + t''x + t^{IV}(x + y + t''xy) ,\end{aligned}$$

so lauten die Gleichungen (14)

(15) $$\begin{cases} -1 = x + y + t''xy + zg \\ 0 = \Omega_1 + C_1 zg \\ 0 = \Omega_2 + C_2 zg \\ 0 = t''A_1 x + t^{IV}\Omega_1 \\ 0 = t''A_2 x + t^{IV}\Omega_2 . \end{cases}$$

Aus der 4ten und 5ten Gleichung folgt:

(16) $$C_2 A_1 - C_1 A_2 = 0 ,$$

und aus der 2ten und 3ten:

(17) $$C_2 \Omega_1 - C_1 \Omega_2 = 0 .$$

Setzt man die Werthe von Ω_1 und Ω_2 in die letztere Gleichung ein, so bekommt man unter Berücksichtigung von (16):

(17*) $$0 = (C_2 B_1 - C_1 B_2) y (1 + t''x) .$$

Einer von den Faktoren rechter Hand muss also gleich Null sein, und wir bekommen drei verschiedene Lösungen, von denen wir zuerst

(18) $$0 = C_2 B_1 - C_1 B_2$$

betrachten wollen.

Die Gleichungen (16) und (18) geben

(19) $$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2},$$

d. h. die Dispersionen in verschiedenen Theilen des Spektrums müssen für die drei Linsen proportional sein. Nun hat man aber bis jetzt keine solchen Gläser gefunden, und die einzige Methode, in der die Gleichungen (19) erfüllt werden können, ist die drei Glassorten identisch zu wählen. Wir setzen also

$$A_1 = B_1 = C_1$$
$$A_2 = B_2 = C_2 .$$

Betrachten wir aber die Gleichungen (15), so findet man, dass in diesem Falle die zweite und dritte Gleichung mit einander zusammenfallen, und ebenso die 4te und 5te. Wir haben also nunmehr nur drei Gleichungen zu befriedigen.

Nehmen wir hier auch die Dicken der Linsen in Betracht, so werden wir zu den drei Gleichungen

(20) $$\begin{cases} 0 = \varphi_1 + \psi_1 \\ 0 = \varphi_2 + \psi_2 \\ 0 = \varphi_3 + \psi_3 , \end{cases}$$

wo ψ_1, ψ_2 und ψ_3 die mit den Dicken der Linsen multiplicirten Glieder enthalten.[1]) Die Grössen ψ sind von den sechs Radien der brechenden Flächen, von den Brechungsindices und von den Dicken der Linsen abhängig. Die Grössen φ dagegen hängen nur von der Brennweiten — oder was auf dasselbe hinauskommt von den Grössen x, y und z — ab und ausserdem von den Abständen t'' und t^{IV} zwischen den Linsen.

Um die Gleichungen (20) zu befriedigen setzen wir

(21) $$\begin{cases} x = x_0 + \delta x \\ y = y_0 + \delta y \\ z = z_0 + \delta z , \end{cases}$$

und setzen dann:

(22) $$\begin{cases} \varphi_1(x_0 , y_0 , z_0) = 0 \\ \varphi_2(x_0 , y_0 , z_0) = 0 \\ \varphi_3(x_0 , y_0 , z_0) = 0 . \end{cases}$$

[1]) Die Funktionen φ und ψ sind natürlich jetzt nicht mit den in Formel (14) vorkommenden identisch.

Zur Bestimmung von δx, δy und δz bekommen wir dann die Gleichungen

$$(23)\quad \begin{cases} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\delta z + \psi_1 = 0 \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\varphi_2}{\partial z}\delta z + \psi_2 = 0 \\ \frac{\partial\varphi_3}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\varphi_3}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\varphi_3}{\partial z}\delta z + \psi_3 = 0\,, \end{cases}$$

und ich bemerke hier gleich, dass diese Gleichungen nur dann zu einer Bestimmung von δx, δy und δz führen können, wenn die Funktionaldeterminante von φ von Null verschieden ist.

Nach (15) haben die Gleichungen (22) folgende Form:

$$(24)\quad \begin{cases} -1 = x_0 + y_0 + t''x_0y_0 + z_0g_0 \\ 0 = x_0 + y_0 + 2t''x_0y_0 + z_0g_0 \\ 0 = t''x_0 + t^{IV}(x_0 + y_0 + 2t''x_0y_0) \\ g_0 = 1 + t''x_0 + t^{IV}(x_0 + y_0 + t''x_0y_0)\,. \end{cases}$$

Aus der ersten und der zweiten Gleichung erhält man

$$(25)\qquad 1 = t''x_0y_0\,,$$

wodurch aus der 3ten Gleichung

$$0 = (t'' + t^{IV})x_0 + t^{IV}y_0 + 2t^{IV}\,.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit x_0, bekommt man unter Berücksichtigung von (25):

$$0 = (t'' + t^{IV})x_0^2 + \frac{t^{IV}}{t''} + 2t^{IV}x_0\,,$$

also

$$(26)\qquad (t'' + t^{IV})x_0 = t^{IV}\left[-1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{1}{t''} + \frac{1}{t^{IV}}\right)}\right].$$

Hieraus erhält man weiter

$$y_0 = -1 \mp \sqrt{1 - \left(\frac{1}{t''} + \frac{1}{t^{IV}}\right)}$$

$$(t'' + t^{IV})z_0 = \frac{t''}{1 - t^{IV}}\left[-1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{1}{t''} + \frac{1}{t^{IV}}\right)}\right]$$

und für g_0 bekommt man den Werth:

(27) $$g_0 = 1 - t^{IV}.$$

Aus den Werthen für x_0, y_0, z_0 ist es ersichtlich, dass man immer reelle Werthe für die Brennweiten bekommt, so oft die Ungleichheit

(28) $$\frac{1}{t''} + \frac{1}{t^{IV}} \leqq 1$$

erfüllt ist. Es erübrigt noch zu untersuchen, ob die Variationsgleichungen (23) auch zu bestimmten Werthen für δx, δy und δz führen, was offenbar immer der Fall ist, wenn die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}, & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}, & \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial x}, & \frac{\partial \varphi_3}{\partial y}, & \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} \end{vmatrix}$$

einen von Null verschiedenen Werth hat. Um diese Determinante zu berechnen, setzen wir

$$\Omega = x_0 + y_0 + 2t''x_0y_0,$$

und bekommen dann:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 1 + \Omega - t''x_0y_0 + z_0g_0 \\ \varphi_2 &= \Omega + z_0g_0 \\ \varphi_3 &= t''x_0 + t^{IV}\Omega. \end{aligned}$$

Die Determinante Δ hat also folgende Form

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \Omega}{\partial x_0} - t''y_0 + z_0\frac{\partial g}{\partial x_0}, & \frac{\partial \Omega}{\partial y_0} - t''x_0 + z_0\frac{\partial g}{\partial y_0}, & g_0 \\ \frac{\partial \Omega}{\partial x_0} + z_0\frac{\partial g}{\partial x_0}, & \frac{\partial \Omega}{\partial y_0} + z_0\frac{\partial g}{\partial y_0}, & g_0 \\ t'' + t^{IV}\frac{\partial \Omega}{\partial x_0}, & t^{IV}\frac{\partial \Omega}{\partial y_0}, & 0 \end{vmatrix}.$$

Wird die erste Reihe von der zweiten subtrahirt, erhalten wir

$$\varDelta = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Omega}{\partial x_0} - t''y_0 + z_0 \frac{\partial g}{\partial x_0}, & \frac{\partial \Omega}{\partial y_0} - t''x_0 + z_0 \frac{\partial g}{\partial y_0}, & g_0 \\ t''y_0, & t''x_0, & 0 \\ t'' + t^{IV} \frac{\partial \Omega}{\partial x_0}, & t^{IV} \frac{\partial \Omega}{\partial y_0}, & 0 \end{vmatrix}$$

$$= g_0 \begin{vmatrix} t''y_0, & t''x_0 \\ t'' + t^{IV} \frac{\partial \Omega}{\partial x_0}, & t^{IV} \frac{\partial \Omega}{\partial y_0} \end{vmatrix}.$$

Nun ist aber:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_0} = 1 + 2t''y_0$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial y_0} = 1 + 2t''x_0,$$

und mithin

$$x_0 \frac{\partial \Omega}{\partial x_0} - y_0 \frac{\partial \Omega}{\partial y_0} = x_0 - y_0.$$

Es wird also

$$\varDelta = g_0[t''t^{IV}(y_0 - x_0) - t''t''x_0],$$

oder

$$\varDelta = g_0 t''[t^{IV}y_0 - (t^{IV} + t'')x_0],$$

und also nach (26)

(29) $$\varDelta = \mp 2g_0 t''t^{IV} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{t''} + \frac{1}{t^{IV}}\right)};$$

in welcher Formel wir nach (27) den Werth

$$g_0 = 1 - t^{IV}$$

einzusetzen haben.

Setzen wir also voraus, dass die Gleichung

(30) $$\frac{1}{t''} + \frac{1}{t^{IV}} < 1$$

erfüllt ist, so muss $\varDelta$ immer von Null verschieden sein, und man kann dann immer die Korrektionen δx, δy, δz berechnen, die von den Dicken der Linsen abhängig sind.

Es ist also möglich aus drei Linsen von einer Glassorte ein akromatisches Linsensystem zu berechnen. Und zwar muss man hierbei bemerken, dass das so erhaltene Linsensystem nicht nur für *drei* Farben akromatisirt ist, sondern für *alle* Farben, dass also das so genannte *sekundäre Spektrum vollständig verschwindet.* In der That sind nämlich die Gleichungen (24), von denen wir ausgegangen sind, von der Wellenlänge vollständig unabhängig. Wenn dieselben überhaupt befriedigt sind, so müssen die Brennweiten und die (zweiten) Hauptpunkte für *alle* Farben zusammenfallen.

In einer Beziehung, und zwar einer sehr wichtigen, erleiden aber die erhaltenen Resultate eine Beschränkung. Aus der Formel (27) für g_0 folgt nämlich, wenn man dieselbe mit den Formeln (2) und (3) vergleicht, dass man für den Abstand des Brennpunktes von der letzten brechenden Fläche, d. h. für die *Vereinigungsweite*, folgenden Ausdruck erhält:

(31) $$F - N = g = 1 - t^{IV}.$$

Nun ist aber nach (30) t^{IV} immer grösser als Eins, und folglich muss die *Vereinigungsweite immer negativ sein.* Hieraus folgt aber, dass man das Linsensystem nicht als *Objektiv* benutzen kann.

Wohl aber ist es möglich in dieser Weise sehr vortreffliche *Okulare* zu erhalten; Okulare, die von jedem Fehler in Bezug auf den Akromatismus vollständig befreit sind. Für Spiegelteleskope besonders werden dieselben ganz vorzügliche Dienste leisten können. Ein nach den obigen Formeln berechnetes Okular ist schon von der Firma STEINHEIL & Söhne in München ausgeführt worden. Bis jetzt habe ich keine Gelegenheit gehabt dasselbe, mit einem vollständig akromatisirten Objektivsystem zusammengestellt, zu prüfen.

Nach der Formel (17*) giebt es noch zwei andre Fälle, in denen ein akromatisches System aus drei Linsen erhalten werden kann. Nämlich wenn

(32) $$y = 0$$

oder drittens

(33) $$1 + t''x = 0\,.$$

Die Gleichung (32) führt aber zu keiner anwendbaren Lösung, wie man gleich daraus sehen kann, dass diese Gleichung fordert, dass die zweite Linse eine unendlich grosse Brennweite haben soll, also ein planparalleles Glas sein muss. Übrigens zeigt das Formelsystem (15), dass man in dieser Weise zu Widersprüchen geführt wird.

Die dritte Lösung (33) giebt uns

$$\Omega = Ax + At''xy = A\left[-\frac{1}{t''} - y\right]$$

$$g = t^{\mathrm{IV}}x = -\frac{t^{\mathrm{IV}}}{t''}\,.$$

Setzen wir diese Werthe in (15) hinein, so bekommen wir successive

(34) $$\begin{cases} z = \dfrac{t''}{t^{\mathrm{IV}}}\left(1 - \dfrac{1}{t''}\right) \\ y = -1\,. \end{cases}$$

Man findet nun aber, dass diese Werthe von x, y und z die 4:te und 5:te Gleichung in (15) nicht befriedigen können, wenn die Abstände zwischen den Linsen nicht so gewählt werden, dass folgende Identität stattfindet:

(35) $$0 = \frac{1}{t''} + \frac{1}{t^{\mathrm{IV}}} - 1\,.$$

Wenn aber diese Bedingung erfüllt ist, so geben die nach (33) und (34) berechneten Brennweiten ein Linsensystem, das *genähert* akromatisirt ist. Es zeigt sich indessen, dass man in diesem Fall keine *vollständige* Erfüllung der Bedingungen für den Akromatismus erhalten kann. Dafür ist nämlich erforderlich, dass man die durch das System (23) bestimmten Korrektionen wegen der Dicken der Linsen soll berechnen können. Die Determinante Δ aus den Koefficienten in diesem System wird aber in diesem Falle in Folge der Gleichung (35) gleich Null. wie man sich durch eine kleine Rechnung leicht überzeugen

kann. Es ist also nicht möglich durch die Gleichungen (33) und (34) ein vollständig akromatisches System zu berechnen, wohl aber eine annäherungsweise akromatisirte Linsenkombination, wenn man die Dicken der Linsen hinreichend klein wählt.

Die erste und dritte Linse muss in diesem Falle aus demselben Glas bestehen. Für die mittlere Linse kann die Glassorte beliebig gewählt werden.

Zur Leitung für numerische Rechnung führe ich zuletzt die Werthe von g und k für ein optisches System, aus höchst sechs Flächen bestehend, an. Dieselben sind aus den Gleichungen (1*) successive berechnet. Es wird

$$k_0 = 0$$
$$g_0 = 1$$

$$k_1 = u^0$$
$$g_1 = 1 + t'u^0$$

$$k_2 = u^0 + u'(1 + t'u^0)$$
$$g_2 = 1 + t'u^0 + t''(u^0 + u'(1 + t'u^0))$$

$$k_3 = u^0 + u'(1 + t'u^0) + u''(1 + t'u^0 + t''(u^0 + u'(1 + t'u^0)))$$
$$g_3 = 1 + t'u^0 + t''(u^0 + u'(1 + t'u^0)) +$$
$$+ t'''[u^0 + u'(1 + t'u^0) + u''(1 + t'u^0 + t''(u^0 + u'(1 + t'u_0)))]$$

$$k_4 = u^0 + u'(1 + t'u^0) + u''(1 + t'u^0 + t''(u^0 + u'(1 + t'u^0))) +$$
$$+ u'''[1 + t'u^0 + t''(u^0 + u'(1 + t'u^0)) +$$
$$+ t'''(u^0 + u'(1 + t'u^0) + u''(1 + t'u^0 + t''(u^0 + u'(1 + t'u^0))))]$$
$$g_4 = 1 + t'u^0 + t''(u^0 + u'(1 + t'u^0)) +$$
$$+ t'''[u^0 + u'(1 + t'u^0) + u''(1 + t'u^0 + t''(u^0 + u'(1 + t'u^0)))]$$
$$+ t^{IV}k_4$$

$$k_5 = k_4 + u^{IV}g_4$$
$$g_5 = g_4 + t^{V}k_5$$

$$k_6 = k_5 + u^{V}g_5$$
$$g_6 = g_5 + t^{VI}k_6 .$$

Setzen wir

$$x = u^0 + u' + t'u^0u'$$
$$y = u'' + u''' + t'''u''u'''$$
$$z = u^{IV} + u^V + t^V u^{IV} u^V ,$$

so bekommen wir folgenden Ausdruck für k_6, der unter Umständen von Nutzen sein kann:

$$\begin{aligned} k_6 = x &+ y + z + \\ &+ t'u^0y + t'u^0z + t''xy + t''xz + \\ &+ t'''xu''' + t'''xz + t''u''z + \\ &+ t^{IV}xz + t^{IV}yz + t^V u^V x + t^V u^V y + \\ &+ t'''t'u''u^0z + t'''t''xu''z + \\ &+ t^{IV}t'u^0yz + t^{IV}t''xyz + t^{IV}t'''xu''z + \\ &+ t^V t'u^V u^0 y + t^V t''u^V xy + t^V t'''u^V xu''' . \end{aligned}$$



ÖFVERSIGT AF K. SV. VET.-AKAD. FÖRHANDL. 1899. N:o 2.

M. V. L. ackn v.

MEDDELANDEN

FRÅN

LUNDS ASTRONOMISKA OBSERVATORIUM

N:o 4.

ON THE ELEMENTS OF THE SUN'S ROTATION

BY

C. A. SCHULTZ-STEINHEIL

COMMUNICATED 1899, FEBRUARY 8 BY C. V. L. CHARLIER

STOCKHOLM
KUNGL. BOKTRYCKERIET. P. A. NORSTEDT & SÖNER
1899

ÖFVERSIGT AF K. SV. VET.-AKAD. FÖRHANDL. 1899. N:o 2.

MEDDELANDEN

FRÅN

LUNDS ASTRONOMISKA OBSERVATORIUM

N:o 4.

ON THE ELEMENTS OF THE SUN'S ROTATION

BY

C. A. SCHULTZ-STEINHEIL

COMMUNICATED 1899, FEBRUARY 8 BY C. V. L. CHARLIER

STOCKHOLM
KUNGL. BOKTRYCKERIET. P. A. NORSTEDT & SÖNER
1899

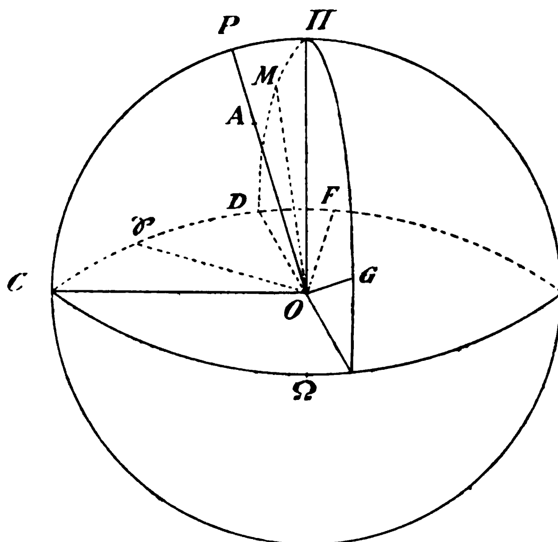
In Astronomische Nachrichten N:o 3543 I have with a rough aproximation shown that, if we make use of DUNÉR's spectroscopical observations of the sun, it is possible to remove the anomalies in the time of rotation of the sun in different latitudes under the supposition that the quantity i determined by SPÖRER and employed by DUNÉR is somewhat inaccurate. Now I have with the aid of DUNÉR's observations determined i and Ω, assuming a uniform rotation of the sun, and found the result satisfactory. On the following pages I will give the details of this calculation.

Let x be the velocity of the sun's true equator in km. per second and

$$y = \sin i \cos \Omega$$
$$z = \sin i \sin \Omega$$

where $i = 7°$ and $\Omega = +75°$. It was my first object to search for the corrections dx, dy and dz. I also got aproximate values of these quantities, but as the formulas employed were only aproximate, I had then to determine the definite values x, y and z, which, however, proved to be impossible. Thence I concluded that the values of i and Ω, with which I began the calculation, were so far remote from the true values, that aproximate formulas were unapplicable. For that reason it was necessary to make the whole calculation once more and determine x, i and Ω with exact formulas, of which I now will give a deduction.

In the fig. O is the centre of the sun, Π the pole of the ecliptic, P the pole of the true sun-equator, Ω the point of intersection of the true sun-equator with the ecliptic, ♈ is the equinoctial point and OF a line in the ecliptic rectangular to O♈. Take $OA = x$ to be the velocity of rotation of a point on the sun-equator round the true sunaxis, this velocity calculated from O along OP. The projection of x on the three



axes OF, O♈ and $O\Pi$ we will denote by r, s and t resp., and we have thus:

$$r = x \sin i \cos \Omega$$
$$s = x \sin i \sin \Omega$$
$$t = x \cos i.$$

The plane ΠOD represents a plane rectangular to the line of sight at the moment of observation, M the point observed, $MO\Pi = p$ the angle which makes M with the axis $O\Pi$. Round an axis OG perpendicular to OM and lying in the plane $DO\Pi$, the point M seems to move with a velocity v_1 which is exactly the observed velocity. If we project x, r, s and t on this line OG, we have:

$$\text{pr. } r + \text{pr. } s + \text{pr. } t = \text{pr. } x$$

or

$$r \cos p \cos \odot + s \cos p \sin \odot + t \sin p = \pm v_1$$

where the upper sign is to be taken, when p is positive. In calculating the coefficients in this equation, $\odot$ (the sun's longitude) is taken from Berliner Jahrbuch, and as the time of observation is not given, I have assumed that the observations are always made at noon. For getting the p:s, which are not published by DUNÉR, I wrote to him, and he kindly sent me the following quantities, which are differences of declination between the point of observation on the east limb of the sun and its centre.

Tab. I.

$\varphi = 15°$		$\varphi = 15°$		$\varphi = 15°$	
1887 June 3	+ 4'	1887 Aug. 6	+ 36"	1888 July 28	+ 143"
3	0	6	+ 38	Aug. 1	+ 61
3	0	1888 May 5	+ 128	3	+ 75
4	0	10	+ 115	3	+ 56
4	0	12	+ 97	4	+ 43
15	0	16	+ 91	7	+ 26
16	0	19	+ 70	7	+ 24
17	+ 339"	19	+ 75	11	0
18	— 109	20	+ 66	12	— 14
18	+ 204	20	+ 72	21	— 56
19	— 119	22	+ 47	1889 May 23	+ 50
24	— 206	22	+ 55	24	+ 43
25	+ 328	23	+ 52	24	+ 44
25	+ 336	24	+ 44	25	+ 45
29	— 202	29	+ 15	28	+ 21
30	— 210	June 6	— 32	June 2	— 9
July 1	— 227	6	— 21	2	— 20
2	— 226	12	— 75	3	— 17
3	— 233	13	— 81	4	— 20
12	+ 228	13	— 82	4	— 20
13	+ 224	20	— 130	5	— 22
14	+ 194	21	— 134	6	— 18
22	+ 145	21	— 136	7	— 40
23	+ 117	22	— 127	7	— 39
23	+ 122	22	— 148	8	— 54
26	+ 48	24	— 161	11	— 64
26	+ 111	24	— 161	13	— 75
27	+ 96	25	— 168	14	— 91
28	+ 97	26	— 178	14	— 89
30	+ 77	27	— 183	15	— 91
30	+ 76	July 16	+ 169	15	— 98
31	+ 73	20	+ 137	16	— 101
Aug. 4	+ 47	20	+ 139	17	— 113
5	+ 37	21	+ 128	18	— 114
5	+ 37	27	+ 94		

Tab. I. (Continued.)

$\varphi = 30°$		$\varphi = 30°$		$\varphi = 45°$	
1887 June 11	+ 240″	1888 June 24	— 396″	1887 June 15	+ 729″
17	— 339	25	— 403	16	+ 732
18	— 349	26	— 407	18	— 565
19	— 361	27	— 416	19	— 570
24	— 384	July 16	+ 408	22	— 582
29	— 435	20	+ 376	24	— 594
30	— 439	20	+ 378	24	— 591
July 1	— 456	21	+ 372	25	+ 770
2	— 458	27	+ 331	25	— 730
3	— 464	28	+ 327	25	+ 737
4	— 474	30	+ 311	29	— 695
12	+ 457	Aug. 1	+ 297	30	— 646
13	+ 442	3	+ 290	July 1	— 654
14	+ 430	3	+ 290	2	— 655
22	+ 368	4	+ 289	3	— 660
23	+ 366	7	+ 269	4	— 668
23	+ 363	7	+ 265	9	+ 654
26	+ 387	9	+ 254	13	+ 650
26	+ 347	11	+ 247	14	+ 678
27	+ 336	12	+ 241	22	+ 587
28	+ 332	12	+ 239	23	+ 577
30	+ 320	13	+ 234	26	+ 555
30	+ 323	20	+ 199	26	+ 551
31	+ 312	20	+ 195	27	+ 559
Aug. 4	+ 290	21	+ 195	28	+ 556
5	+ 289	21	+ 197	30	+ 545
5	+ 282	1889 May 23	— 191	30	+ 547
6	+ 279	24	— 199	31	+ 536
6	+ 281	24	— 198	Aug. 4	+ 514
1888 May 10	— 136	25	— 208	5	+ 511
11	— 136	28	— 226	5	+ 514
12	— 142	June 2	— 249	6	+ 504
16	— 149	2	— 251	6	+ 543
19	— 173	3	— 262	1888 May 5	— 348
19	— 178	4	— 257	10	— 377
20	— 181	4	— 261	11	— 381
20	— 180	5	— 305	12	— 384
22	— 189	6	— 278	16	— 393
22	— 189	7	— 286	16	— 398
23	— 195	7	— 281	19	— 411
24	— 199	8	— 282	19	— 409
24	— 186	11	— 310	20	— 412
29	— 232	13	— 318	20	— 417
June 6	— 275	14	— 330	22	— 428
6	— 276	14	— 331	22	— 430
12	— 314	15	— 336	23	— 427
13	— 322	15	— 321	24	— 434
13	— 323	16	— 345	24	— 431
20	— 384	17	— 349	29	— 462
21	— 376	18	— 359	June 6	— 502
21	— 380			6	— 503
22	— 370			12	— 537
22	— 384			13	— 543
24	— 394			13	— 542

Tab. I. (Continued.)

$\varphi = 45°$		$\varphi = 60°$		$\varphi = 60°$	
1888 June 20	— 578″	1887 June 3	+ 917″	1888 June 6	— 693″
21	— 584	4	— 629	12	— 720
21	— 584	15	+ 860	13	— 723
22	— 593	16	+ 862	13	— 724
22	— 594	17	— 736	20	— 754
24	— 608	17	— 736	21	— 756
24	— 610	18	— 742	21	— 761
25	— 611	19	+ 870	22	— 764
26	— 616	19	— 746	22	— 763
27	— 620	22	— 757	24	— 774
27	— 623	24	— 734	24	— 772
July 16	+ 616	24	— 770	25	— 779
20	+ 595	25	+ 885	26	— 781
20	+ 583	25	— 770	26	— 781
21	+ 560	29	— 796	27	— 784
27	+ 539	30	— 800	16	+ 784
30	+ 536	July 1	— 813	July 20	+ 769
Aug. 1	+ 532	2	— 810	20	+ 769
3	+ 518	3	— 811	21	+ 761
3	+ 520	4	— 815	27	+ 739
4	+ 509	9	+ 812	30	+ 724
4	+ 507	13	+ 807	1	+ 712
7	+ 498	14	+ 791	Aug. 3	+ 706
7	+ 495	20	+ 766	3	+ 706
11	+ 478	22	+ 755	4	+ 701
12	+ 467	23	+ 754	4	+ 699
13	+ 469	26	+ 748	7	+ 696
20	+ 441	26	+ 744	7	+ 690
1889 May 23	— 429	27	+ 742	11	+ 674
24	— 434	28	+ 736	13	+ 669
24	— 433	30	+ 724	23	— 627
25	— 441	30	+ 726	1889 May 24	— 633
June 1	— 478	31	+ 722	24	— 642
2	— 481	Aug. 4	+ 703	25	— 641
2	— 483	5	+ 700	1	— 675
3	— 458	5	+ 700	June 2	— 672
3	— 486	6	+ 701	2	— 674
4	— 490	6	+ 699	3	— 686
5	— 497	1888 May 5	— 576	3	— 682
6	— 500	10	— 576	4	— 682
7	— 511	11	— 591	5	— 691
7	— 510	12	— 590	6	— 691
8	— 511	16	— 598	7	— 701
11	— 523	19	— 615	7	— 695
13	— 547	19	— 613	8	— 704
14	— 545	20	— 613	11	— 708
14	— 544	20	— 621	13	— 723
15	— 555	22	— 629	14	— 725
15	— 552	22	— 636	14	— 731
17	— 558	23	— 631	15	— 732
17	— 558	24	— 635	15	— 732
18	— 564	24	— 638	17	— 743
		29	— 660	18	— 747
		June 6	— 681		

Tab. I. (Continued.)

$\varphi = 75°$		$\varphi = 75°$		$\varphi = 75°$	
1887 June 4	− 820″	1887 Aug. 6	+ 846″	1888 July 27	+ 867″
4	− 821	1888 May 5	− 746	30	+ 860
11	− 835	10	− 767	Aug. 1	+ 857
17	− 865	11	− 750	3	+ 856
17	− 865	12	− 766	3	+ 850
17	− 866	16	− 768	4	+ 850
18	− 869	19	− 782	4	+ 851
19	− 870	19	− 784	7	+ 847
22	− 886	20	− 786	7	+ 846
24	− 883	20	− 787	11	+ 832
24	− 884	22	− 794	12	+ 824
25	− 869	22	− 791	13	+ 827
29	− 905	23	− 791	1889 May 23	− 796
30	− 886	24	− 798	24	− 799
July 1	− 905	24	− 796	24	− 797
2	− 905	29	− 814	25	− 803
3	− 913	June 6	− 833	June 1	− 820
4	− 918	6	− 835	2	− 825
9	+ 906	12	− 850	2	− 824
13	+ 895	13	− 853	3	− 824
14	+ 904	13	− 856	3	− 828
20	+ 892	20	− 871	4	− 829
22	+ 874	21	− 877	5	− 829
22	+ 882	21	− 871	6	− 834
23	+ 882	22	− 883	7	− 841
26	+ 861	22	− 881	7	− 839
26	+ 872	24	− 885	8	− 843
27	+ 872	24	− 878	11	− 847
28	+ 869	25	− 889	13	− 856
30	+ 861	26	− 893	14	− 863
30	+ 862	26	− 888	14	− 859
31	+ 859	27	− 895	15	− 864
Aug. 4	+ 852	July 16	+ 893	15	− 865
5	+ 845	20	+ 883	17	− 863
5	+ 841	20	+ 881	18	− 869
6	+ 847	21	+ 882		

From these dates I have calculated p and as control, by the means of the p:s already calculated, determined π, which I have then compared with the values of π given by Dunér ($\pi =$ heliographic polar distance). On two different occasions I could not make them agree with Dunér, which is the reason that I have excluded those observations viz. second observation 1887 June 18 $\pi = 75°$ and 1887 June 11 $\pi = 60°$; besides the following observations are excluded viz. 1887 Jan. 3, 4, 15 and Jan. 16 $\pi = 75°$, as the dates given by Dunér to determine p are too aproximate even to determine in what quadrant the obser-

vations are made. For the group of observations $\pi = 90°$ I have got no dates, but as the observations in all other latitudes are always made, the same day, in the same quadrant, with only a few exceptions in June 1887, I have assumed that also the corresponding observations on the latitude $\pi = 90°$ are made in that same quadrant. Thus for this group I could calculate p from the π published by DUNÉR. If my assumption as to the quadrant in which the observations are made should not always be true, this is of no very great consequence. The values v (see DUNÉR pag. 64—72) are not equal to the observed v_1; the following relation exists between v and v_1

$$v = v_1 \sec \eta$$

the reason why I had to determine v_1 from the published v; the η:s employed by DUNÉR are tabulated pag. 47.

Each v gave me one equation of condition, and thus I got the following equations all with the same weight.

Tab. II.

$\varphi = 0°$	1887 June 3	+ 0.0319 r	+ 0.101 s	— 0.995 t	+ 2.25	= 0
	3	+ 0.0351	+ 0.111	— 0.993	+ 1.84	
	4	+ 0.0272	+ 0.092	— 0.995	+ 1.79	
	4	+ 0.0327	+ 0.110	— 0.993	+ 2.25	
	11	+ 0.0201	+ 0.117	— 0.993	+ 2.16	
	18	+ 0.0067	+ 0.120	— 0.993	+ 2.16	
	19	+ 0.0045	+ 0.117	— 0.993	+ 2.05	
	23	— 0.0030	+ 0.106	— 0.995	+ 1.93	
	24	— 0.0048	+ 0.106	— 0.995	+ 2.00	
	25	— 0.0067	+ 0.109	— 0.993	+ 2.30	
	29	— 0.0142	+ 0.111	— 0.993	+ 2.08	
	30	— 0.0131	+ 0.090	— 0.995	+ 1.91	
	July 1	— 0.0137	+ 0.084	— 0.995	+ 1.79	
	2	— 0.0148	+ 0.082	— 0.995	+ 1.93	
	3	— 0.0200	+ 0.101	— 0.995	+ 1.67	
	8	— 0.0334	+ 0.117	+ 0.993	— 1.88	
	12	— 0.0557	+ 0.156	+ 0.986	— 1.77	
	13	— 0.0375	+ 0.099	+ 0.995	— 1.91	
	14	— 0.0397	+ 0.100	+ 0.995	— 1.89	
	22	— 0.0470	+ 0.084	+ 0.995	— 1.80	
	23	— 0.0448	+ 0.077	+ 0.995	— 1.67	
	23	— 0.0456	+ 0.078	+ 0.995	— 1.92	
	26	— 0.0448	+ 0.0687	+ 0.998	— 1.96	
	26	— 0.0448	+ 0.0687	+ 0.998	— 2.26	
	27	— 0.0460	+ 0.0679	+ 0.998	— 2.17	
	28	— 0.0471	+ 0.0671	+ 0.998	— 1.97	
	30	— 0.0493	+ 0.0656	+ 0.998	— 2.02	
	30	— 0.0461	+ 0.0614	+ 0.998	— 2.07	
	31	— 0.0556	+ 0.0715	+ 0.995	— 1.80	

Tab. II. (Continued.)

$\varphi = 0°$	1887 Aug.	4	$-0.0465\,r$	$+0.0521\,s$	$+0.998\,t$	$-2.06 = 0$
		5	-0.0473	$+0.0513$	$+0.998$	-2.25
		5	-0.0488	$+0.0474$	$+0.998$	-1.92
		6	-0.0650	$+0.0682$	$+0.995$	-1.83
		6	-0.0482	$+0.0506$	$+0.998$	-2.15
	1888 May	5	$+0.0673$	$+0.0684$	-0.995	$+2.13$
		10	$+0.0713$	$+0.0857$	-0.993	$+1.55$
		12	$+0.0673$	$+0.0865$	-0.993	$+2.12$
		16	$+0.0624$	$+0.0925$	-0.993	$+1.85$
		19	$+0.0575$	$+0.0964$	-0.993	$+2.26$
		19	$+0.0603$	$+0.1009$	-0.993	$+2.06$
		20	$+0.0588$	$+0.1009$	-0.993	$+1.97$
		22	$+0.0520$	$+0.0966$	-0.993	$+1.89$
		22	$+0.0561$	$+0.1042$	-0.993	$+1.98$
		23	$+0.0512$	$+0.0991$	-0.993	$+1.77$
		23	$+0.0536$	$+0.104$	-0.993	$+1.66$
		24	$+0.0533$	$+0.108$	-0.993	$+1.79$
		29	$+0.0402$	$+0.102$	-0.995	$+1.94$
	June	6	$+0.0289$	$+0.117$	-0.993	$+1.75$
		6	$+0.0289$	$+0.117$	-0.993	$+1.73$
		12	$+0.0171$	$+0.119$	-0.993	$+1.86$
		13	$+0.0148$	$+0.118$	-0.993	$+1.88$
		13	$+0.0133$	$+0.105$	-0.995	$+1.68$
		20	$+0.0009$	$+0.106$	-0.995	$+1.88$
		21	-0.0008	$+0.111$	-0.993	$+1.69$
		21	-0.0008	$+0.110$	-0.993	$+1.95$
		22	-0.0026	$+0.106$	-0.995	$+2.36$
		24	-0.0059	$+0.103$	-0.995	$+1.75$
		24	-0.0066	$+0.115$	-0.993	$+1.88$
		25	-0.0082	$+0.111$	-0.993	$+1.79$
		26	-0.0103	$+0.113$	-0.993	$+1.72$
		27	-0.0113	$+0.104$	-0.995	$+1.59$
	July	16	-0.0395	$+0.0825$	$+0.995$	-2.23
		20	-0.0484	$+0.0908$	$+0.995$	-2.22
		20	-0.0419	$+0.0785$	$+0.995$	-2.09
		21	-0.0441	$+0.0793$	$+0.995$	-1.84
		25	-0.0446	$+0.0689$	$+0.998$	-1.90
		27	-0.0537	$+0.0773$	$+0.995$	-2.00
		28	-0.0489	$+0.0681$	$+0.998$	-2.10
	Aug.	1	-0.0455	$+0.0551$	$+0.998$	-1.73
		2	-0.0454	$+0.0531$	$+0.998$	-1.86
		3	-0.0462	$+0.0524$	$+0.998$	-1.86
		3	-0.0485	$+0.0550$	$+0.998$	-1.84
		4	-0.0518	$+0.0566$	$+0.998$	-1.96
		7	-0.0471	$+0.0466$	$+0.998$	-2.11
		7	-0.0459	$+0.0454$	$+0.998$	-2.06
		9	-0.0525	$+0.0485$	$+0.998$	-1.82
		11	-0.0435	$+0.0377$	$+0.998$	-1.81
		12	-0.0402	$+0.0336$	$+0.998$	-1.53
		12	-0.0415	$+0.0347$	$+0.998$	-1.66
		13	-0.0380	$+0.0307$	$+1.000$	-1.94
		20	-0.0311	$+0.0195$	$+1.000$	-2.00
		20	-0.0355	$+0.0223$	$+1.000$	-2.12
		21	-0.0313	$+0.0190$	$+1.000$	-1.85
	1889 May	23	$+0.0522$	$+0.101$	-0.993	$+2.04$
		24	$+0.0499$	$+0.100$	-0.993	$+1.90$
		24	$+0.0538$	$+0.107$	-0.993	$+2.17$
		25	$+0.0512$	$+0.107$	-0.995	$+2.04$

Tab. II. (Continued.)

$\varphi = 0°$	1889 May 28	+ 0.0410 *r*	+ 0.098 *s*	− 0.995 *t*	+ 2.09	= 0
	June 2	+ 0.0295	+ 0.091	− 0.995	+ 1.88	
	2	+ 0.0375	+ 0.116	− 0.993	+ 2.05	
	3	+ 0.0337	+ 0.110	− 0.993	+ 1.98	
	3	+ 0.0346	+ 0.113	− 0.993	+ 1.42	
	4	+ 0.0331	+ 0.116	− 0.993	+ 2.01	
	5	+ 0.0318	+ 0.118	− 0.993	+ 2.15	
	6	+ 0.0272	+ 0.108	− 0.993	+ 2.18	
	7	+ 0.0267	+ 0.114	− 0.993	+ 2.14	
	7	+ 0.0270	+ 0.115	− 0.993	+ 2.25	
	8	+ 0.0239	+ 0.111	− 0.993	+ 1.83	
	11	+ 0.0186	+ 0.114	− 0.993	+ 2.21	
	13	+ 0.0150	+ 0.116	− 0.993	+ 2.05	
	14	+ 0.0130	+ 0.114	− 0.993	+ 2.10	
	14	+ 0.0132	+ 0.116	− 0.993	+ 2.09	
	15	+ 0.0110	+ 0.115	− 0.993	+ 1.88	
	15	+ 0.0114	+ 0.118	− 0.993	+ 2.29	
	16	+ 0.0092	+ 0.115	− 0.993	+ 2.29	
	17	+ 0.0048	+ 0.077	− 0.998	+ 2.37	
	18	+ 0.0052	+ 0.110	− 0.993	+ 2.34	
$\varphi = 15°$	1887 June 17	+ 0.024 *r*	+ 0.328 *s*	+ 0.944 *t*	− 1.86	= 0
	18	+ 0.0079	+ 0.141	− 0.991	+ 2.05	
	19	+ 0.0057	+ 0.150	− 0.989	+ 2.19	
	24	− 0.0089	+ 0.196	− 0.982	+ 1.20	
	25	− 0.023	+ 0.372	+ 0.929	− 1.97	
	25	− 0.023	+ 0.380	+ 0.925	− 1.65	
	29	− 0.0203	+ 0.159	− 0.986	+ 1.99	
	30	− 0.0233	+ 0.160	− 0.986	+ 1.74	
	July 1	− 0.0275	+ 0.169	− 0.986	+ 1.87	
	2	− 0.0292	+ 0.163	− 0.986	+ 1.90	
	3	− 0.0317	+ 0.160	− 0.986	+ 1.81	
	12	− 0.127	+ 0.356	+ 0.927	− 1.95	
	13	− 0.135	+ 0.357	+ 0.925	− 1.81	
	14	− 0.131	+ 0.331	+ 0.933	− 2.19	
	22	− 0.175	+ 0.311	+ 0.933	− 1.92	
	23	− 0.175	+ 0.301	+ 0.938	− 1.73	
	23	− 0.171	+ 0.294	+ 0.940	− 1.54	
	26	− 0.186	+ 0.285	+ 0.940	− 1.96	
	26	− 0.188	+ 0.288	+ 0.940	− 1.81	
	27	− 0.188	+ 0.278	+ 0.942	− 1.86	
	28	− 0.197	+ 0.281	+ 0.940	− 1.83	
	30	− 0.199	+ 0.264	+ 0.944	− 1.48	
	30	− 0.198	+ 0.263	+ 0.944	− 1.86	
	31	− 0.203	+ 0.261	+ 0.944	− 1.81	
	Aug. 4	− 0.215	+ 0.242	+ 0.946	− 1.88	
	5	− 0.216	+ 0.234	+ 0.948	− 1.59	
	5	− 0.216	+ 0.234	+ 0.948	− 1.92	
	6	− 0.222	+ 0.233	+ 0.946	− 1.86	
	6	− 0.223	+ 0.234	+ 0.946	− 1.88	
	1888 May 5	+ 0.1135	+ 0.115	− 0.986	+ 1.99	
	10	+ 0.0968	+ 0.116	− 0.989	+ 1.52	
	12	+ 0.0959	+ 0.123	− 0.989	+ 1.90	
	16	+ 0.0807	+ 0.120	− 0.989	+ 1.97	
	19	+ 0.0773	+ 0.128	− 0.989	+ 2.10	
	19	+ 0.0745	+ 0.124	− 0.989	+ 1.80	
	20	+ 0.0736	+ 0.127	− 0.989	+ 1.87	
	20	+ 0.0702	+ 0.121	− 0.991	+ 1.54	

Tab. II. (Continued.)

$\varphi = 15°$	1888 May 22	+ 0.0741 *r*	+ 0.138 *s*	— 0.989 *t*	+ 1.65 = 0
	22	+ 0.0702	+ 0.130	— 0.989	+ 1.53
	23	+ 0.0662	+ 0.128	— 0.989	+ 1.75
	24	+ 0.0635	+ 0.128	— 0.991	+ 1.97
	29	+ 0.0516	+ 0.131	— 0.991	+ 2.02
	June 6	+ 0.0330	+ 0.133	— 0.991	+ 1.69
	6	+ 0.0306	+ 0.123	— 0.993	+ 1.60
	12	+ 0.0201	+ 0.140	— 0.991	+ 2.14
	13	+ 0.0175	+ 0.138	— 0.991	+ 1.66
	13	+ 0.0177	+ 0.140	— 0.991	+ 1.49
	20	+ 0.0012	+ 0.137	— 0.991	+ 1.72
	21	— 0.0010	+ 0.141	— 0.991	+ 1.80
	21	— 0.0010	+ 0.144	— 0.989	+ 1.80
	22	— 0.0033	+ 0.134	— 0.991	+ 1.81
	22	— 0.0038	+ 0.156	— 0.989	+ 1.28
	24	— 0.0082	+ 0.142	— 0.991	+ 1.82
	24	— 0.0082	+ 0.142	— 0.991	+ 1.76
	25	— 0.0107	+ 0.146	— 0.989	+ 1.56
	26	— 0.0137	+ 0.151	— 0.989	+ 1.62
	27	— 0.0163	+ 0.151	— 0.989	+ 1.37
	July 16	— 0.144	+ 0.319	+ 0.938	— 1.97
	20	— 0.161	+ 0.302	+ 0.940	— 1.71
	20	— 0.163	+ 0.305	+ 0.938	— 1.50
	21	— 0.164	+ 0.297	+ 0.942	— 2.09
	27	— 0.189	+ 0.272	+ 0.944	— 1.92
	28	— 0.229	+ 0.319	+ 0.920	— 1.81
	Aug. 1	— 0.209	+ 0.254	+ 0.944	— 1.69
	3	— 0.233	+ 0.264	+ 0.935	— 2.12
	3	— 0.220	+ 0.249	+ 0.944	— 1.56
	4	— 0.218	+ 0.239	+ 0.946	— 2.02
	7	— 0.228	+ 0.225	+ 0.946	— 1.63
	7	— 0.227	+ 0.224	+ 0.948	— 1.65
	11	— 0.234	+ 0.203	+ 0.951	— 1.81
	12	— 0.231	+ 0.198	+ 0.953	— 1.97
	21	— 0.248	+ 0.150	+ 0.957	— 1.98
	1889 May 23	+ 0.0675	+ 0.130	— 0.989	+ 1.92
	24	+ 0.0655	+ 0.131	— 0.989	+ 1.98
	24	+ 0.0646	+ 0.129	— 0.991	+ 1.94
	25	+ 0.0594	+ 0.124	— 0.991	+ 1.74
	28	+ 0.0557	+ 0.133	— 0.989	+ 1.86
	June 2	+ 0.0434	+ 0.134	— 0.991	+ 1.57
	2	+ 0.0471	+ 0.146	— 0.989	+ 1.73
	3	+ 0.0417	+ 0.137	— 0.991	+ 2.03
	4	+ 0.0384	+ 0.134	— 0.991	+ 1.87
	4	+ 0.0384	+ 0.134	— 0.991	+ 1.86
	5	+ 0.0349	+ 0.129	— 0.991	+ 2.05
	6	+ 0.0306	+ 0.122	— 0.993	+ 1.91
	7	+ 0.0322	+ 0.137	— 0.991	+ 1.76
	7	+ 0.0322	+ 0.137	— 0.991	+ 2.01
	8	+ 0.0316	+ 0.146	— 0.989	+ 1.84
	11	+ 0.0225	+ 0.137	— 0.991	+ 1.76
	13	+ 0.0170	+ 0.131	— 0.991	+ 1.89
	14	+ 0.0161	+ 0.142	— 0.991	+ 1.86
	14	+ 0.0160	+ 0.140	— 0.991	+ 1.97
	15	+ 0.0132	+ 0.137	— 0.991	+ 1.94
	15	+ 0.0138	+ 0.144	— 0.989	+ 2.21
	16	+ 0.0113	+ 0.141	— 0.991	+ 1.91
	17	+ 0.0093	+ 0.148	— 0.989	+ 2.11

Tab. II. (Continued.)

$\varphi = 15°$	1889 June 18	+ 0.0068 r	+ 0.144 s	— 0.989 t	+ 2.27 = 0
$\varphi = 30°$	1887 June 17	+ 0.028 r	+ 0.386 s	— 0.923 t	+ 1.58 = 0
	18	+ 0.022	+ 0.393	— 0.918	+ 1.42
	19	+ 0.016	+ 0.406	— 0.914	+ 1.58
	24	— 0.017	+ 0.385	— 0.923	+ 1.36
	29	— 0.052	+ 0.408	— 0.912	+ 1.32
	30	— 0.059	+ 0.406	— 0.912	+ 1.43
	July 1	— 0.067	+ 0.414	— 0.908	+ 2.06
	2	— 0.074	+ 0.408	— 0.910	+ 1.50
	3	— 0.081	+ 0.407	— 0.910	+ 1.48
	4	— 0.088	+ 0.411	— 0.908	+ 1.52
	12	— 0.204	+ 0.570	+ 0.796	— 1.68
	13	— 0.209	+ 0.555	+ 0.804	— 1.66
	14	— 0.217	+ 0.548	+ 0.807	— 1.84
	22	— 0.281	+ 0.501	+ 0.819	— 1.82
	23	— 0.291	+ 0.500	+ 0.817	— 1.54
	23	— 0.290	+ 0.498	+ 0.819	— 1.44
	26	— 0.338	+ 0.511	+ 0.798	— 1.91
	26	— 0.318	+ 0.480	+ 0.820	— 1.47
	27	— 0.318	+ 0.470	+ 0.824	— 1.65
	28	— 0.327	+ 0.466	+ 0.822	— 1.61
	30	— 0.340	+ 0.452	+ 0.826	— 1.57
	30	— 0.340	+ 0.453	+ 0.824	— 1.11
	31	— 0.344	+ 0.443	+ 0.828	— 1.29
	Aug. 4	— 0.371	+ 0.416	+ 0.830	— 1.50
	5	— 0.381	+ 0.412	+ 0.828	— 1.62
	5	— 0.376	+ 0.407	+ 0.832	— 1.64
	6	— 0.384	+ 0.403	+ 0.832	— 1.56
	6	— 0.385	+ 0.404	+ 0.830	— 1.25
	1888 May 10	+ 0.260	+ 0.313	— 0.914	+ 1.35
	11	+ 0.251	+ 0.311	— 0.916	+ 1.52
	12	+ 0.245	+ 0.315	— 0.916	+ 1.81
	16	+ 0.218	+ 0.323	— 0.920	+ 1.65
	19	+ 0.204	+ 0.339	— 0.918	+ 1.89
	19	+ 0.209	+ 0.348	— 0.914	+ 1.65
	20	+ 0.200	+ 0.344	— 0.918	+ 2.03
	20	+ 0.200	+ 0.344	— 0.918	+ 1.70
	22	+ 0.188	+ 0.348	— 0.918	+ 1.54
	22	+ 0.188	+ 0.348	— 0.918	+ 1.87
	23	+ 0.182	+ 0.352	— 0.918	+ 1.59
	24	+ 0.173	+ 0.351	— 0.920	+ 1.58
	24	+ 0.168	+ 0.340	— 0.925	+ 1.38
	29	+ 0.144	+ 0.366	— 0.918	+ 1.71
	June 6	+ 0.094	+ 0.378	— 0.920	+ 1.78
	6	+ 0.094	+ 0.379	— 0.920	+ 1.34
	12	+ 0.055	+ 0.386	— 0.920	+ 1.46
	13	+ 0.049	+ 0.388	— 0.920	+ 1.56
	13	+ 0.049	+ 0.388	— 0.920	+ 1.57
	20	+ 0.004	+ 0.406	— 0.914	+ 1.22
	21	— 0.003	+ 0.397	— 0.918	+ 1.49
	21	— 0.003	+ 0.402	— 0.916	+ 1.60
	22	— 0.010	+ 0.391	— 0.920	+ 1.48
	22	— 0.010	+ 0.406	— 0.914	+ 1.03
	24	— 0.022	+ 0.390	— 0.920	+ 1.67
	24	— 0.023	+ 0.393	— 0.918	+ 1.36
	25	— 0.029	+ 0.396	— 0.918	+ 1.72
	26	— 0.036	+ 0.394	— 0.918	+ 1.85

Tab. II. (Continued.)

$\varphi = 30°$	1888 June 27	$-0.048\ r$	$+0.398\ s$	$-0.916\ t$	$+1.50 = 0$
	July 16	-0.240	$+0.533$	$+0.811$	-1.23
	20	-0.271	$+0.508$	$+0.819$	-1.88
	20	-0.272	$+0.511$	$+0.817$	-1.66
	21	-0.280	$+0.505$	$+0.817$	-1.39
	27	-0.324	$+0.466$	$+0.824$	-0.99
	28	-0.331	$+0.461$	$+0.824$	-1.73
	30	-0.342	$+0.445$	$+0.828$	-1.40
	Aug. 1	-0.354	$+0.429$	$+0.832$	-1.74
	3	-0.372	$+0.420$	$+0.832$	-1.53
	3	-0.370	$+0.417$	$+0.832$	-1.53
	4	-0.378	$+0.414$	$+0.828$	-1.63
	7	-0.394	$+0.389$	$+0.834$	-1.29
	7	-0.392	$+0.387$	$+0.836$	-1.47
	9	-0.400	$+0.370$	$+0.840$	-1.46
	11	-0.413	$+0.358$	$+0.838$	-1.22
	12	-0.420	$+0.351$	$+0.838$	-1.49
	12	-0.418	$+0.349$	$+0.840$	-1.50
	13	-0.423	$+0.341$	$+0.840$	-1.54
	20	-0.453	$+0.285$	$+0.845$	-1.49
	20	-0.450	$+0.283$	$+0.847$	-1.39
	21	-0.456	$+0.276$	$+0.847$	-1.96
	21	-0.457	$+0.277$	$+0.845$	-1.52
	1889 May 23	$+0.180$	$+0.347$	-0.920	$+1.42$
	24	$+0.176$	$+0.351$	-0.920	$+1.76$
	24	$+0.176$	$+0.351$	-0.920	$+1.68$
	25	$+0.171$	$+0.357$	-0.918	$+1.53$
	28	$+0.154$	$+0.366$	-0.918	$+1.51$
	June 2	$+0.119$	$+0.369$	-0.923	$+1.49$
	2	$+0.120$	$+0.372$	-0.920	$+1.63$
	3	$+0.116$	$+0.378$	-0.918	$+1.43$
	4	$+0.106$	$+0.370$	-0.923	$+1.32$
	4	$+0.107$	$+0.372$	-0.923	$+1.66$
	5	$+0.111$	$+0.411$	-0.906	$+1.32$
	6	$+0.096$	$+0.382$	-0.918	$+1.82$
	7	$+0.090$	$+0.385$	-0.918	$+1.87$
	7	$+0.089$	$+0.380$	-0.920	$+1.74$
	8	$+0.085$	$+0.391$	-0.916	$+1.81$
	11	$+0.064$	$+0.388$	-0.918	$+1.70$
	13	$+0.050$	$+0.383$	-0.923	$+1.52$
	14	$+0.044$	$+0.390$	-0.920	$+1.65$
	14	$+0.045$	$+0.391$	-0.918	$+1.81$
	15	$+0.038$	$+0.392$	-0.918	$+1.51$
	15	$+0.036$	$+0.378$	-0.925	$+1.73$
	16	$+0.032$	$+0.396$	-0.918	$+2.12$
	17	$+0.025$	$+0.395$	-0.918	$+1.50$
	18	$+0.019$	$+0.402$	-0.916	$+1.89$
$\varphi = 45°$	1887 June 15	$+0.076\ r$	$+0.726\ s$	$+0.684\ t$	$-1.31 = 0$
	16	$+0.067$	$+0.746$	$+0.661$	-0.55
	18	$+0.035$	$+0.617$	-0.785	$+1.46$
	19	$+0.024$	$+0.622$	-0.783	$+1.38$
	22	-0.008	$+0.615$	-0.789	$+1.33$
	24	-0.028	$+0.610$	-0.793	$+0.79$
	24	-0.028	$+0.608$	-0.794	$+1.33$
	25	-0.051	$+0.830$	$+0.556$	-1.26
	25	-0.046	$+0.752$	-0.659	$+0.82$
	25	-0.049	$+0.796$	$+0.604$	-1.23

Tab. II. (Continued.)

$\varphi = 45°$	1887 June 29	— 0.089 *r*	+ 0.695 *s*	— 0.715 *t*	+ 1.08 = 0
	30	— 0.092	+ 0.630	— 0.771	+ 1.34
	July 1	— 0.102	+ 0.631	— 0.769	+ 1.47
	2	— 0.113	+ 0.625	— 0.773	+ 1.29
	3	— 0.123	+ 0.624	— 0.773	+ 1.18
	4	— 0.134	+ 0.624	— 0.769	+ 1.12
	9	— 0.226	+ 0.745	+ 0.630	— 1.39
	13	— 0.279	+ 0.738	+ 0.614	— 1.21
	14	— 0.301	+ 0.759	+ 0.577	— 1.38
	22	— 0.378	+ 0.673	+ 0.637	— 1.35
	23	— 0.386	+ 0.664	+ 0.641	— 1.28
	26	— 0.414	+ 0.635	+ 0.652	— 1.52
	26	— 0.412	+ 0.632	+ 0.656	— 1.33
	27	— 0.430	+ 0.634	+ 0.648	— 1.17
	28	— 0.442	+ 0.630	+ 0.640	— 1.03
	30	— 0.458	+ 0.610	+ 0.647	— 1.19
	30	— 0.460	+ 0.612	+ 0.644	— 1.23
	31	— 0.466	+ 0.598	+ 0.650	— 0.58
	Aug. 4	— 0.502	+ 0.564	+ 0.656	— 1.61
	5	— 0.512	+ 0.555	+ 0.655	— 0.96
	5	— 0.514	+ 0.557	+ 0.652	— 1.24
	6	— 0.520	+ 0.546	+ 0.659	— 0.94
	6	— 0.524	+ 0.550	+ 0.650	— 1.27
	1888 May 5	+ 0.438	+ 0.445	— 0.782	+ 0.87
	10	+ 0.405	+ 0.486	— 0.775	+ 1.32
	11	+ 0.391	+ 0.484	— 0.783	+ 1.46
	12	+ 0.385	+ 0.496	— 0.780	+ 1.40
	16	+ 0.347	+ 0.514	— 0.785	+ 1.12
	16	+ 0.350	+ 0.519	— 0.780	+ 1.26
	19	+ 0.322	+ 0.535	— 0.782	+ 1.34
	19	+ 0.320	+ 0.531	— 0.785	+ 1.42
	20	+ 0.311	+ 0.535	— 0.785	+ 1.42
	20	+ 0.313	+ 0.538	— 0.783	+ 1.08
	22	+ 0.297	+ 0.551	— 0.780	+ 1.48
	22	+ 0.298	+ 0.553	— 0.778	+ 1.16
	23	+ 0.284	+ 0.550	— 0.785	+ 1.53
	24	+ 0.274	+ 0.555	— 0.785	+ 1.21
	24	+ 0.273	+ 0.552	— 0.789	+ 1.45
	29	+ 0.227	+ 0.577	— 0.785	+ 1.29
	June 6	+ 0.148	+ 0.598	— 0.787	+ 1.45
	6	+ 0.149	+ 0.600	— 0.785	+ 1.23
	12	+ 0.088	+ 0.611	— 0.787	+ 1.39
	13	+ 0.077	+ 0.612	— 0.787	+ 0.88
	13	+ 0.077	+ 0.611	— 0.789	+ 1.30
	20	+ 0.005	+ 0.611	— 0.791	+ 0.87
	21	— 0.004	+ 0.617	— 0.787	+ 0.93
	21	— 0.004	+ 0.617	— 0.787	+ 0.91
	22	— 0.015	+ 0.627	— 0.780	+ 1.17
	22	— 0.015	+ 0.628	— 0.778	+ 1.24
	24	— 0.036	+ 0.619	— 0.783	+ 1.12
	24	— 0.036	+ 0.621	— 0.783	+ 1.34
	25	— 0.046	+ 0.619	— 0.783	+ 1.20
	26	— 0.056	+ 0.619	— 0.783	+ 1.09
	27	— 0.067	+ 0.618	— 0.783	+ 1.10
	27	— 0.067	+ 0.622	— 0.780	+ 0.88
	July 16	— 0.319	+ 0.708	+ 0.631	— 0.59
	20	— 0.365	+ 0.684	+ 0.634	— 1.32
	20	— 0.360	+ 0.675	+ 0.646	— 1.10

Tab. II. (Continued.)

$\varphi = 45°$	1888 July 21	— 0.362 r	+ 0.653 s	+ 0.665 t	— 1.31	= 0
	27	— 0.430	+ 0.618	+ 0.658	— 0.76	
	30	— 0.462	+ 0.601	+ 0.650	— 0.88	
	Aug. 1	— 0.485	+ 0.588	+ 0.647	— 1.37	
	3	— 0.501	+ 0.568	+ 0.653	— 1.01	
	3	— 0.502	+ 0.569	+ 0.652	— 0.99	
	4	— 0.508	+ 0.556	+ 0.658	— 1.15	
	4	— 0.507	+ 0.555	+ 0.661	— 0.95	
	7	— 0.536	+ 0.530	+ 0.659	— 1.25	
	7	— 0.535	+ 0.528	+ 0.661	— 1.31	
	11	— 0.565	+ 0.490	+ 0.664	— 1.05	
	12	— 0.570	+ 0.476	+ 0.670	— 0.72	
	13	— 0.581	+ 0.469	+ 0.665	— 1.06	
	20	— 0.630	+ 0.396	+ 0.670	— 1.07	
	1889 May 23	+ 0.286	+ 0.551	— 0.788	+ 1.28	
	24	+ 0.277	+ 0.553	— 0.785	+ 1.19	
	24	+ 0.277	+ 0.553	— 0.785	+ 1.26	
	25	+ 0.269	+ 0.560	— 0.788	+ 1.06	
	June 1	+ 0.200	+ 0.586	— 0.785	+ 1.14	
	2	+ 0.190	+ 0.588	— 0.787	+ 1.19	
	2	+ 0.191	+ 0.590	— 0.785	+ 1.01	
	3	+ 0.173	+ 0.565	— 0.807	+ 1.12	
	3	+ 0.180	+ 0.590	— 0.787	+ 1.07	
	4	+ 0.169	+ 0.592	— 0.789	+ 1.00	
	5	+ 0.161	+ 0.596	— 0.787	+ 1.16	
	6	+ 0.150	+ 0.597	— 0.789	+ 1.28	
	7	+ 0.142	+ 0.604	— 0.783	+ 1.30	
	7	+ 0.142	+ 0.604	— 0.783	+ 1.30	
	8	+ 0.130	+ 0.601	— 0.789	+ 1.42	
	11	+ 0.099	+ 0.603	— 0.791	+ 1.21	
	13	+ 0.080	+ 0.615	— 0.783	+ 1.31	
	14	+ 0.069	+ 0.608	— 0.791	+ 1.00	
	14	+ 0.069	+ 0.608	— 0.791	+ 1.62	
	15	+ 0.059	+ 0.617	— 0.785	+ 1.03	
	15	+ 0.059	+ 0.614	— 0.787	+ 1.19	
	17	+ 0.038	+ 0.611	— 0.791	+ 1.25	
	17	+ 0.038	+ 0.611	— 0.791	+ 1.47	
	18	+ 0.029	+ 0.615	— 0.789	+ 0.81	
$\varphi = 60°$	1887 June 3	+ 0.279 r	+ 0.885 s	+ 0.373 t	— 0.780	= 0
	4	+ 0.213	+ 0.721	— 0.661	+ 0.740	
	15	+ 0.092	+ 0.879	+ 0.470	— 0.790	
	16	+ 0.080	+ 0.891	+ 0.445	— 0.600	
	17	+ 0.057	+ 0.796	— 0.604	+ 0.760	
	17	+ 0.057	+ 0.796	— 0.604	+ 1.239	
	18	+ 0.045	+ 0.798	— 0.601	+ 0.759	
	19	+ 0.035	+ 0.910	+ 0.413	— 0.359	
	19	+ 0.031	+ 0.804	— 0.594	+ 0.769	
	20	— 0.010	+ 0.800	— 0.601	+ 0.809	
	24	— 0.035	+ 0.762	— 0.649	+ 0.509	
	24	— 0.036	+ 0.802	— 0.597	+ 0.598	
	25	— 0.058	+ 0.942	+ 0.327	— 0.269	
	25	— 0.049	+ 0.796	— 0.603	+ 0.528	
	29	— 0.103	+ 0.805	— 0.585	+ 0.408	
	30	— 0.117	+ 0.802	— 0.585	+ 0.716	
	July 1	— 0.131	+ 0.809	— 0.570	+ 0.308	
	2	— 0.144	+ 0.802	— 0.579	+ 0.787	
	3	— 0.157	+ 0.796	— 0.586	+ 0.796	

Tab. II. (Continued.)

$\varphi = 60°$	1887 July 4	— 0.170 *r*	+ 0.793 *s*	— 0.585 *t*	+ 0.865 = 0
	9	— 0.266	+ 0.877	+ 0.400	— 0.863
	13	— 0.326	+ 0.863	+ 0.386	— 0.664
	14	— 0.336	+ 0.847	+ 0.410	— 0.830
	20	— 0.418	+ 0.805	+ 0.421	— 1.054
	22	— 0.444	+ 0.791	+ 0.423	— 0.522
	23	— 0.457	+ 0.785	+ 0.418	— 0.679
	26	— 0.498	+ 0.764	+ 0.411	— 0.492
	26	— 0.496	+ 0.760	+ 0.418	— 0.817
	27	— 0.511	+ 0.753	+ 0.416	— 1.050
	28	— 0.521	+ 0.748	+ 0.418	— 0.953
	30	— 0.543	+ 0.723	+ 0.429	— 0.471
	30	— 0.543	+ 0.723	+ 0.428	— 0.540
	31	— 0.555	+ 0.713	+ 0.428	— 0.540
	Aug. 4	— 0.598	+ 0.671	+ 0.437	— 0.724
	5	— 0.610	+ 0.661	+ 0.437	— 0.755
	5	— 0.610	+ 0.661	+ 0.437	— 0.695
	6	— 0.622	+ 0.653	+ 0.433	— 0.753
	6	— 0.622	+ 0.653	+ 0.434	— 0.869
	1888 May 5	+ 0.572	+ 0.581	— 0.581	+ 0.438
	10	+ 0.513	+ 0.617	— 0.598	+ 0.588
	11	+ 0.507	+ 0.628	— 0.589	+ 0.746
	12	+ 0.493	+ 0.634	— 0.594	+ 0.577
	16	+ 0.447	+ 0.662	— 0.603	+ 0.847
	19	+ 0.415	+ 0.689	— 0.596	+ 0.628
	19	+ 0.414	+ 0.687	— 0.598	+ 1.167
	20	+ 0.401	+ 0.689	— 0.605	+ 0.708
	20	+ 0.405	+ 0.695	— 0.596	+ 0.879
	22	+ 0.381	+ 0.708	— 0.594	+ 0.528
	22	+ 0.385	+ 0.715	— 0.586	+ 0.847
	23	+ 0.368	+ 0.713	— 0.598	+ 0.688
	24	+ 0.355	+ 0.718	— 0.601	+ 0.811
	24	+ 0.356	+ 0.719	— 0.597	+ 0.650
	29	+ 0.294	+ 0.746	— 0.597	+ 0.840
	June 6	+ 0.190	+ 0.766	— 0.615	+ 0.670
	6	+ 0.192	+ 0.776	— 0.601	+ 0.860
	12	+ 0.114	+ 0.791	— 0.603	+ 0.940
	13	+ 0.099	+ 0.785	— 0.611	+ 0.490
	13	+ 0.100	+ 0.794	— 0.601	+ 0.690
	20	+ 0.007	+ 0.796	— 0.605	+ 1.007
	21	— 0.005	+ 0.800	— 0.601	+ 0.578
	21	— 0.006	+ 0.804	— 0.594	+ 0.499
	22	— 0.020	+ 0.807	— 0.590	+ 0.519
	22	— 0.020	+ 0.807	— 0.590	+ 0.659
	24	— 0.046	+ 0.800	— 0.597	+ 0.698
	24	— 0.046	+ 0.798	— 0.601	+ 0.948
	25	— 0.059	+ 0.804	— 0.592	+ 0.649
	26	— 0.073	+ 0.798	— 0.597	+ 0.908
	26	— 0.073	+ 0.800	— 0.594	+ 0.718
	27	— 0.087	+ 0.800	— 0.596	+ 0.658
	July 16	— 0.376	+ 0.834	+ 0.406	— 0.436
	20	— 0.431	+ 0.807	+ 0.406	— 0.819
	20	— 0.431	+ 0.807	+ 0.406	— 0.887
	21	— 0.442	+ 0.796	+ 0.415	— 0.483
	27	— 0.519	+ 0.746	+ 0.415	— 0.363
	30	— 0.552	+ 0.718	+ 0.425	— 0.628
	Aug. 1	— 0.572	+ 0.698	+ 0.433	— 0.871
	3	— 0.597	+ 0.676	+ 0.434	— 0.676

Tab. II. (Continued.)

$\varphi = 60°$	1888 Aug. 3	— 0.597 *r*	+ 0.676 *s*	+ 0.434 *t*	— 0.755	= 0
	4	— 0.607	+ 0.664	+ 0.437	— 0.617	
	4	— 0.607	+ 0.664	+ 0.439	— 0.441	
	7	— 0.640	+ 0.632	+ 0.437	— 0.537	
	7	— 0.638	+ 0.631	+ 0.440	— 0.684	
	11	— 0.676	+ 0.586	+ 0.445	— 0.859	
	13	— 0.697	+ 0.562	+ 0.447	— 0.653	
	1889 May 23	+ 0.368	+ 0.708	— 0.604	+ 0.638	
	24	+ 0.357	+ 0.718	— 0.604	+ 0.630	
	24	+ 0.361	+ 0.721	— 0.590	+ 0.840	
	25	+ 0.347	+ 0.723	— 0.597	+ 0.770	
	June 1	+ 0.260	+ 0.760	— 0.594	+ 0.560	
	2	+ 0.245	+ 0.759	— 0.605	+ 0.680	
	2	+ 0.246	+ 0.762	— 0.601	+ 0.760	
	3	+ 0.236	+ 0.771	— 0.593	+ 1.199	
	3	+ 0.234	+ 0.767	— 0.597	+ 0.840	
	4	+ 0.220	+ 0.767	— 0.604	+ 0.600	
	5	+ 0.209	+ 0.776	— 0.596	+ 0.610	
	6	+ 0.195	+ 0.776	— 0.601	+ 1.030	
	7	+ 0.184	+ 0.782	— 0.594	+ 1.009	
	7	+ 0.182	+ 0.776	— 0.603	+ 0.910	
	8	+ 0.170	+ 0.785	— 0.596	+ 0.650	
	11	+ 0.129	+ 0.783	— 0.608	+ 0.630	
	13	+ 0.103	+ 0.791	— 0.604	+ 0.738	
	14	+ 0.090	+ 0.791	— 0.607	+ 0.689	
	14	+ 0.091	+ 0.796	— 0.597	+ 1.019	
	15	+ 0.077	+ 0.798	— 0.598	+ 0.509	
	15	+ 0.077	+ 0.798	— 0.598	+ 0.649	
	17	+ 0.052	+ 0.832	— 0.553	+ 0.627	
	18	+ 0.038	+ 0.804	— 0.594	+ 0.518	
$\varphi = 75°$	1887 June 4	+ 0.261	+ 0.883 *s*	— 0.389 *t*	+ 0.120	= 0
	4	+ 0.261	+ 0.888	— 0.389	+ 0.511	
	11	+ 0.156	+ 0.904	— 0.399	+ 0.120	
	17	+ 0.066	+ 0.925	— 0.376	— 0.110	
	17	+ 0.066	+ 0.925	— 0.376	— 0.479	
	17	+ 0.066	+ 0.927	— 0.376	+ 0.748	
	18	+ 0.052	+ 0.927	— 0.372	+ 0.538	
	19	+ 0.036	+ 0.929	— 0.368	+ 0.458	
	22	— 0.011	+ 0.935	— 0.353	+ 0.397	
	24	— 0.042	+ 0.925	— 0.381	+ 0.238	
	24	— 0.042	+ 0.927	— 0.375	+ 0.178	
	25	— 0.055	+ 0.906	— 0.421	+ 0.506	
	29	— 0.119	+ 0.933	— 0.340	+ 0.423	
	30	— 0.132	+ 0.902	— 0.410	+ 0.989	
	July 1	— 0.150	+ 0.923	— 0.355	+ 0.303	
	2	— 0.165	+ 0.918	— 0.361	+ 0.303	
	3	— 0.188	+ 0.925	— 0.339	+ 0.224	
	4	— 0.198	+ 0.923	— 0.327	+ 0.378	
	9	— 0.286	+ 0.944	+ 0.167	— 0.224	
	13	— 0.348	+ 0.920	+ 0.175	— 0.397	
	14	— 0.365	+ 0.920	+ 0.141	— 0.632	
	20	— 0.455	+ 0.877	+ 0.148	— 0.301	
	22	— 0.482	+ 0.859	+ 0.179	— 0.524	
	22	— 0.484	+ 0.863	+ 0.156	— 0.227	
	23	— 0.498	+ 0.855	+ 0.150	+ 0.132	
	26	— 0.536	+ 0.822	+ 0.193	— 0.603	
	26	— 0.538	+ 0.826	+ 0.161	— 0.561	

Tab. II. (Continued.)

$\varphi = 75°$	1887 July	27	− 0.555 r	+ 0.819 s	+ 0.155 t	− 0.168 = 0
		28	− 0.568	+ 0.809	+ 0.158	− 0.215
		30	− 0.598	+ 0.789	+ 0.172	− 0.289
		30	− 0.598	+ 0.789	+ 0.167	− 0.139
		31	− 0.605	+ 0.778	+ 0.172	− 0.279
	Aug.	4	− 0.656	+ 0.786	+ 0.170	− 0.442
		5	− 0.667	+ 0.723	+ 0.179	− 0.281
		5	− 0.665	+ 0.721	+ 0.188	− 0.380
		6	− 0.681	+ 0.715	+ 0.170	− 0.422
		6	− 0.679	+ 0.713	+ 0.175	− 0.321
	1888 May	5	+ 0.655	+ 0.665	− 0.357	+ 0.214
		10	+ 0.601	+ 0.728	− 0.344	+ 0.490
		11	+ 0.581	+ 0.719	− 0.381	+ 0.385
		12	+ 0.578	+ 0.786	− 0.360	+ 0.197
		16	+ 0.519	+ 0.769	− 0.375	+ 0.466
		19	+ 0.481	+ 0.798	− 0.366	+ 0.328
		19	+ 0.481	+ 0.798	− 0.363	+ 0.278
		20	+ 0.469	+ 0.805	− 0.366	+ 0.497
		20	+ 0.469	+ 0.805	− 0.368	+ 0.507
		22	+ 0.443	+ 0.822	− 0.360	+ 0.389
		22	+ 0.442	+ 0.820	− 0.366	+ 0.588
		23	+ 0.427	+ 0.826	− 0.373	+ 0.299
		24	+ 0.412	+ 0.834	− 0.368	+ 0.527
		24	+ 0.412	+ 0.884	− 0.372	+ 0.440
		29	+ 0.340	+ 0.865	− 0.368	+ 0.390
	June	6	+ 0.223	+ 0.900	− 0.378	+ 0.660
		6	+ 0.223	+ 0.900	− 0.378	+ 0.570
		12	+ 0.132	+ 0.914	− 0.386	+ 0.579
		13	+ 0.116	+ 0.918	− 0.383	+ 0.479
		13	+ 0.116	+ 0.920	− 0.375	+ 0.459
		20	+ 0.008	+ 0.920	− 0.393	+ 0.547
		21	− 0.006	+ 0.927	− 0.376	+ 0.447
		21	− 0.006	+ 0.920	− 0.391	+ 0.338
		22	− 0.023	+ 0.933	− 0.360	+ 0.337
		22	− 0.023	+ 0.931	− 0.365	+ 0.228
		24	− 0.053	+ 0.923	− 0.379	+ 0.427
		24	− 0.053	+ 0.916	− 0.395	+ 0.304
		25	− 0.068	+ 0.927	− 0.372	+ 0.505
		26	− 0.067	+ 0.927	− 0.365	+ 0.079
		26	− 0.084	+ 0.918	− 0.385	+ 0.406
		27	− 0.101	+ 0.927	− 0.365	+ 0.345
	July	16	− 0.406	+ 0.902	+ 0.156	− 0.316
		20	− 0.465	+ 0.871	+ 0.163	− 0.152
		20	− 0.465	+ 0.871	+ 0.169	− 0.238
		21	− 0.480	+ 0.865	+ 0.158	− 0.340
		27	− 0.562	+ 0.809	+ 0.165	− 0.336
		30	− 0.601	+ 0.782	+ 0.167	− 0.381
	Aug.	1	− 0.628	+ 0.760	+ 0.167	− 0.175
		3	− 0.655	+ 0.741	+ 0.158	− 0.394
		3	− 0.652	+ 0.738	+ 0.177	− 0.208
		4	− 0.665	+ 0.728	+ 0.172	− 0.321
		4	− 0.665	+ 0.728	+ 0.167	− 0.302
		7	− 0.702	+ 0.693	+ 0.162	− 0.244
		7	− 0.702	+ 0.693	+ 0.167	− 0.362
		11	− 0.743	+ 0.640	+ 0.181	− 0.226
		12	− 0.753	+ 0.630	+ 0.191	− 0.501
		13	− 0.766	+ 0.618	+ 0.179	− 0.234
	1889 May	23	+ 0.430	+ 0.826	− 0.363	+ 0.508

Tab. II. (Continued.)

$\varphi = 75°$	1889 May 24	+ 0.417 r	+ 0.832 s	— 0.363 t	+ 0.488 = 0
	24	+ 0.417	+ 0.832	— 0.366	+ 0.318
	25	+ 0.403	+ 0.840	— 0.363	— 0.040
	June 1	+ 0.301	+ 0.879	— 0.373	+ 0.430
	2	+ 0.286	+ 0.885	— 0.368	+ 0.140
	2	+ 0.286	+ 0.885	— 0.372	+ 0.310
	3	+ 0.271	+ 0.887	— 0.378	+ 0.370
	3	+ 0.272	+ 0.889	— 0.370	+ 0.330
	4	+ 0.256	+ 0.893	— 0.373	+ 0.320
	5	+ 0.241	+ 0.893	— 0.379	+ 0.200
	6	+ 0.226	+ 0.900	— 0.376	+ 0.180
	7	+ 0.213	+ 0.906	— 0.366	+ 0.360
	7	+ 0.212	+ 0.904	— 0.372	+ 0.440
	8	+ 0.196	+ 0.908	— 0.370	+ 0.410
	11	+ 0.150	+ 0.912	— 0.379	+ 0.480
	13	+ 0.119	+ 0.918	— 0.375	+ 0.349
	14	+ 0.105	+ 0.925	— 0.366	+ 0.399
	14	+ 0.105	+ 0.920	— 0.376	+ 0.319
	15	+ 0.089	+ 0.927	— 0.366	+ 0.469
	15	+ 0.089	+ 0.927	— 0.366	+ 0.230
	17	+ 0.058	+ 0.920	— 0.385	+ 0.568
	18	+ 0.044	+ 0.927	— 0.375	— 0.199

I have not yet determined r, s and t from these equations of condition, but first united them by groups by adding all equations in each latitud, where the coefficients of resp. r, s and t have the same signs. Thus I have reduced the number of equations of condition to following 22:

					Weight.
$\varphi = 0°$	+ 1.6679 r	+ 5.314 s	— 49.673 t	+ 99.90 = 0	50
	— 0.1368	+ 1.662	— 15.906	+ 30.34 = 0	16
	— 1.8533	+ 2.607	+ 40.873	— 79.83 = 0	41
$\varphi = 15°$	+ 0.024 r	+ 0.328 s	+ 0.944 t	+ 1.86 = 0	1
	+ 1.9510	+ 6.098	— 44.558	+ 84.14 = 0	45
	— 0.2071	+ 2.814	— 14.821	+ 25.33 = 0	15
	— 6.509	+ 9.614	+ 32.924	+ 63.93 = 0	35
$\varphi = 30°$	+ 3.241 r	+ 8.252 s	— 21.120 t	+ 36.78 = 0	23
	— 0.617	+ 6.406	— 14.641	+ 24.32 = 0	16
	— 13.914	+ 17.264	+ 33.065	— 61.15 = 0	40
	+ 2.249	+ 9.097	+ 22.055	— 39.42 = 0	24
$\varphi = 45°$	+ 0.143 r	+ 1.472 s	+ 1.345 t	— 1.86 = 0	2
	+ 9.315	+ 27.535	— 37.722	+ 59.44 = 0	48
	— 1.109	+ 12.621	— 15.432	+ 22.73 = 0	20
	— 15.542	+ 21.987	+ 23.207	— 41.06 = 0	36
$\varphi = 60°$	+ 0.486 r	+ 3.565 s	+ 1.701 t	+ 2.529 = 0	4
	+ 11.882	+ 36.563	— 29.371	+ 36.921 = 0	49
	— 1.387	+ 15.985	— 11.892	+ 13.158 = 0	20
	— 17.416	+ 24.885	+ 14.330	— 23.249 = 0	34
$\varphi = 75°$	+ 14.273 r	+ 45.129 s	— 19.355 t	+ 18.474 = 0	52
	— 1.581	+ 18.466	— 7.415	+ 7.855 = 0	20
	— 20.164	+ 27.547	+ 5.875	+ 10.948 + 0	35

From these, by means of the method of least squares, the following normal equations result:

$$+ 6.5079\, r + 0.9328\, s - 11.0262\, t + 17.5742 = 0$$
$$+ 0.9328\, r + 31.0829\, s - 11.0923\, t + 11.8055 = 0$$
$$- 11.0262\, r - 11.0923\, s + 56.1926\, t - 100.1522 = 0$$

Solving these I got

$$\log r = 9.75138$$
$$\log s = 9.47702$$
$$\log t = 0.29052$$

and thus

$$x = 2.054 \pm 0.0042$$
$$i = + 18.12 \pm 0.25$$
$$\Omega = + 28.00 \pm 0.50.$$

As DUNÉR could not from all his observations determine a quantity corresponding to my x with its probable error, it was impossible for me to compare my p. e. with DUNÉR. I have therefore proceeded in the following manner. From the p. e. of v given by DUNÉR pag. 73 for each year and latitude I have at first for $\varphi = 0$ calculated the p. e. in one observation in that latitude and so examined what would become the p. e. if the number of observations on the latitude $\varphi = 0$ were equal to the whole number of observations on all latitudes. Then I have made equal proceeding with the p. e. of v for $\varphi = 75°$ which p. e. I have afterwards multiplied with sec 75°. The p. e. which ought to be comparable to my p. e. of x then must lay between these two probable errors viz. between $\pm$ 0.0050 and $\pm$ 0.0207. As my p. e. of x thus is considerably smaller than that of DUNÉR, I have concluded that an uniform rotation better accords with the observations then the law found from the sunspots. It was also my intention to determine x, i and Ω for each latitude separately, a determination that cannot but be uncertain, but as the probable errors of x, i and Ω are all small, such an examination could not have given essentially different values to these quantitees for the different latitudes; thus I have considered such a calculation unnecessary.

The result of this examination of DUNÉR's observations of the sun is thus that the sun rotates with uniform velocity round an axis the inclination of which towards the axis of the ecliptic is 18°.12, the longitude of the intersection of the sun's equator with the ecliptic being + 28°.00. It will be of great interest to examine whether further spectroscopical observations of the sun made during all seasons will agree with that; if so, I think it is proved that the sun's rotation is uniform. It is no easy matter to bring this in accord with the experiences found from observations of the sunspots; perhaps it will become possible to explain this anomaly by assuming proper motions to the spots. It had been my intention also to reduce the observations of CREW, but infortunately I have not all necessary dates.

There are several circumstances that may make this determination rather doubtful, viz. the uncertainty as to which quadrant the observations in group $\pi = 90°$ were made, which do not at all events very much influence the result; another cause of error is the following: DUNÉR says pag. 73: »Pour les observations dans le voisinage des pôles, on pourrait au contraire suspecter qu'il y a eu, dans les observations, confusions des bords solaires, de la sorte que des observations qui devaient être prises sur le bord est se sont en effet portées sur le bord ouest ou vice versa, erreur qui ne se trahit pas par l'apparence seule du groupe des raies mesurées que quand on observe dans une latitude de 45° et dessous. Mais bien qu'il est fort possible, que des erreurs de cette espèce puissent arrivé, j'ai cru, cependant, qu'il vaudrait mieux ne pas faire des suppressions ou alterations arbitraires des observations etc.» Faults of that sort especially affecting the highest latitudes would of course considerably influence the result by producing great changes in the values of i and Ω.

Another source of error may occur if the observations are not corrected for the earth's motion round its axis. Thus an observation on the east limb of the sun gives a value of v less

than the true one, and an observation on the west limb an excessive value if the observations are made before noon, and the contrary if the are made after noon, and thus if we take the mean of observations on both limbs the result would be free from error, if only both observations, the means of which are taken, were made on the same time, that is however impossible. I will now show the amount of such an error. For convenience sake I assume the sun's declination to be zero and that the observation is made on a geografic latitude like ψ, then the velocity of the spot of observation is $0.46 \cos \psi$ km. per second; I further assume that the observation on the east limb is made on the meridian and thus without errors of that kind, and that the observation of the corresponding point on the west limb is made half one hour afterwards; then an error like $0.06 \cos \psi$ affects the observation on the west limb and thus an error of $0.03 \cos \psi$ the result. Now the mean af DUNÉR's observations on the heliographic latitude $\varphi = 75°$ is 0.34 and the geografic latitude like 60°, thus the occurring error here, under the assumed circumstances, would be 5 % of the whole velocity, an error which is constant, if the observation always begin on the same limb of the sun. Very probably here the time past between the two corresponding observations on both the limbs is generally less than $^1/_2$ hour and do not always begin on the same limb of the sun. In any case, on making such observations for determining the constants of the sun, it would be good to mark the time of observation and correct for the motion of the earth, especially as the velocity of the sun in high latitudes is very small and even a little error will seriously effect the accurate determination of i and Ω.

The only determination of i and Ω from observations of the sunspots which is published in extenso, is so far as I am aware that of WILSING in A. N. Bd. 107 pag. 282 and he has determined not i and Ω but di and $d\Omega$ with differential formules. There is a question whether not a determination of these quantities i and Ω themselves with exact formules would

have given different results just as my determination of di and $d\Omega$ with approximate formules gave a result considerably at variance with that resulting from my determination of i and Ω from exact formules. I think it would not be without interest to make such a calculation.

The value $x = 2.054$ is not the true velocity but the synodic; we get the true value by adding $2d \sin \omega$, where d is the velocity of the earth in its orbit in km. per second and ω the semidiameter of the sun expressed in angle as seen from the earth. As DUNÉR has not added that quantity I have also omitted to do it on account of comparison with him.

ÖFVERSIGT AF K. SV. VET.-AKAD. FÖRHANDL. 1899. N:o 4.

ackn

MEDDELANDEN

FRÅN

LUNDS ASTRONOMISKA OBSERVATORIUM

N:o 5.

UEBER DIE TEILUNG DES KREISES IN DER HANSEN'SCHEN STÖRUNGSTEORIE

VON

C. A. SCHULTZ-STEINHEIL

MITGETEILT DEN 12. APRIL 1899 DURCH C. V. L. CHARLIER

STOCKHOLM
KUNGL. BOKTRYCKERIET. P. A. NORSTEDT & SÖNER
1899

Die Mühe einen kleinen Planeten nach der HANSEN'schen Metode zu berechnen hängt sehr wesentlich von der Anzahl Teile (p), in welche der Kreis bei der Quadratur geteilt wird, ab. Wenn also die Teilung genauer als nötig genommen wird, macht man sich dadurch eine grosse unnötige Arbeit. So viel ich weiss, ist bis jetzt keine für numerische Rechnung bequeme Formel um p zu evaluiren gegeben worden, und man wählt daher p im allgemeinen ziemlich willkürlich. In »Untersuchung über die allgemeinen Jupiter-Störungen des Planeten Thetis» [1]) hat CHARLIER diese Frage diskutirt und auch Formeln um p zu berechnen gegeben, die doch nicht in ihrer jetzigen Form für numerische Kalkül geeignet sind. Es ist hier meine Absicht teils diese Formeln so zu transformiren, dass sie für numerische Rechnung bequem werden, teils Tabellen zu geben, wodurch die Berechnung von p sehr leicht ausgeführt werden kann. CHARLIER's Resonnement hier zu rekapituliren ist nicht meine Absicht, sondern begnüge ich mich seine Formeln hier direkt anzuwenden.

CHARLIER's Formel pag. 43 (90*) ist:

$$n \log \varkappa - \tfrac{1}{2} \log n < \log \frac{\sigma}{k_1} \sqrt{\Gamma_0 \pi}\,,$$

[1]) In Kgl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar, Bd. 22, N:o 2.

wo

$$\sigma = \frac{(i - i'\mu)^2}{3} \cdot \delta, \qquad k_1 = \frac{m'}{\sin 1''},$$

also

$$n \log \varkappa - \tfrac{1}{2} \log n < \log \frac{(i - i'\mu)^2}{3} \cdot \frac{\delta}{m'} \sin 1'' \sqrt{\Gamma_0 \pi} \quad . \quad . \quad (1)$$

μ ist das Verhältniss zwischen den mittleren siderischen Bewegungen vom grossen- und kleinen Planeten,

$i - i'\mu$ der kleine Divisor, welcher die grössten Glieder hervorbringt,

δ die Genauigkeit des Resultates,

π die LUDOPHIN'sche Zahl,

m' die Masse des grossen Planeten.

$$\frac{\Gamma_1}{\Gamma_0} = \frac{\varkappa}{1 + \varkappa^2}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$p = 2n,$$

wo p die zu berechnende Zahl ist.

$$\left.\begin{aligned}
&\Gamma_0 = \\
&= 1 + \alpha^2 + \tfrac{1}{2}e^2 + \tfrac{1}{2}\alpha^2 e'^2 - 2\alpha e e' A - \alpha(A + D)\cos(\varepsilon - \varepsilon') + \\
&\qquad + \alpha(B + C)\sin(\varepsilon - \varepsilon'); \\
&- \Gamma_1 \cos M = \\
&= -\alpha^2 e' + \alpha e A - (e - \alpha e' A)\cos(\varepsilon - \varepsilon') - \alpha e' C \sin(\varepsilon - \varepsilon'); \\
&- \Gamma_1 \sin M = \\
&= + \alpha e B + (e - \alpha e' A)\sin(\varepsilon - \varepsilon') - \alpha e' C \cos(\varepsilon - \varepsilon').
\end{aligned}\right\} (3)$$

In der obigen Formel (1) haben wir das Maximum von $\varkappa$ zu setzen; unsere nächste Aufgabe wird daher das Maximum von $\frac{\Gamma_1}{\Gamma_0}$ zu berechnen. Aus der Formel (3) bekommen wir, wenn wir Glieder zweiten Grades vernachlässigen

$$\Gamma_0 = 1 + \alpha^2 - \alpha(A + D)\cos(\varepsilon - \varepsilon') + \alpha(B + C)\sin(\varepsilon - \varepsilon');$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_1^2 = {} & \alpha^4 e'^2 + \alpha^2 e^2(A^2 + B^2) + e^2 + \alpha^2 e'^2 A^2 - 2\alpha e e' A + \alpha^2 e'^2 C^2 - \\
& - 2\alpha^3 e e' A + \\
& + 2\{\alpha^2 e e' - \alpha^3 e'^2 A - \alpha e^2 A + \alpha^2 e e' A^2 - \alpha^2 e e' BC\}\cos(\varepsilon - \varepsilon') \\
& + 2\{\alpha^3 e'^2 C - \alpha^2 e e' AC + \alpha e^2 B - \alpha^2 e e' AB\}\sin(\varepsilon - \varepsilon').
\end{aligned}$$

Die in diesen Formeln vorkommenden A, B, C und D sind:

$$A = \cos(\Pi - \Pi') - 2\sin^2\frac{I}{2}\sin\Pi\sin\Pi',$$

$$B = [\sin(\Pi - \Pi') - 2\sin^2\frac{I}{2}\sin\Pi\cos\Pi']\cos\varphi',$$

$$C = [\sin(\Pi - \Pi') + 2\sin^2\frac{I}{2}\cos\Pi\sin\Pi']\cos\varphi,$$

$$D = [\cos(\Pi - \Pi') - 2\sin^2\frac{I}{2}\cos\Pi\cos\Pi']\cos\varphi\cos\varphi'.$$

(Die Bezeichnungen sind überall, wo nicht anders gesagt wird, dieselben wie in HANSEN's »Auseinandersetzung einer zweckmässigen Metode die kleinen Planeten zu berechnen».)

Wenn wir jetzt in Γ_0 Glieder 2-ten Grades und in Γ_1^2 Glieder 4-ten Grades vernachlässigen, können wir setzen:

$$A = D = \cos(\Pi - \Pi'),$$
$$B = C = \sin(\Pi - \Pi'),$$

und bekommen so

$$\Gamma_0 = 1 + \alpha^2 - 2\alpha A\cos(\varepsilon - \varepsilon') + 2\alpha C\sin(\varepsilon - \varepsilon'),$$
$$\Gamma_1^2 = q^2[1 + \alpha^2 - 2\alpha A\cos(\varepsilon - \varepsilon') + 2\alpha C\sin(\varepsilon - \varepsilon')],$$

wo

$$q^2 = \alpha^2 e'^2 + e^2 - 2\alpha e e' A,$$

also

$$\frac{\Gamma_1^2}{q^2} = \Gamma_0$$

oder

$$\left(\frac{\Gamma_1}{\Gamma_0}\right)^2 = \frac{q^2}{\Gamma_0}.$$

Wir haben also das Maximum von $\frac{q^2}{\Gamma_0}$ zu suchen, unter Annahme dass $(\varepsilon - \varepsilon')$ die einzige Variable ist; also

$$\frac{\Gamma_1}{\Gamma_0} = \frac{q}{\alpha - 1}.$$

Wir können schreiben

$$q^2 = (\alpha e' + e)^2 \left(1 - \frac{4\alpha e e' \cos^2 \frac{1}{2}(\Pi - \Pi')}{(\alpha e' + e)^2}\right);$$

setzen wir

$$\sin^2 v = \frac{4\alpha e e' \cos^2 \frac{1}{2}(\Pi - \Pi')}{(\alpha e' + e)^2},$$

so wird

$$q = (\alpha e' + e) \cos v$$

und

$$\frac{\Gamma_1}{\Gamma_0} = \varkappa_0 \cos v ,$$

wo

$$\varkappa_0 = \frac{\alpha e' + e}{\alpha - 1} .$$

Wir haben ferner

$$\varkappa_0 \cos v = \frac{\varkappa}{1 + \varkappa^2};$$

setzen wir

$$2\varkappa_0 \cos v = \sin 2\omega ,$$

so wird

$$\varkappa = \operatorname{tg} \omega .$$

Wenn $\varkappa$ berechnet ist, erhält man n aus (1). In der ersten Annäherung berechnet man n aus der Formel

$$n_1 = \frac{H}{-\log \varkappa}, \quad \dots\dots\dots\dots \quad (4)$$

wo n_1 die erste Annäherung von n bedeutet und wo

$$H = -\log \frac{(i - i'\mu)^2}{3} \cdot \frac{\delta}{m'} \cdot \sin 1'' \sqrt{\Gamma_0 \pi} .$$

Gewöhnlich genügt diese erste Annäherung, nur nicht wenn e gross ist oder α klein ist.

Schreiben wir (1)

$$-n \log_{10} \varkappa + \tfrac{1}{2} \log_{10} n = H$$

und setzen

$$n = n_1 - d ,$$

wird

$$-(n_1-d)\log_{10}\varkappa+\tfrac{1}{2}\log_{10}(n_1-d)=H$$

oder

$$-(n_1-d)\log_{10}\varkappa+\tfrac{1}{2}\log_{10}n_1+\tfrac{1}{2}\log_{10}\left(1-\frac{d}{n_1}\right)=H$$

oder annähernd

$$-(n_1-d)\log_{10}\varkappa+\tfrac{1}{2}\log n_1-\tfrac{1}{2}\cdot\frac{d}{n_1}\log_{10}e=H,$$

also mit Rücksicht auf (4)

$$d=\frac{n_1}{2H+\log_{10}e}\log_{10}n_1,$$

aus welcher Formel die Korrektion d leicht berechnet ist, wenn n_1 und H bekannt sind.

$$\frac{d}{n_1}=\frac{\log_{10}n_1}{2H+\log_{10}e},$$

also, wenn z. B.

$$n_1=16 \text{ und } H=5,$$

so wird

$$\frac{d}{n_1}=0.11\,.$$

Im ungünstigen Falle wird also d nicht mehr als 11 % von n_1. Wenn $n>1$, so ist d pos., also $n<n_1$.

Der kleinste Wert von q ist

$$q=(\alpha e'-e);\quad \text{für } \cos(\Pi-\Pi')=1,$$

und, wenn also

$$\alpha e'=e,$$

wird q gleich Null und daher auch $\varkappa$ gleich Null, und also

$$p=0\,.$$

Unter diesen Umständen haben die vorigen Formeln keine Geltung. Wir haben nämlich in Γ_1 alle Glieder höheren Grades vernachlässigt, wenn aber $\alpha e'=e$, so ist die Summe aller Glieder ersten Grades gleich Null. In diesem Falle müssen wir statt dessen die Glieder 2:ten Grades mitnehmen. Γ_1 enthält

aber keine Glieder 2:ten Grades, sondern nur 1:sten, 3:ten etc. Grades. Gehen wir zu CHARLIER's Formel (87) pag. 42, hat er:

$$\left(\frac{a}{\Delta}\right)^s = [\Gamma_0 - 2\Gamma_1 \cos(\varepsilon' - M)]^{-s/2};$$

hier hat CHARLIER alle Glieder zweiten Grades vernachlässigt; die Formel sollte eigentlich heissen (sieh pag. 12)

$$\left(\frac{a}{\Delta}\right)^s = [\Gamma_0 - 2\Gamma_1 \cos(\varepsilon' - M) + \Gamma_2 \cos 2(\varepsilon' - N)]^{-s/2}.$$

Wenn wir hier Glieder dritten Grades und höher vernachlässigen und uns erinnern, dass, wenn $\alpha e' = e$, alle Glieder ersten Grades wegfallen, wird:

$$\left(\frac{a}{\Delta}\right)^s = [\Gamma_0 + \Gamma_2 \cos 2(\varepsilon' - N)]^{-s/2},$$

und für Bestimmung von $\varkappa$ bekommen wir statt (2) jetzt

$$-\frac{\Gamma_2}{\Gamma_0} = \frac{2\varkappa}{1 + \varkappa^2}.$$

Bestimmen wir hier max. von $\frac{\Gamma_2}{\Gamma_0}$, wobei Glieder zweiten Grades in A, B, C und D auch berücksichtigt werden, ergibt sich einen Ausdruck vom zweiten Grade in Bezug auf e und ι, wo

$$\iota = \sin\frac{I}{2}.$$

Diese Specialfälle sind doch von weniger Interesse; ersichtlich ist, dass in solchen Fällen p, wenn auch nicht Null, doch sehr klein ist.

Der Grund, dass p grösser ausfallen wird, wenn $\Pi - \Pi' = 180°$ als, wenn $\Pi - \Pi' = 0$, liegt darin, dass im vorigen Falle die beiden Planeten einander näher kommen können als im letzteren. Der kleinste Abstand ist resp.

$a[\alpha - 1 - \alpha e' - e]$ und $a[\alpha - 1 - \alpha e' + e]$ wenn, $\alpha e' > e$;
$a[\alpha - 1 - \alpha e' - e]$ und $a[\alpha - 1 + \alpha e' - e]$ wenn, $\alpha e' < e$.

Ist z. B. $\alpha = 2$, so wird für $\alpha e' = e = 0.1$ das Verhältniss zwischen den kleinsten Abständen für $\Pi - \Pi' = 180°$ und $\Pi - \Pi' = 0°$

$$\frac{\alpha - 1 - 2\alpha e'}{\alpha - 1} = 0.8 .$$

Auch wenn $\alpha e' \mp e$, wird p grösser für $\Pi - \Pi' = 180°$ als für $\Pi - \Pi' = 0°$, weil in dem Falle, dass $\alpha e' > e$,

$$\frac{\alpha - 1 - \alpha e' - e}{\alpha - 1 - \alpha e' + e} < 1$$

und, wenn $\alpha e' < e$,

$$\frac{\alpha - 1 - \alpha e' - e}{\alpha - 1 + \alpha e' - e} < 1 .$$

Wenn $\Pi - \Pi' = 0$, so wird p kleiner für $\alpha e' = e$ als für $\alpha e' \mp e$, weil der kleinste Abstand zwischen beiden Planeten sein Maximum erreicht, wenn $\alpha e' = e$. Minimum von p ist natürlich nicht nur, wenn $\Pi - \Pi' = 0$ und $\alpha e' = e$, sondern immer, wo $q = 0$ d. h.

$$\alpha^2 e'^2 + e^2 - 2\alpha e e' A = 0 ,$$

also nie für $e = 0$.

Aus der obigen Gleichung geht hervor, dass

$$e = \alpha e' A \pm \alpha e' A \sqrt{A^2 - 1} .$$

Damit e reel sein soll, muss

$$A \geqq 1 ,$$

also

$$\cos(\Pi - \Pi') - 2\iota^2 \sin \Pi \sin \Pi' \geqq 1 ,$$

und kann also unter diesen Umständen $\Pi - \Pi'$ nie weit von Null abweichen, und folglich wird immer Minimum von p für e beinahe gleich $\alpha e'$. Und obwohl e cirka 5° ist, genügt es den Kreis in nur etwa 4 Teilen zu teilen.

Hier haben wir nur einen äusseren Planeten in Betracht gezogen.

Um p in einem speziellen Falle zu berechnen, verfährt man folgendermassen: aus dem Jahrbuche nimmt man α, e', m',

$e = \sin\varphi$ und $\Pi - \Pi'$, was aprox. gleich $\pi - \pi'$ angenommen werden kann, und berechnet so p aus folgendem Formelsysteme:

$$H = -\log\frac{(i - i'\mu)^2}{3}\cdot\frac{\delta}{m'}\sin 1''\cdot(\alpha - 1)\sqrt{\pi}$$

$$\varkappa_0 = \frac{\alpha e' + e}{\alpha - 1}$$

$$\sin v = \frac{2\sqrt{\alpha e e'}\cos\frac{1}{2}(\Pi - \Pi')}{(\alpha e' + e)}$$

$$\sin 2\omega = 2\varkappa_0 \cos v$$

$$\varkappa = \operatorname{tg}\omega$$

$$n_1 = \frac{H}{-\log\varkappa}$$

$$d = \frac{n_1}{2H + \log_{10} e}\log_{10} n_1$$

$$n = n_1 - d$$

$$p = 2n\,.$$

Im folgenden will ich einige Tabellen geben, um die Berechnung von p zu erleichtern. Dabei habe ich nur den Jupiter berücksichtigt und $\delta = 0''.1$ gesetzt.

Tab. I enthält n_1 für gewisse Werte von φ, α und $\nu = i - i'\mu$ teils für $\Pi - \Pi' = 0°$, teils für $\Pi - \Pi' = 180°$. Will man n_1 für einen anderen Wert von $\delta = 0''.1\cdot 10^m$ haben, hat man nur das Glied $\frac{m}{\log\varkappa}$ zu n_1 aus der Tabelle zu addiren;

Tab. II giebt H für dieselben Werte von α und ν;

Tab. III enthält $\log 2\varkappa_0$ für die verschiedenen φ und α;

Tab. IV giebt $\log\cos v$.

Wenn man diese Tabellen anwenden will um p zu bestimmen, nimmt man zuerst n_1 aus Tab. I, teils für $\Pi - \Pi' = 0$, teils für $\Pi - \Pi' = 180°$ und man weiss, dass p zwischen den beiden Werten $2n_1$ liegen muss und hat so eine erste Annähe-

rung, die oft genügend ist, wenn es nur die **Frage** ist einen Planeten zu wählen. Um so p genauer zu berechnen nimmt man aus Tab. III $\log 2\varkappa_0$ und aus Tab. IV $\log\cos v$ und berechnet $\varkappa$ nach den Formeln

$$\sin 2\omega = 2\varkappa_0 \cos v$$
$$\varkappa = \operatorname{tg} \omega\,.$$

Aus Tab. II bekommt man H und erhält so n_1 aus

$$n_1 = \frac{H}{-\log \varkappa}\,.$$

Will man einen genaueren Wert von n haben, berechnet man darauf

$$d = \frac{n_1}{2H + \log_{10} e} \cdot \log_{10} n_1$$

und p wird

$$p = 2(n_1 - d)\,.$$

Tab. I. n_1

$\alpha = 2.5.$											
$\varphi =$	0°	2°	4°	6°	8°	10°	12°	14°	16°	18°	20°
					$\Pi - \Pi' = 0.$						
ν=0.1	4.9	4.3	3.7			3.3	4.3	4.9	5.4	5.9	6.5
0.09	5.0	4.4	3.7			3.3	4.4	5.0	5.5	6.0	6.6
0.08	5.0	4.5	3.8			3.4	4.4	5.0	5.6	6.2	6.8
0.07	5.1	4.6	3.9			3.5	4.5	5.1	5.7	6.3	6.8
0.06	5.2	4.7	4.0			3.5	4.6	5.2	5.9	6.5	7.1
0.05	5.4	4.8	4.1			3.6	4.8	5.4	6.0	6.6	7.2
0.04	5.6	4.9	4.2			3.8	4.9	5.6	6.2	6.8	7.4
0.03	5.8	5.1	4.4			3.9	5.1	5.8	6.5	7.1	7.8
0.02	6.1	5.4	4.6			4.1	5.4	6.2	6.8	7.5	8.1
0.01	6.7	5.9	5.0	$q = 0$	$q = 0$	4.5	5.9	6.8	7.4	8.1	8.9
0.009	6.7	6.0	5.1			4.6	6.0	6.8	7.6	8.3	9.1
0.008	6.9	6.1	5.2			4.6	6.1	6.9	7.6	8.3	9.1
0.007	6.9	6.2	5.2			4.7	6.1	6.9	7.8	8.5	9.3
0.006	7.1	6.3	5.3			4.8	6.2	7.1	7.9	8.7	9.4
0.005	7.2	6.4	5.4			4.9	6.4	7.2	8.1	8.9	9.7
0.004	7.4	6.6	5.6			5.0	6.5	7.4	8.3	9.1	9.8
0.003	7.6	6.8	5.7			5.1	6.7	7.6	8.5	9.3	10.2
0.002	7.9	7.0	6.0			5.4	7.0	7.9	8.9	9.7	10.6
0.001	8.5	7.5	6.4			5.7	7.5	8.5	9.5	10.4	11.4
					$\Pi - \Pi' = 180°.$						
ν=0.1	4.9	5.4	6.0	6.6	7.2	7.8	8.3	9.1	9.8	10.6	11.6
0.09	5.0	5.5	6.1	6.7	7.3	7.9	8.5	9.2	10.0	10.8	11.8
0.08	5.0	5.6	6.2	6.8	7.4	8.0	8.7	9.4	10.2	11.0	12.0
0.07	5.1	5.7	6.3	6.9	7.6	8.2	8.9	9.6	10.4	11.3	12.2
0.06	5.2	5.8	6.5	7.1	7.8	8.4	9.1	9.8	10.7	11.5	12.5
0.05	5.4	6.0	6.6	7.3	7.9	8.6	9.3	10.1	11.0	11.9	12.9
0.04	5.6	6.2	6.9	7.6	8.1	8.9	9.6	10.5	11.3	12.3	13.3
0.03	5.8	6.6	7.2	7.9	8.5	9.3	10.0	10.9	11.8	12.7	13.8
0.02	6.1	6.9	7.6	8.3	9.0	9.8	10.6	11.5	12.4	13.4	14.6
0.01	6.7	7.4	8.3	9.0	9.8	10.6	11.5	12.5	13.5	14.6	15.9
0.009	6.7	7.6	8.4	9.2	10.0	10.8	11.7	12.7	13.7	14.8	16.1
0.008	6.9	7.6	8.5	9.3	10.1	10.9	11.8	12.8	13.9	15.0	16.3
0.007	6.9	7.8	8.5	9.4	10.3	11.1	12.0	13.0	14.1	15.2	16.6
0.006	7.1	7.9	8.7	9.6	10.4	11.3	12.2	13.2	14.3	15.5	16.8
0.005	7.2	8.1	8.9	9.8	10.7	11.5	12.5	13.5	14.7	15.9	17.2
0.004	7.4	8.3	9.1	10.0	10.9	11.8	12.8	13.8	15.0	16.2	17.6
0.003	7.6	8.5	9.3	10.3	11.3	12.2	13.2	14.3	15.5	16.7	18.2
0.002	7.9	8.9	9.7	10.8	11.7	12.7	13.7	14.9	16.1	17.4	18.9
0.001	8.5	9.5	10.5	11.5	12.5	13.6	14.7	15.9	17.2	18.6	20.2

Tab. I. (Forts.). n_1

$\alpha = 2.4.$											
$\varphi =$	0°	2°	4°	6°	8°	10°	12°	14°	16°	18°	20°
					$\Pi - \Pi' = 0.$						
ν=0.1	5.0	4.3	3.6		2.2	3.7	4.6	5.1	5.6	6.3	6.8
0.09	5.1	4.4	3.7		2.2	3.8	4.7	5.3	5.8	6.3	6.9
0.08	5.2	4.5	3.8		2.2	3.9	4.7	5.4	5.9	6.5	7.1
0.07	5.3	4.6	3·8		2.3	4.0	4.8	5.5	6.0	6.6	7.2
0.06	5.4	4.7	3.9		2.3	4.1	4.9	5.6	6.2	6.8	7.4
0.05	5.6	4.8	4.0		2.4	4.2	5.0	5.8	6.3	6.9	7.6
0.04	5.8	5.0	4.2		2.5	4.3	5.3	5.9	6.5	7.2	7.8
0.03	6.0	5.1	4.3		2.6	4.5	5.5	6.2	6.8	7.4	8.1
0.02	6.3	5.5	4.6	$q = 0$	2.8	4.7	5.8	6.5	7.1	7.9	8.7
0.01	6.8	5.9	4.9		3.0	5.1	6.3	7.1	7.8	8.5	9.3
0.009	6.9	6.0	5.0		3.0	5.2	6.3	7.1	7.9	8.7	9.6
0.008	7.0	6.1	5.1		3.1	5.3	6.4	7.2	7.9	8.8	9.8
0.007	7.1	6.2	5.2		3.1	5.4	6.5	7.4	8.1	8.9	9.8
0.006	7.3	6.3	5.3		3.2	5.5	6.6	7.4	8.3	9.1	10.0
0.005	7.4	6.5	5.4		3.2	5.6	6.8	7.6	8.5	9.3	10.2
0.004	7.6	6.6	5.5		3.3	5.7	6.9	7.8	8.6	9.4	10.4
0.003	7.8	6.8	5.6		3.4	5.9	7.1	8.0	8.9	9.8	10.7
0.002	8.1	7.1	5.9		3.6	6.0	7.4	8.4	9.3	10.2	11.2
0.001	8.7	7.6	6.3		3.8	6.6	7.9	8.9	9.8	10.9	11.9
					$\Pi - \Pi' = 180°.$						
ν=0.1	5.0	5.6	6.2	6.8	7.4	8.1	8.8	9.6	10.4	11.4	12.6
0.09	5.1	5.7	6.3	6.9	7.5	8.2	9.0	9.8	10.6	11.6	12.8
0.08	5.2	5.8	6.4	7.0	7.7	8.4	9.1	9.9	10.8	11.9	13.0
0.07	5.3	5.9	6.5	7.2	7.8	8.5	9.3	10.0	11.0	12.1	13.3
0.06	5.4	6.0	6.7	7.3	8.0	8.7	9.5	10.4	11.3	12.4	13.6
0.05	5.6	6.2	6.9	7.6	8.2	9.0	9.8	10.7	11.6	12.7	14.0
0.04	5.8	6.4	7.1	7.8	8.5	9.3	10.1	11.0	11.9	13.1	14.5
0.03	6.0	6.6	7.4	8.1	8.8	9.6	10.5	11.5	12.5	13.6	15.0
0.02	6.3	7.0	7.8	8.6	9.3	10.2	11.1	12.1	13.1	14.4	15.9
0.01	6.8	7.6	8.5	9.3	10.2	11.1	12.1	13.2	14.3	15.7	17.3
0.009	6.9	7.7	8.6	9.4	10.3	11.2	12.2	13.3	14.5	15.9	17.5
0.008	7.0	7.9	8.7	9.6	10.5	11.4	12.4	13.5	14.7	16.1	17.7
0.007	7.1	8.0	8.8	9.7	10.6	11.5	12.6	13.7	14.9	16.3	18.0
0.006	7.3	8.1	9.0	9.9	10.8	11.8	12.8	14.0	15.2	16.6	18.3
0.005	7.4	8.3	9.2	10.1	11.0	12.0	13.1	14.3	15.5	16.9	18.7
0.004	7.6	8.5	9.4	10.3	11.3	12.3	13.4	14.6	15.9	17.4	19.1
0.003	7.8	8.7	9.7	10.6	11.6	12.6	13.8	15.0	16.3	17.9	19.7
0.002	8.1	9.1	10.1	11.1	12.1	13.2	14.4	15.7	17.0	18.7	20.1
0.001	8.7	9.7	10.8	11.8	12.9	14.1	15.4	16.7	18.2	19.9	21.9

Tab. I. (Forts.). n_1

$\alpha = 2.3.$											
$\varphi =$	0°	2°	4°	6°	8°	10°	12°	14°	16°	18°	20°
					$\Pi - \Pi' = 0.$						
ν=0.1	5.0	4.4	3.6		3.1	4.1	4.8	5.5	6.0	6.7	7.4
0.09	5.1	4.5	3.6		3.2	4.2	4.9	5.5	6.2	6.8	7.4
0.08	5.3	4.6	3.7		3.2	4.2	5.0	5.6	6.3	6.9	7.6
0.07	5.4	4.6	3.8		3.3	4.3	5.1	5.8	6.5	7.1	7.8
0.06	5.5	4.7	3.9		3.3	4.4	5.2	5.9	6.6	7.2	7.9
0.05	5.6	4.9	4.0		3.5	4.5	5.4	6.0	6.8	7.4	8.1
0.04	5.8	5.0	4.1		3.6	4.7	5.5	6.3	6.9	7.7	8.5
0.03	6.0	5.2	4.3		3.7	4.9	5.7	6.5	7.2	7.9	8.7
0.02	6.3	5.5	4.6		3.9	5.1	6.0	6.9	7.6	8.5	9.1
0.01	6.9	6.0	4.9	$q = 0$	4.3	5.6	6.6	7.4	8.3	9.1	10.0
0.009	7.1	6.1	5.0		4.3	5.6	6.7	7.6	8.5	9.3	10.2
0.008	7.1	6.2	5.0		4.4	5.8	6.8	7.6	8.5	9.3	10.3
0.007	7.2	6.3	5.1		4.5	5.8	6.9	7.8	8.7	9.6	10.5
0.006	7.4	6.3	5.2		4.5	5.8	7.0	7.9	8.9	9.8	10.6
0.005	7.6	6.5	5.3		4.6	6.0	7.1	8.1	9.0	9.9	10.9
0.004	7.8	6.6	5.5		4.7	6.2	7.2	8.3	9.2	10.1	11.1
0.003	7.9	6.9	5.6		4.8	6.3	7.6	8.5	9.4	10.5	11.4
0.002	8.3	7.1	5.9		5.0	6.6	7.8	8.9	9.8	10.9	11.9
0.001	8.9	7.6	6.2		5.4	7.1	8.3	9.6	10.6	11.6	12.8
					$\Pi - \Pi' = 180°.$						
ν=0.1	5.0	5.8	6.3	7.1	7.8	8.5	9.3	10.2	11.2	12.3	13.8
0.09	5.1	5.9	6.4	7.2	7.9	8.7	9.5	10.4	11.4	12.6	14.1
0.08	5.3	5.9	6.6	7.2	7.9	8.7	9.7	10.6	11.6	12.8	14.3
0.07	5.4	6.0	6.8	7.4	8.1	8.9	9.8	10.8	11.9	13.0	14.6
0.06	5.5	6.2	6.9	7.6	8.3	9.1	10.1	11.0	12.1	13.3	14.9
0.05	5.6	6.3	7.1	7.8	8.5	9.3	10.3	11.3	12.4	13.7	15.4
0.04	5.8	6.6	7.2	8.1	8.9	9.6	10.7	11.7	12.9	14.2	15.8
0.03	6.0	6.8	7.6	8.3	9.2	10.0	11.1	12.2	13.4	14.7	16.5
0.02	6.3	7.2	7.9	8.9	9.7	10.7	11.7	12.9	14.1	15.5	17.4
0.01	6.9	7.8	8.7	9.6	10.6	11.6	12.7	14.0	15.4	16.9	18.9
0.009	7.1	7.9	8.9	9.8	10.7	11.8	12.9	14.2	15.6	17.1	19.2
0.008	7.1	8.1	8.9	9.9	10.9	11.9	13.1	14.4	15.8	17.4	19.5
0.007	7.2	8.1	9.1	10.0	11.0	12.1	13.3	14.6	16.0	17.6	19.7
0.006	7.4	8.3	9.3	10.2	11.2	12.3	13.5	14.8	16.3	17.9	20.1
0.005	7.6	8.5	9.6	10.4	11.4	12.6	13.8	15.1	16.6	18.3	20.5
0.004	7.8	8.7	9.8	10.7	11.7	12.8	14.1	15.5	17.0	18.7	20.9
0.003	7.9	8.9	10.0	11.0	12.0	13.2	14.5	15.9	17.5	19.3	21.5
0.002	8.3	9.3	10.4	11.5	12.6	13.8	15.2	16.7	18.3	20.1	22.5
0.001	8.9	10.0	11.1	12.2	13.4	14.8	16.2	17.7	19.5	21.5	24.0

Tab. I. (Forts.). n_1

$\alpha = 2.2.$											
$\varphi =$	0°	2°	4°	6°	8°	10°	12°	14°	16°	18°	20°
					$\Pi - \Pi' = 0.$						
ν=0.1	5.1	4.5	3.6		3.4	4.3	5.1	5.8	6.5	7.1	7.9
0.09	5.3	4.5	3.7		3.5	4.4	5.1	5.9	6.6	7.2	7.9
0.08	5.4	4.6	3.8		3.5	4.5	5.3	6.0	6.7	7.4	8.1
0.07	5.5	4.7	3.8		3.6	4.6	5.4	6.2	6.8	7.6	8.3
0.06	5.6	4.8	3.9		3.6	4.7	5.5	6.3	6.9	7.8	8.5
0.05	5.8	4.9	4.0		3.7	4.8	5.6	6.5	7.1	7.9	8.7
0.04	5.9	5.1	4.2		3.9	4.9	5.9	6.6	7.4	8.1	9.1
0.03	6.2	5.3	4.4		4.1	5.1	6.0	6.9	7.7	8.5	9.3
0.02	6.5	5.6	4.6	$q = 0$	4.3	5.4	6.3	7.2	8.1	8.9	9.8
0.01	7.1	6.0	5.0		4.6	5.9	6.9	7.9	8.7	9.8	10.7
0.009	7.2	6.2	5.0		4.7	5.9	7.1	7.9	8.9	9.9	10.9
0.008	7.2	6.3	5.1		4.8	6.0	7.1	8.1	9.1	10.0	11.1
0.007	7.4	6.3	5.3		4.8	6.2	7.2	8.3	9.1	10.2	11.2
0.006	7.6	6.5	5.3		4.9	6.2	7.4	8.3	9.3	10.4	11.4
0.005	7.7	6.6	5.4		5.0	6.3	7.6	8.5	9.6	10.6	11.6
0.004	7.8	6.8	5.5		5.1	6.5	7.8	8.7	9.8	10.8	11.8
0.003	8.1	6.9	5.6		5.3	6.6	7.9	8.9	10.0	11.1	12.2
0.002	8.4	7.2	5.7		5.5	6.9	8.3	9.3	10.5	11.6	12.8
0.001	9.0	7.8	6.3		5.9	7.4	8.9	10.0	11.2	12.4	13.6
					$\Pi - \Pi' = 180°.$						
ν=0.1	5.1	5.9	6.6	7.3	8.1	8.9	10.0	11.0	12.3	13.7	15.6
0.09	5.3	6.0	6.8	7.4	8.3	9.1	10.1	11.1	12.5	13.9	15.9
0.08	5.4	6.2	6.9	7.6	8.4	9.3	10.3	11.4	12.7	14.2	16.2
0.07	5.5	6.2	7.0	7.8	8.5	9.6	10.5	11.6	13.0	14.5	16.5
0.06	5.6	6.3	7.1	7.9	8.7	9.8	10.7	11.9	13.2	14.8	16.9
0.05	5.8	6.5	7.3	8.1	8.9	10.0	11.0	12.2	13.5	15.2	17.3
0.04	5.9	6.8	7.6	8.4	9.3	10.3	11.4	12.6	14.1	15.7	18.0
0.03	6.2	7.1	7.9	8.7	9.7	10.7	11.8	13.1	14.6	16.4	18.6
0.02	6.5	7.4	8.3	9.2	10.2	11.3	12.5	13.8	15.4	17.2	19.6
0.01	7.1	8.0	9.0	10.0	11.1	12.3	13.5	15.0	16.8	18.8	21.3
0.009	7.2	8.1	9.1	10.1	11.2	12.4	13.7	15.2	16.9	19.0	21.6
0.008	7.2	8.3	9.3	10.3	11.4	12.6	13.9	15.4	17.2	19.3	21.9
0.007	7.4	8.3	9.4	10.5	11.5	12.8	14.1	15.6	17.5	19.5	22.2
0.006	7.6	8.5	9.6	10.6	11.7	13.0	14.4	15.9	17.8	19.9	22.7
0.005	7.7	8.7	9.8	10.8	12.0	13.2	14.7	16.2	18.1	20.3	23.1
0.004	7.8	8.9	10.0	11.1	12.2	13.6	15.0	16.6	18.5	20.8	23.6
0.003	8.1	9.1	10.3	11.4	12.6	14.0	15.5	17.1	19.1	21.4	24.3
0.002	8.4	9.6	10.7	11.9	13.2	14.6	16.1	17.8	19.9	22.3	25.3
0.001	9.0	10.2	11.5	12.7	14.1	15.6	17.2	19.1	21.3	23.8	27.1

Tab. I. (Forts.). n_1

$\alpha = 2.1.$											
$\varphi =$	0°	2°	4°	6°	8°	10°	12°	14°	16°	18°	20°
					$\Pi - \Pi' = 0.$						
$\nu = 0.1$	5.8	4.5	3.6		2.8	4.6	5.5	6.2	6.9	7.8	8.5
0.09	5.4	4.6	3.6		2.8	4.7	5.5	6.3	7.1	7.9	8.7
0.08	5.5	4.7	3.7		2.9	4.8	5.6	6.5	7.2	8.1	8.9
0.07	5.6	4.8	3.8		2.9	4.9	5.8	6.6	7.2	8.1	9.1
0.06	5.8	4.9	3.9		3.0	5.0	5.9	6.8	7.4	8.3	9.3
0.05	5.9	5.0	4.0		3.1	5.1	6.0	6.9	7.7	8.7	9.6
0.04	6.0	5.1	4.1		3.2	5.3	6.3	7.1	7.9	8.9	9.8
0.03	6.3	5.4	4.3		3.3	5.5	6.3	7.4	8.3	9.3	10.2
0.02	6.6	5.6	4.5		3.5	5.8	6.9	7.8	8.7	9.8	10.7
0.01	7.2	6.1	4.9	$q = 0$	3.8	6.3	7.4	8.3	9.6	10.7	11.7
0.009	7.4	6.2	4.9		3.8	6.3	7.6	8.5	9.6	10.7	12.0
0.008	7.4	6.3	5.0		3.9	6.5	7.6	8.7	9.8	11.0	12.0
0.007	7.6	6.4	5.1		3.9	6.6	7.8	8.7	9.8	11.0	12.3
0.006	7.6	6.5	5.1		4.0	6.6	7.9	8.9	10.0	11.2	12.3
0.005	7.8	6.6	5.3		4.1	6.8	8.1	9.1	10.2	11.5	12.6
0.004	7.9	6.8	5.4		4.2	6.9	8.3	9.3	10.5	11.7	12.9
0.003	8.3	6.9	5.5		4.3	7.1	8.5	9.5	10.7	12.0	13.3
0.002	8.5	7.2	5.8		4.5	7.4	8.9	10.0	11.2	12.6	13.9
0.001	9.1	7.8	6.2		4.8	7.9	9.3	10.7	12.0	13.5	14.8
					$\Pi - \Pi' = 180°.$						
$\nu = 0.1$	5.8	6.1	6.9	7.7	8.5	9.6	10.7	12.0	13.7	15.7	18.4
0.09	5.4	6.2	7.1	7.8	8.7	9.8	10.9	12.2	13.9	15.9	18.7
0.08	5.5	6.3	7.1	7.9	8.9	10.0	11.1	12.4	14.1	16.2	19.0
0.07	5.6	6.5	7.2	8.1	9.1	10.1	11.3	12.7	14.4	16.6	19.5
0.06	5.8	6.6	7.4	8.3	9.3	10.3	11.6	13.0	14.8	16.9	19.9
0.05	5.9	6.8	7.6	8.5	9.6	10.6	11.9	13.3	15.1	17.4	20.4
0.04	6.0	6.9	7.9	8.8	9.8	11.0	12.2	13.7	15.6	18.0	21.1
0.03	6.3	7.2	8.2	9.2	10.2	11.4	12.7	14.3	16.3	18.7	21.9
0.02	6.6	7.6	8.7	9.8	10.8	12.0	13.4	15.1	17.1	19.7	23.1
0.01	7.2	8.3	9.3	10.5	11.7	13.1	14.6	16.4	18.6	21.4	25.1
0.009	7.4	8.5	9.5	10.6	11.9	13.2	14.8	16.6	18.9	21.6	25.5
0.008	7.4	8.5	9.6	10.8	12.0	13.4	15.0	16.8	19.1	21.9	25.8
0.007	7.6	8.7	9.8	10.9	12.2	13.6	15.2	17.1	19.4	22.3	26.2
0.006	7.6	8.9	10.0	11.1	12.4	13.8	15.5	17.3	19.7	22.7	26.6
0.005	7.8	9.0	10.2	11.4	12.6	14.1	15.9	17.7	20.1	23.1	27.2
0.004	7.9	9.2	10.4	11.6	13.0	14.5	16.2	18.2	20.7	23.7	27.9
0.003	8.3	9.5	10.7	11.9	13.3	14.9	16.6	18.7	21.2	24.4	28.6
0.002	8.5	9.9	11.2	12.5	13.9	15.5	17.3	19.5	22.1	25.4	29.8
0.001	9.1	10.5	11.9	13.3	14.8	16.6	18.5	20.8	23.6	27.1	31.8

Tab. I. (Forts.). n_1

$\alpha = 2.0.$											
$\varphi =$	0°	2°	4°	6°	8°	10°	12°	14°	16°	18°	20°
					$\Pi - \Pi' = 0.$						
ν=0.1	5.5	4.6	3.6		4.0	5.0	5.8	6.6	7.6	8.5	9.6
0.09	5.6	4.7	3.6		4.1	5.0	5.9	6.8	7.6	8.5	9.8
0.08	5.6	4.8	3.7		4.2	5.1	6.0	6.9	7.8	8.7	9.8
0.07	5.8	4.9	3.8		4.3	5.3	6.2	7.1	7.9	8.9	10.0
0.06	5.9	5.0	3.9		4.4	5.4	6.3	7.2	8.1	9.1	10.2
0.05	6.0	5.1	4.0		4.5	5.5	6.5	7.4	8.3	9.3	10.5
0.04	6.3	5.3	4.1		4.6	5.7	6.6	7.6	8.7	9.8	11.0
0.03	6.5	5.5	4.3		4.8	5.9	6.9	7.9	8.9	10.0	11.5
0.02	6.9	5.8	4.5		5.0	6.3	7.2	8.3	9.6	10.7	12.0
0.01	7.4	6.3	4.9	$\varphi = 0$	5.5	6.8	7.9	9.1	10.2	11.5	12.9
0.009	7.6	6.3	5.0		5.5	6.9	7.9	9.1	10.4	11.7	13.2
0.008	7.6	6.5	5.0		5.6	6.9	8.1	9.3	10.5	11.7	13.4
0.007	7.8	6.5	5 1		5.6	7.1	8.3	9.3	10.7	12.0	13.5
0.006	7.9	6.6	5.2		5.7	7.2	8.3	9.6	11.0	12.3	13.7
0.005	8.1	6.8	5.3		5.9	7.2	8.5	9.8	11.1	12.9	14.0
0.004	8.3	6.9	5.4		6.0	7.4	8.7	10.0	11.3	12.9	14.4
0.003	8.5	7.1	5.6		6.2	7.8	9.1	10.2	11.7	13.2	14.8
0.002	8.9	7.4	5.8		6.5	8.1	9.3	10.7	12.2	13.8	15.5
0.001	9.4	7.9	6.2		6.9	8.5	10.0	11.5	12.9	14.5	16.4
					$\Pi - \Pi' = 180°.$						
ν=0.1	5.5	6.3	7.2	8.1	9.1	10.2	11.8	13.5	15.8	19.1	24.4
0.09	5.6	6.5	7.2	8.3	9.3	10.4	12.0	13.7	16.1	19.4	24.8
0.08	5.6	6.6	7.4	8.5	9.6	10.5	12.2	13.9	16.4	19.7	25.2
0.07	5.8	6.6	7.6	8.7	9.8	10.8	12.5	14.2	16.7	20.1	25.8
0.06	5.9	6.8	7.8	8.9	10.0	11.0	12.7	14.6	17.1	20.6	26.4
0.05	6.0	7.1	8.0	9.1	10.2	11.3	13.1	14.9	17.5	21.1	27.0
0.04	6.3	7.2	8.3	9.3	10.5	11.7	13.5	15.4	18.1	21.8	27.9
0.03	6.5	7.6	8.5	9.7	10.9	12.1	14.0	16.0	18.8	22.7	29.0
0.02	6.9	7.9	9.1	10.2	11.5	12.8	14.8	16.9	19.9	23.9	30.6
0.01	7.4	8.6	9.8	11.1	12.5	13.9	16.1	18.4	21.6	26.0	33.3
0.009	7.6	8.7	10.0	11.3	12.7	14.1	16.3	18.6	21.8	26.3	33.7
0.008	7.6	8.9	10.1	11.4	12.9	14.3	16.5	18.8	22.1	26.7	34.1
0.007	7.8	8.9	10.2	11.6	13.0	14.5	16.7	19.1	22.4	27.0	34.6
0.006	7.9	9.1	10.4	11.7	13.2	14.7	17.0	19.4	22.8	27.5	35.2
0.005	8.1	9.3	10.6	12.0	13.5	15.0	17.3	19.8	23.3	28.1	35.9
0.004	8.3	9.6	10.9	12.3	13.9	15.4	17.8	20.3	23.9	28.8	36.9
0.003	8.5	9.8	11.2	12.7	14.3	15.9	18.3	20.9	24.7	29.7	38.0
0.002	8.9	10.2	11.6	13.2	14.9	16.5	19.0	21.8	25.6	30.8	39.5
0.001	9.4	10.9	12.4	14.1	15.9	17.6	20·3	23.2	27.3	32.9	42.1

Tab. I. (Forts.). n_1

$\alpha = 1.9.$											
$\varphi =$	0°	2°	4°	6°	8°	10°	12°	14°	16°	18°	20°
						$\Pi - \Pi' = 0.$					
ν=0.1	5.6	4.7	3.6	4.2	4.3	5.4	6.3	7.2	8.3	9.3	10.7
0.09	5.8	4.8	3.6	4.3	4.4	5.5	6.5	7.4	8.5	9.6	11.0
0.08	5.9	4.8	3.6	4.3	4.5	5.5	6.5	7.6	8.5	9.8	11.2
0.07	6.0	4.9	3.7	4.4	4.6	5.6	6.6	7.8	8.7	10.0	11.5
0.06	6.1	5.0	3.8	4.5	4.7	5.8	6.8	7.8	8.9	10.2	11.7
0.05	6.3	5.1	3.9	4.6	4.8	5.9	6.9	8.1	9.1	10.5	12.0
0.04	6.5	5.4	4.1	4.8	5.0	6.2	7.2	8.3	9.5	10.7	12.3
0.03	6.8	5.5	4.2	4.9	5.1	6.4	7.4	8.7	9.9	11.2	12.9
0.02	7.1	5.9	4.4	5.3	5.4	6.7	7.9	9.1	10.4	11.7	13.5
0.01	7.7	6.3	4.8	5.6	5.9	7.2	8.5	10.0	11.3	12.9	14.8
0.009	7.8	6.5	4.9	5.8	5.9	7.4	8.7	10.0	11.5	12.9	14.9
0.008	7.9	6.5	4.9	5.8	6.0	7.4	8.7	10.2	11.5	13.1	15.0
0.007	7.9	6.6	5.0	5.9	6.2	7.6	8.9	10.2	11.7	13.3	15.1
0.006	8.1	6.8	5.1	6.0	6.2	7.8	9.1	10.5	12.0	13.5	15.5
0.005	8.3	6.9	5.1	6.2	6.3	7.9	9.3	10.7	12.3	13.8	15.8
0.004	8.5	7.1	5.3	6.3	6.5	8.1	9.6	11.0	12.6	14.1	16.2
0.003	8.7	7.2	5.5	6.5	6.6	8.3	9.8	11.2	12.9	14.5	16.6
0.002	9.1	7.6	5.6	6.6	6.9	8.7	10.2	11.7	13.5	15.1	17.4
0.001	9.7	8.1	6.0	7.1	7.4	9.1	10.7	12.6	14.5	16.2	18.6
						$\Pi - \Pi' = 180°.$					
ν=0.1	5.6	6.6	7.6	8.7	10.0	11.4	13.3	15.9	19.6	26.1	48.3
0.09	5.8	6.8	7.8	8.9	10.1	11.6	13.5	16.1	20.0	26.6	49.1
0.08	5.9	6.9	7.9	9.1	10.3	11.8	13.8	16.4	20.3	27.0	50.0
0.07	6.0	6.9	8.1	9.3	10.5	12.1	14.1	16.8	20.7	27.6	51.1
0.06	6.1	7.1	8.3	9.4	10.8	12.3	14.3	17.1	21.2	28.2	52.1
0.05	6.3	7.4	8.5	9.7	11.1	12.7	14.8	17.6	21.8	29.0	53.6
0.04	6.5	7.6	8.7	10.0	11.4	13.1	15.2	18.1	22.4	29.9	55.2
0.03	6.8	7.9	9.1	10.4	11.9	13.6	15.9	18.8	23.3	31.1	57.4
0.02	7.1	8.3	9.6	10.9	12.5	14.3	16.6	19.8	24.6	32.7	60.4
0.01	7.7	8.9	10.4	11.9	13.6	15.6	18.1	21.6	26.7	35.6	65.8
0.009	7.8	9.1	10.5	12.0	13.7	15.7	18.3	21.8	27.0	36.0	66.5
0.008	7.9	9.1	10.6	12.2	13.9	15.9	18.5	22.1	27.4	36.4	67.3
0.007	7.9	9.3	10.8	12.4	14.1	16.2	18.8	22.4	27.8	37.0	68.4
0.006	8.1	9.6	11.0	12.6	14.3	16.4	19.1	22.8	28.3	37.6	69.5
0.005	8.3	9.8	11.2	12.8	14.7	16.8	19.5	23.3	28.8	38.4	71.0
0.004	8.5	10.0	11.5	13.1	15.0	17.2	20.0	23.8	29.5	39.3	72.6
0.003	8.7	10.2	11.8	13.5	15.5	17.7	20.6	24.6	30.4	40.1	74.8
0.002	9.1	10.6	12.3	14.1	16.1	18.4	21.4	25.5	31.6	42.1	77.8
0.001	9.7	11.4	13.2	15.0	17.2	19.7	22.9	27.3	33.8	45.0	83.2

Tab. I. (Forts.). n_1

$\alpha = 1.8.$											
$\varphi =$	0°	2°	4°	6°	8°	10°	12°	14°	16°	18°	20°
					$\Pi - \Pi' = 0.$						
ν=0.1	5.9	4.7	3.4	2.5	4.7	5.8	6.9	8.1	9.3	10.8	12.7
0.09	6.0	4.8	3.5	2.5	4.8	5.9	7.1	8.1	9.6	11.0	12.9
0.08	6.0	4.9	3.6	2.6	4.8	6.0	7.1	8.3	9.6	11.2	13.1
0.07	6.2	5.0	3.6	2.6	4.9	6.2	7.2	8.5	9.8	11.4	13.4
0.06	6.3	5.1	3.7	2.6	5.0	6.3	7.4	8.7	10.1	11.7	13.7
0.05	6.5	5.3	3.8	2.8	5.1	6.5	7.6	8.9	10.3	12.0	14.1
0.04	6.8	5.4	3.9	2.8	5.3	6.7	7.9	9.1	10.6	12.4	14.5
0.03	6.9	5.6	4.1	3.0	5.5	6.9	8.1	9.6	11.0	12.9	15.1
0.02	7.4	5.9	4.3	3.1	5.8	7.3	8.7	10.1	11.6	13.6	15.9
0.01	7.9	6.5	4.7	3.3	6.3	7.9	9.3	10.9	12.6	14.7	17.2
0.009	8.1	6.5	4.7	3.4	6.3	8.0	9.6	11.0	12.8	14.9	17.5
0.008	8.1	6.8	4.8	3.4	6.5	8.1	9.6	11.2	12.9	15.1	17.7
0,007	8.3	6.8	4.9	3.5	6.6	8.2	9.8	11.4	13.1	15.3	18.0
0.006	8.5	6.8	4.9	3.6	6.6	8.4	10.0	11.5	13.4	15.6	18.2
0.005	8.5	6.9	5.0	3.6	6.8	8.5	10.1	11.8	13.6	15.9	18.6
0.004	8.8	7.1	5.1	3.7	6.9	8.7	10.4	12.0	13.9	16.2	19.0
0.003	9.1	7.2	5.2	3.8	7.1	9.0	10.7	12.4	14.4	16.7	19.6
0.002	9.3	7.6	5.5	4.0	7.4	9.4	11.1	12.9	15.0	17.4	20.4
0.001	10.0	8.1	5.9	4.3	7.9	10.0	11.9	13.8	16.0	18.6	21.8
					$\Pi - \Pi' = 180°.$						
ν=0.1	5.9	7.0	8.1	9.5	11.0	13.0	15.8	20.0	28.9		
0.09	6.0	7.1	8.3	9.6	11.2	13.2	16.1	20.3	29.4		
0.08	6.0	7.2	8.5	9.8	11.4	13.5	16.3	20.6	29.9		
0.07	6.2	7.4	8.5	10.0	11.6	13.7	16.7	21.0	30.5		
0.06	6.3	7.6	8.7	10.2	11.9	14.1	17.1	21.5	31.2		
0.05	6.5	7.8	9.0	10.5	12.2	14.4	17.5	22.1	32.0		
0.04	6.8	7.9	9.3	10.8	12.6	14.9	18.0	22.7	33.0		
0.03	6.9	8.3	9.7	11.3	13.1	15.5	18.7	23.7	34.3		
0.02	7.4	8.7	10.2	11.9	13.8	16.3	19.8	25.0	36.1		
0.01	7.9	9.6	11.0	12.9	14.9	17.7	21.4	27.0	39.2	$x > 1$	$x > 1$
0.009	8.1	9.6	11.2	13.0	15.1	17.9	21.7	27.4	39.7		
0.008	8.1	9.8	11.3	13.2	15.3	18.1	22.0	27.7	40.2		
0.007	8.3	9.8	11.5	13.4	15.6	18.4	22.3	28.2	40.8		
0.006	8.5	10.0	11.7	13.6	15.8	18.7	22.7	28.7	41.5		
0.005	8.5	10.2	11.9	13.9	16.1	19.1	23.1	29.2	42.3		
0.004	8.8	10.4	12.2	14.2	16.5	19.5	23.7	30.0	43.2		
0.003	9.1	10.7	12.6	14.6	17.0	20.1	24.4	30.8	44.6		
0.002	9.3	11.2	13.1	15.2	17.7	20.9	25.4	32.1	46.5		
0.001	10.0	11.9	14.0	16.3	18.9	22.3	27.1	34.2	49.6		

Tab. I. (Forts.). n_1

	$\alpha = 1.7.$										
$\varphi =$	0°	2°	4°	6°	8°	10°	12°	14°	16°	18°	20°
					$\Pi - \Pi' = 0.$						
ν=0.1	6.1	4.8	2.4	3.8	5.1	6.5	7.8	9.1	10.9	13.1	16.1
0.09	6.2	4.9	2.5	3.8	5.3	6.6	7.9	9.3	11.1	13.2	16.3
0.08	6.3	5.0	2.5	3.9	5.4	6.6	8.1	9.6	11.3	13.5	16.6
0.07	6.5	5.1	2.5	4.0	5.5	6.8	8.1	9.8	11.5	13.8	16.9
0.06	6.6	5.1	2.6	4.1	5.6	6.9	8.3	10.0	11.8	14.1	17.3
0.05	6.8	5.3	2.6	4.2	5.8	7.1	8.5	10.2	12.1	14.4	17.7
0.04	6.9	5.5	2.7	4.3	5.9	7.4	8.9	10.5	12.5	14.9	18.3
0.03	7.2	5.8	2.8	4.5	6.2	7.6	9.1	10.9	13.0	15.5	19.0
0.02	7.6	6.0	3.0	4.7	6.5	8.0	9.8	11.5	13.6	16.3	19.6
0.01	8.3	6.5	3.2	5.1	6.9	8.7	10.5	12.5	14.8	17.8	21.7
0.009	8.3	6.6	3.3	5.1	7.1	8.9	10.6	12.6	15.0	17.9	22.0
0.008	8.5	6.6	3.3	5.3	7.1	8.9	10.8	12.7	15.1	18.1	22.2
0.007	8.5	6.8	3.4	5.3	7.2	9.1	10.9	12.9	15.4	18.4	22.6
0.006	8.7	6.9	3.4	5.4	7.4	9.3	11.1	13.2	15.6	18.7	23.0
0.005	8.9	7.1	3.5	5.5	7.6	9.3	11.3	13.4	16.0	19.1	23.4
0.004	9.1	7.2	3.6	5.6	7.8	9.6	11.5	13.7	16.3	19.5	23.9
0.003	9.3	7.4	3.7	5.8	7.9	10.0	11.9	14.1	16.8	20.0	24.7
0.002	9.8	7.8	3.8	6.0	8.3	10.3	12.4	14.7	17.5	20.8	25.6
0.001	10.4	8.1	4.1	6.5	8.7	11.0	13.2	15.7	18.6	22.3	27.4
					$\Pi - \Pi' = 180°.$						
ν=0.1	6.1	7.4	8.8	10.5	12.6	15.6	20.5	32.1			
0.09	6.2	7.6	8.9	10.7	12.7	15.8	20.8	32.5			
0.08	6.3	7.6	9.1	10.9	13.0	16.1	21.1	33.1			
0.07	6.5	7.8	9.3	11.1	13.2	16.4	21.6	33.8			
0.06	6.6	7.9	9.6	11.3	13.5	16.8	22.0	34.5			
0.05	6.8	8.1	9 8	11.6	13.9	17.2	22.6	35.4			
0.04	6.9	8.4	10.0	12.0	14.3	17.7	23.3	36.5			
0.03	7.2	8.7	10.4	12.5	14.9	18.5	24.2	38.0			
0.02	7.6	9.1	11.0	13.1	15.6	19.4	25.5	40.0			
0.01	8.3	10.0	11.9	14.2	17.0	21.1	27.7	43.3	x > 1	x > 1	x > 1
0.009	8.3	10.1	12.1	14.4	17.2	21.3	28.0	43.9			
0.008	8.5	10.2	12.2	14.6	17.4	21.6	28.3	44.4			
0.007	8.5	10.4	12.4	14.8	17.7	21.9	28.8	45.1			
0.006	8.7	10.6	12.6	15.0	18.0	22.3	29.2	45.9			
0.005	8.9	10.8	12.9	15.3	18.3	22.5	29.9	46.8			
0.004	9.1	11.0	13.1	15.7	18.7	23.2	30.5	47.8			
0.003	9.3	11.4	13.5	16.1	19.3	23.9	31.4	49.8			
0.002	9.8	11.8	14.1	16.8	20.0	24.9	32.7	51.2			
0.001	10.4	12.6	15.0	17.9	21.4	26.6	34.8	54.6			

Tab. I. (Forts.). n_1

$\alpha = 1.6.$											
$\varphi =$	0°	2°	4°	6°	8°	10°	12°	14°	16°	18°	20°
					$\Pi - \Pi' = 0.$						
ν=0.10	6.5	5.0	2.5	4.4	5.8	7.2	8.9	10.9	13.5	17.5	36.2
0.09	6.6	5.1	2.6	4.5	5.9	7.4	9.1	11.0	13.7	17.8	36.8
0.08	6.8	5.2	2.6	4.6	6.0	7.6	9.1	11.3	13.9	18.1	37.5
0.07	6.9	5.3	2.6	4.6	6.2	7.6	9.3	11.5	14.2	18.4	38.2
0.06	7.1	5.4	2.7	4.8	6.3	7.8	9.6	11.7	14.5	18.9	39.1
0.05	7.2	5.5	2.8	4.9	6.5	7.9	9.8	12.0	14.9	19.3	40.0
0.04	7.4	5.7	2.9	5.0	6.6	8.3	10.1	12.4	15.4	19.9	41.3
0.03	7.8	5.9	3.0	5.2	6.9	8.5	10.5	12.9	16.0	20.7	42.9
0.02	8.1	6.3	3.2	5.5	7.2	9.1	11.1	13.5	16.8	21.8	45.1
0.01	8.7	6.8	3.4	5.9	7.8	9.8	12.0	14.7	18.2	23.6	48.9
0.009	8.9	6.9	3.5	6.0	7.9	9.9	12.1	14.8	18.4	23.9	49.4
0.008	9.1	7.0	3.5	6.1	8.1	10.0	12.3	15.0	18.6	24.2	50.1
0.007	9.1	7.0	3.6	6.2	8.1	10.2	12.5	15.2	18.9	24.6	50.8
0.006	9.3	7.2	3.6	6.3	8.3	10.4	12.7	15.5	19.2	25.0	51.8
0.005	9.6	7.3	3.6	6.4	8.5	10.5	13.0	15.8	19.6	25.5	52.8
0.004	9.8	7.5	3.7	6.6	8.7	10.8	13.2	16.2	20.0	26.1	54.0
0.003	10.0	7.7	3.9	6.8	8.9	11.1	13.7	16.6	20.7	26.9	55.6
0.002	10.2	8.0	4.0	7.0	9.3	11.6	14.2	17.3	21.5	28.0	57.8
0.001	11.1	8.5	4.3	7.5	9.8	12.3	15.1	18.4	22.9	39.7	61.5
					$\Pi - \Pi' = 180°.$						
ν=0.1	6.5	8.1	9.9	12.3	15.6	21.6	42.1				
0.09	6.6	8.3	10.1	12.5	15.8	22.0	42.8				
0.08	6.8	8.3	10.3	12.7	16.1	22.4	43.6				
0.07	6.9	8.5	10.5	12.9	16.4	22.8	44.4				
0.06	7.1	8.7	10.7	13.2	16.8	23.3	45.4				
0.05	7.2	8.9	10.9	13.6	17.2	23.9	46.5				
0.04	7.4	9.3	11.3	14.0	17.7	24.7	48.0				
0.03	7.8	9.6	11.7	14.5	18.4	25.6	50.0				
0.02	8.1	10.1	12.3	15.3	19.4	27.0	52.4				
0.01	8.7	10.9	13.4	16.6	21.0	29.2	56.8	$\varkappa > 1$	$\varkappa > 1$	$\varkappa > 1$	$\varkappa > 1$
0.009	8.9	11.1	13.5	16.8	21.2	29.5	57.4				
0.008	9.1	11.2	13.7	17.0	21.5	29.9	58.2				
0.007	9.1	11.4	13.9	17.2	21.8	30.3	59.4				
0.006	9.3	11.6	14.2	17.5	22.2	30.9	60.1				
0.005	9.6	11.8	14.4	17.8	22.6	31.5	61.2				
0.004	9.8	12.1	14.8	18.3	23.2	32.2	62.7				
0.003	10.0	12.5	15.2	18.8	23.9	33.2	64.6				
0.002	10.2	12.9	15.8	19.6	24.3	34.4	67.1				
0.001	11.1	13.8	16.8	20.8	26.4	36.7	71.5				

Tab. I. (Forts.). n_1

$\varphi =$	0°	2°	4°	6°	8°	10°	12°	14°	16°	18°	20°
						$\alpha = 1.5.$					
						$\Pi - \Pi' = 0.$					
ν=0.1	7.0	5.1		4.8	6.6	8.4	10.6	14.3	20.2	39.8	
0.09	7.1	5.2		4.9	6.7	8.5	11.1	14.5	20.6	40.5	
0.08	7.2	5.3		5.0	6.9	8.7	11.3	14.8	20.9	41.2	
0.07	7.4	5.4		5.1	7.0	8.9	11.5	15.0	21.3	42.0	
0.06	7.5	5.5		5.2	7.2	9.1	11.8	15.4	21.8	43.0	
0.05	7.7	5.7		5.3	7.3	9.3	12.0	15.7	22.3	44.0	
0.04	7.9	5.8		5.5	7.6	9.6	12.4	16.2	23.0	45.3	
0.03	8.2	6.1		5.7	7.8	9.9	12.9	16.8	23.9	47.0	
0.02	8.7	6.4		6.0	8.2	10.4	13.5	17.7	25.1	49.4	
0.01	9.4	6.9	$q = 0$	6.5	8.9	11.3	14.7	19.2	27.3	53.6	$x > 1$
0.009	9.5	7.0		6.6	9.0	11.4	14.8	19.3	27.5	54.2	
0.008	9.6	7.1		6.7	9.2	11.6	15.0	19.5	27.9	54.9	
0.007	9.8	7.2		6.8	9.3	11.8	15.2	19.8	28.3	55.7	
0.006	9.9	7.3		6.9	9.4	11.9	15.5	20.1	28.7	56.6	
0.005	10.1	7.4		7.0	9.6	12.2	15.8	20.5	29.3	57.7	
0.004	10.4	7.6		7.2	9.8	12.5	16.1	21.0	30.0	59.0	
0.003	10.6	7.8		7.4	10.1	12.8	16.6	21.6	30.8	60.5	
0.002	11.1	8.1		7.7	10.5	13.3	17.3	22.4	32.1	63.1	
0.001	11.8	8.7		8.2	11.2	14.2	18.4	23.9	34.2	67.3	
						$\Pi - \Pi' = 180°.$					
ν=0.1	7.0	9.0	11.5	15.2	22.2	74.5					
0.09	7.1	9.1	11.6	15.5	22.6	75.7					
0.08	7.2	9.3	11.9	15.7	23.0	77.1					
0.07	7.4	9.4	12.1	16.0	23.4	78.5					
0.06	7.5	9.7	12.4	16.4	24.0	80.4					
0.05	7.7	9.9	12.7	16.8	24.6	82.2					
0.04	7.9	10.2	13.1	17.3	25.3	84.7					
0.03	8.2	10.6	13.5	18.0	26.2	88.0					
0.02	8.7	11.1	14.2	18.9	27.6	92.5					
0.01	9.4	12.1	15.4	20.0	30.0	100.2	$x > 1$	$x > 1$	$x > 1$	$x > 1$	$x > 1$
0.009	9.5	12.2	15.6	20.5	30.3	101.4					
0.008	9.6	12.4	15.8	21.0	30.7	102.8					
0.007	9.8	12.5	16.0	21.3	31.1	104.2					
0.006	9.9	12.7	16.3	21.6	31.6	105.9					
0.005	10.1	13.0	16.6	22.0	32.2	107.9					
0.004	10.4	13.3	17.0	22.5	33.0	110.4					
0.003	10.6	13.6	17.5	23.0	33.9	113.5					
0.002	11.1	14.2	18.2	24.1	35.2	118.0					
0.001	11.8	15.1	19.3	25.7	37.6	125.9					

Tab. II. H

$\alpha =$	2.5	2.4	2.3	2.2	2.1	2.0	1.9	1.8	1.7	1.6	1.5
ν=0.1	5.33	5.36	5.40	5.43	5.47	5.51	5.56	5.61	5.67	5.73	5.81
0.09	5.43	5.46	5.49	5.52	5.56	5.60	5.65	5.70	5.76	5.82	5.90
0.08	5.53	5.56	5.59	5.63	5.66	5.70	5.75	5.80	5.86	5.93	6.01
0.07	5.64	5.67	5.71	5.74	5.78	5.82	5.87	5.92	5.98	6.04	6.12
0.06	5.78	5.81	5.84	5.88	5.91	5.95	6.00	6.05	6.11	6.18	6.26
0.05	5.94	5.97	6.00	6.03	6.07	6.11	6.16	6.21	6.27	6.33	6.41
0.04	6.13	6.16	6.19	6.23	6.27	6.31	6.35	6.40	6.46	6.53	6.61
0.03	6.38	6.41	6.44	6.48	6.52	6.56	6.60	6.65	6.71	6.78	6.86
0.02	6.73	6.76	6.79	6.83	6.87	6.91	6.95	7.01	7.06	7.13	7.21
0.01	7.33	7.36	7.40	7.43	7.47	7.51	7.56	7.61	7.67	7.73	7.81
0.009	7.43	7.46	7.49	7.52	7.56	7.60	7.65	7.70	7.76	7.82	7.90
0.008	7.53	7.56	7.59	7.63	7.66	7.70	7.75	7.80	7.86	7.93	8.01
0.007	7.64	7.67	7.71	7.74	7.78	7.82	7.87	7.92	7.98	8.04	8.12
0.006	7.77	7.81	7.84	7.88	7.91	7.95	8.00	8.05	8.11	8.18	8.26
0.005	7.94	7.97	8.00	8.03	8.07	8.11	8.16	8.21	8.27	8.33	8.41
0.004	8.13	8.16	8.19	8.23	8.27	8.31	8.35	8.40	8.46	8.53	8.61
0.003	8.38	8.41	8.44	8.48	8.52	8.56	8.60	8.65	8.71	8.78	8.86
0.002	8.73	8.76	8.79	8.83	8.87	8.91	8.95	9.01	9.06	9.13	9.21
0.001	9.33	9.36	9.40	9.43	9.47	9.51	9.56	9.61	9.67	9.73	9.81

Tab. III. $\log 2\,\varkappa_0$

$\varphi =$	0°	2°	4°	6°	8°	10°	12°	14°	16°	18°	20°
α=2.5	9.208	9.318	9.406	9.479	9.540	9.595	9.642	9.685	9.724	9.759	9.791
2.4	9.220	9.334	9.425	9.499	9.562	9.617	9.666	9.709	9.748	9.783	9.816
2.3	9.232	9.351	9.445	9.522	9.585	9.642	9.691	9.735	9.775	9.810	9.843
2.2	9.247	9.371	9.468	9.546	9.611	9.669	9.719	9.764	9.804	9.840	9.873
2.1	9.264	9.394	9.493	9.574	9.640	9.699	9.750	9.795	9.836	9.873	9.906
2.0	9.288	9.422	9.524	9.606	9.674	9.734	9.785	9.831	9.873	9.910	9.944
1.9	9.311	9.451	9.557	9.642	9.711	9.772	9.824	9.871	9.913	9.950	9.985
1.8	9.339	9.484	9.594	9.681	9.752	9.815	9.868	9.915	9.958	9.996	0.031
1.7	9.365	9.521	9.635	9.726	9.798	9.863	9.917	9.965	0.009	0.047	0.082
1.6	9.415	9.576	9.693	9.786	9.860	9.924	9.979	0.028	0.072	0.111	0.146
1.5	9.459	9.631	9.754	9.850	9.926	9.993	0.049	0.099	0.144	0.183	0.216

Tab. IV. log cos v $(\varDelta = \Pi - \Pi')$

$\varphi =$	2°	4°	6°	8°	10°	12°	14°	16°	18°	20°
					$\alpha = 2.5$					
$\varDelta =$ 0°	9.740	9.438	$-\infty$	$-\infty$	9.218	9.412	9.519	9.587	9.640	9.679
20	9.755	9.510	9.250	9.250	9.381	9.492	9.568	9.623	9.667	9.700
40	9.792	9.631	9.534	9.534	9.575	9.628	9.664	9.698	9.728	9.751
60	9.839	9.742	9.698	9.698	9.714	9.737	9.760	9.779	9.797	9.811
80	9.886	9.831	9.808	9.808	9.817	9.828	9.839	9.849	9.861	9.869
100	9.926	9.895	9.884	9.884	9.889	9.894	9.900	9.906	9.912	9.917
120	9.958	9.943	9.938	9.938	9.939	9.942	9.945	9.948	9.951	9.953
140	9.982	9.975	9.973	9.973	9.974	9.975	9.976	9.977	9.979	9.979
160	9.995	9.994	9.993	9.993	9.994	9.994	9.994	9.994	9.995	9.995
					$\alpha = 2.4$					
0°	9.728	9.396	$-\infty$	8.28	9.252	9.451	9.542	9.602	9.658	9.691
20	9.744	9.483	9.218	9.279	9.397	9.518	9.587	9.636	9.679	9.712
40	9.784	9.618	9.526	9.542	9.581	9.636	9.674	9.707	9.735	9.760
60	9.833	9.735	9.695	9.700	9.717	9.744	9.765	9.784	9.801	9.817
80	9.882	9.827	9.807	9.810	9.818	9.831	9.843	9.853	9.863	9.873
100	9.924	9.894	9.884	9.885	9.889	9.896	9.902	9.907	9.913	9.919
120	9.957	9.942	9.937	9.938	9.940	9.943	9.946	9.949	9.952	9.954
140	9.981	9.975	9.973	9.973	9.974	9.975	9.976	9.978	9.979	9.980
160	9.995	9.994	9.993	9.993	9.994	9.994	9.994	9.994	9.995	9.995
					$\alpha = 2.3$					
0°	9.714	9.365	$-\infty$	8.98	9.328	9.483	9.568	9.628	9.672	9.707
20	9.733	9.461	9.252	9.303	9.438	9.542	9.608	9.657	9.695	9.725
40	9.774	9.608	9.534	9.548	9.597	9.648	9.688	9.721	9.746	9.769
60	9.827	9.730	9.698	9.704	9.725	9.751	9.773	9.791	9.808	9.823
80	9.878	9.825	9.808	9.811	9.822	9.835	9.847	9.858	9.868	9.877
100	9.922	9.892	9.884	9.886	9.891	9.898	9.904	9.910	9.916	9.921
120	9.956	9.941	9.938	9.938	9.941	9.944	9.947	9.950	9.953	9.956
140	9.981	9.975	9.970	9.973	9.974	9.976	9.977	9.978	9.979	9.980
160	9.995	9.994	9.993	9.993	9.994	9.994	9.994	9.995	9.995	9.995
					$\alpha = 2.2$					
0°	9.700	9.325	$-\infty$	9.067	9.365	9.510	9.592	9.645	9.688	9.719
20	9.721	9.438	9.218	9.325	9.461	9.562	9.628	9.672	9.709	9.737
40	9.765	9.597	9.526	9.556	9.608	9.660	9.700	9.730	9.758	9.779
60	9.820	9.725	9.695	9.707	9.730	9.758	9.781	9.798	9.815	9.829
80	9.875	9.822	9.807	9.813	9.825	9.839	9.851	9.861	9.872	9.880
100	9.920	9.891	9.884	9.886	9.892	9.900	9.906	9.912	9.918	9.923
120	9.955	9.941	9.937	9.938	9.941	9.945	9.948	9.951	9.954	9.957
140	9.980	9.974	9.973	9.973	9.975	9.976	9.978	9.979	9.980	9.981
160	9.995	9.994	9.993	9.994	9.994	9.994	9.994	9.995	9.995	9.995

Tab. IV. (Forts.). log cos v $(\Delta = \Pi - \Pi')$

$\varphi =$	2°	4°	6°	8°	10°	12°	14°	16°	18°	20°
					$\alpha = 2.1$					
$\Delta =$ 0°	9.688	9.281	$-\infty$	8.67	9.412	9.542	9.613	9.664	9.707	9.735
20	9.709	9.410	9.250	9.365	9.492	9.587	9.645	9.688	9.725	9.751
40	9.758	9.587	9.534	9.568	9.623	9.674	9.712	9.742	9.769	9.788
60	9.815	9.721	9.698	9.712	9.737	9.765	9.787	9.805	9.823	9.836
80	9.872	9.819	9.808	9.815	9.828	9.843	9.855	9.866	9.877	9.884
100	9.918	9.890	9.884	9.888	9.894	9.902	9.909	9.914	9.921	9.925
120	9.954	9.940	9.938	9.939	9.942	9.946	9.952	9.953	9.956	9.958
140	9.980	9.974	9.973	9.974	9.974	9.976	9.978	9.979	9.980	9.981
160	9.995	9.994	9.993	9.994	9.994	9.994	9.995	9.995	9.995	9.995
					$\alpha = 2.0$					
0°	9.674	9.248	$-\infty$	9.248	9.451	9.562	9.631	9.681	9.719	9.749
20	9.698	9.399	9.248	9.398	9.519	9.602	9.660	9.703	9.737	9.763
40	9.749	9.581	9.534	9.581	9.636	9.684	9.723	9.753	9.779	9.798
60	9.810	9.717	9.698	9.718	9.744	9.771	9.793	9.813	9.829	9.843
80	9.868	9.818	9.808	9.818	9.831	9.846	9.858	9.870	9.880	9.889
100	9.916	9.889	9.884	9 889	9.896	9.903	9.910	9.917	9.922	9.928
120	9.953	9.940	9.938	9.940	9.943	9.947	9.950	9.954	9.957	9.959
140	9.979	9.974	9.973	9.974	9.975	9.977	9.978	9.979	9.981	9.982
160	9.995	9.994	9.993	9.994	9.994	9.994	9.995	9.995	9.995	9.995
					$\alpha = 1.9$					
0°	9.653	9.180	8.82	9.303	9.483	9.587	9.653	9.698	9.733	9.762
20	9.679	9.365	9.277	9.427	9.542	9.623	9.679	9.718	9.749	9.774
40	9.735	9.568	9.542	9.592	9.650	9.698	9.735	9.763	9.787	9.807
60	9.801	9.712	9.700	9.723	9.751	9.779	9.801	9.820	9.835	9.849
80	9.863	9.815	9.810	9.820	9.835	9.852	9.863	9.874	9.884	9.892
100	9.913	9.888	9.885	9.891	9.898	9.906	9.913	9.919	9.925	9.930
120	9.952	9.939	9.938	9.941	9.944	9.948	9.952	9.955	9.958	9.960
140	9.979	9.974	9.973	9.974	9.976	9.977	9.979	9.980	9.981	9.982
160	9.995	9.995	9.993	9.994	9.994	9.994	9.995	9.995	9.995	9.995
					$\alpha = 1.8$					
0°	9.628	9.067	8.32	9.347	9.519	9.613	9.672	9.714	9.749	9.774
20	9.657	9.325	9.281	9.451	9.568	9.645	9.695	9.733	9.763	9.787
40	9.721	9.556	9.542	9.602	9.664	9.712	9.746	9.774	9.798	9.817
60	9.791	9.707	9.700	9.728	9.760	8.786	9.808	9.827	9.843	9.856
80	9.858	9.808	9.810	9.823	9.839	9.855	9.868	9.878	9.889	9.897
100	9.910	9.886	9.885	9.892	9.901	9.909	9.916	9.922	9.928	9.933
120	9.950	9.938	9.938	9.941	9.945	9.950	9.953	9.956	9.959	9.962
140	9.978	9.973	9.973	9.974	9.976	9.978	9.979	9.981	9.982	9.983
160	9.995	9.993	9.993	9.994	9.994	9.995	9.995	9.995	9.995	9.996

Tab. IV. (Forts.). log cos v ($\varDelta = \Pi - \Pi'$)

$\varphi =$	2°	4°	6°	8°	10°	12°	14°	16°	18°	20°
					$\alpha = 1.7$					
$\varDelta =$ 0°	9.597	8.32	9.067	9.899	9.554	9.640	9.695	9.735	9.765	9.788
20	9.632	9.281	9.325	9.488	9.597	9.667	9.714	9.751	9.779	9.800
40	9.704	9.542	9.556	9.618	9.681	9.728	9.762	9.788	9.810	9.827
60	9.782	9.700	9.707	9.735	9.769	9.797	9.818	9.836	9.851	9.863
80	9.852	9.810	9.813	9.827	9.845	9.861	9.878	9.884	9.894	9.901
100	9.907	9.885	9.886	9.894	9.903	9.912	9.919	9.925	9.931	9.935
120	9.949	9.938	9.938	9.942	9.947	9.951	9.954	9.958	9.961	9.963
140	9.978	9.973	9.973	9.975	9.977	9.979	9.980	9.981	9.983	9.984
160	9.994	9.993	9.994	9.994	9.994	9.995	9.995	9.995	9.996	9.996
					$\alpha = 1.6$					
0°	9.581	8.32	9.218	9.451	9.575	9.657	9.709	9.746	9.776	9.826
20	9.618	9.279	9.381	9.519	9.613	9.681	9.728	9.762	9.788	9.834
40	9.695	9.542	9.568	9.636	9.691	9.737	9.771	9.796	9.818	9.855
60	9.776	9.700	9.712	9.744	9.774	9.803	9.825	9.842	9.857	9.884
80	9.849	9.810	9.815	9.831	9.848	9.864	9.877	9.888	9.897	9.915
100	9.905	9.885	9.888	9.896	9.905	9.914	9.921	9.928	9.933	9.944
120	9.948	9.938	9.939	9.943	9.948	9.952	9.956	9.959	9.962	9.968
140	9.977	9.973	9.974	9.975	9.977	9.979	9.980	9.982	9.983	9.986
160	9.994	9.993	9.994	9.994	9.994	9.995	9.995	9.995	9.996	9.996
					$\alpha = 1.5$					
0°	9.534	$-\infty$	9.248	9.492	9.613	9.684	9.733	9.767	9.793	9.813
20	9.581	9.250	9.399	9.548	9.645	9.707	9.749	9.781	9.804	9.823
40	9.672	9.534	9.581	9.653	9.712	9.755	9.786	9.812	9.831	9.846
60	9.763	9.698	9.717	9.753	9.786	9.814	9.835	9.852	9.866	9.877
80	9.842	9.808	9.818	9.836	9.855	9.870	9.884	9.894	9.903	9.911
100	9.901	9.884	9.884	9.898	9.909	9.918	9.925	9.931	9.937	9.941
120	9.946	9.938	9.940	9.944	9.950	9.954	9.958	9.961	9.964	9.966
140	9.976	9.973	9.974	9.976	9.978	9.980	9.981	9.983	9.984	9.985
160	9.994	9.993	9.994	9.994	9.995	9.995	9.995	9.996	9.996	9.996

Zum Schluss will ich als Beispiel p für einige Planeten, die schon nach HANSEN berechnet sind, aus diesen Tabellen bestimmen.

1. Alexandra (54).

$$\alpha = 1.9\,;\ \varphi = 11°.5\,;\ \Pi - \Pi' = 282° = 360° - 78°\,;\ \delta = 0''.1\,;$$
$$\nu = 0.008\,.$$

Tab. III . . . . . $\log 2\varkappa_0 = 9.81$

Tab. IV . . . . $\log \cos v = 9.85$

$$\log 2\varkappa_0 \cos v = 9.66$$
$$2\omega = 27°.2$$
$$\log \varkappa = 9.384$$

Tab. II . . . . $H = 7.75$

$$n_1 = \frac{7.75}{0.616} = 12.6$$
$$d = \frac{12.6}{15.5 + 0.4} \cdot 1.1 = 0.9$$
$$n = 12.6 - 0.9 = 11.7$$
$$\because\ p = 23.4\,.$$

Bei der Rechnung von Alexandra habe ich $p = 24$ angenommen.

2. Thetis (17).

$\alpha = 2.1$; $\varphi = 7°.5$; $\Pi - \Pi' = -110°$; $\delta = 1''.0$; $\nu = 0.02$; man bekommt $p = 15.2$.

Wenn man wie CHARLIER die Glieder, die vergrössert werden, separat berechnet, muss für diese Rechnung $p = 16$ gesetzt werden, für die übrigen Glieder aber genügt $p = 8$.

3. Pandora (55).

$\alpha = 1.9$; $\varphi = 8^\circ.2$; $\Pi - \Pi' = -0^\circ.5$; $\delta = 0''.01$; $\nu = 0.07$; $p = 10.4$.

Da MÖLLER in das Resultat nur hundertel von einem Sekunde angegeben hat, ist sein $p = 24$ also zu gross. Wäre hier $\Pi - \Pi' = 180^\circ$ statt $0^\circ.5$, hätte man $p = 22$ bekommen.

In der Tabelle I habe ich n_1 auch für auf einmal grosse φ und kleine α angegeben nur um zu zeigen, wie rasch n_1 mit abnehmendem α zunimmt.

Ein p nach diesen Formeln berechnet ist im Allgemeinen zu gross, nie aber zu klein; in den Fällen, wo hier p zu gross ist um praktisch anwendbar zu sein, wäre es vielleicht von Interesse zu untersuchen, wie gross die p ausfallen würden, wenn man sie sicher nicht grösser als nötig nimmt. Der Hauptzweck dieser Formeln und Tabellen war, teils zu zeigen, dass man oft p zu gross nimmt, teils den Wert von p zu geben in den Fällen, wo der Planet dem Jupiter nicht zu nahe kommt.



ÖFVERSIGT AF K. SV. VET.-AKAD. FÖRHANDL. 1899 N:o 4.

ack.

MEDDELANDEN

FRÅN

LUNDS ASTRONOMISKA OBSERVATORIUM

N:o 6.

UEBER DAS REDUCIRTE DREI-KÖRPER-PROBLEM

VON

C. V. L. CHARLIER

MITGETEILT DEN 12. APRIL 1899

STOCKHOLM
KUNGL. BOKTRYCKERIET. P. A. NORSTEDT & SÖNER
1899

ÖFVERSIGT AF K. SV. VET.-AKAD. FÖRHANDL. 1899. N:o 4.

MEDDELANDEN

FRÅN

LUNDS ASTRONOMISKA OBSERVATORIUM

N:o 6.

UEBER DAS REDUCIRTE DREI-KÖRPER-PROBLEM

VON

C. V. L. CHARLIER

MITGETEILT DEN 12. APRIL 1899

STOCKHOLM
KUNGL. BOKTRYCKERIET. P. A. NORSTEDT & SÖNER
1899

In der berühmten Abhandlung: »Essai sur le problème des trois corps» ist es LAGRANGE gelungen ein System von Differentialgleichungen aufzustellen, in denen die drei Entfernungen der drei Körper unter sich allein als abhängige Veränderliche auftreten; ein Problem, welches von HESSE den Namen das reducirte Drei-Körper-Problem bekommen hat.

Die folgende Mittheilung hat zum Zweck diese Reduktion des Problems der drei Körper für den Fall zu untersuchen, dass man statt der Entfernungen der drei Körper unter sich ihre Abstände von dem gemeinsamen Schwerpunkt einführt. Es entstehen hierdurch gewisse Erleichterungen in der Untersuchung, deren Hervorheben mir von Interesse zu sein scheint.

Die genannte Reduktion habe ich für den Fall ausgeführt, dass die Bewegung der drei Körper in einer Ebene stattfindet. Ich sende indessen einige Bemerkungen über die allgemeine Behandlung des Problems voraus.

Indem wir mit x_i, y_i, z_i $(i = 1, 2, 3)$ die *absoluten* Koordinaten der drei Körper bezeichnen, so lauten die Differentialgleichungen der Bewegung:

$$(1) \qquad m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_i}; \quad m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y_i}; \quad m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z_i},$$

und die Kraftfunktion U ist:

$$(2) \qquad U = \frac{m_2 m_3}{r_1} + \frac{m_3 m_1}{r_2} + \frac{m_1 m_2}{r_3},$$

wo die Attraktionskonstante gleich *Eins* gesetzt worden ist.

In diesen Gleichungen führen wir die Koordinaten (ξ_i, η_i, ζ_i) in Bezug auf den Schwerpunkt der drei Körper hinein. Wir setzen also

$$x_i = X + \xi_i$$
$$y_i = Y + \eta_i$$
$$z_i = Z + \zeta_i\,,$$

wo X, Y, Z die absoluten Koordinaten des Schwerpunktes bezeichnen. Die Bewegungsgleichungen werden dann:

(3) $$\frac{d^2X}{dt^2} = 0 = \frac{d^2Y}{dt^2} = \frac{d^2Z}{dt^2}$$

(4) $$m_i\frac{d^2\xi_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial \xi_i}\,; \quad m_i\frac{d^2\eta_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial \eta_i}\,; \quad m_i\frac{d^2\zeta_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial \zeta_i}\,.$$

Zwischen den Grössen ξ_i, η_i, ζ_i bestehen die Relationen:

(5) $$\begin{cases} m_1\xi_1 + m_2\xi_2 + m_3\xi_3 = 0 \\ m_1\eta_1 + m_2\eta_2 + m_3\eta_3 = 0 \\ m_1\zeta_1 + m_2\zeta_2 + m_3\zeta_3 = 0\,. \end{cases}$$

Die Gleichungen (3) geben durch Integration die Schwerpunktsintegrale mit sechs Integrationskonstanten. Das Problem ist gelöst, wenn man mittelst (4) ξ_i, η_i, ζ_i durch die Zeit und 12 neue Konstanten ausdrücken kann.

Da die 9 Koordinaten in Bezug auf den Schwerpunkt durch die drei Relationen (5) verbunden sind, so sind nur sechs von denselben von einander unabhängig, oder richtiger man kann die 9 Koordinaten durch sechs unabhängige veränderliche Grössen ausdrücken. Dies kann in unendlich vielen Weisen geschehen.

Will man die Bewegungsgleichungen für diese sechs unabhängigen Grössen — welche ich kurzweg die q-Koordinaten nennen will — in kanonischer Form haben, so ist zunächst die lebendige Kraft T

(6) $$T = \tfrac{1}{2}\Sigma m_i\left[\left(\frac{d\xi_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta_i}{dt}\right)^2\right]$$

durch die Grössen q auszudrücken.

Die weitere Behandlung des Problems hängt nun von der Wahl der q-Koordinaten ab.

Eine Wahl, die aus geometrischen Gründen nahe an der Hand liegt, ist die folgende. Die Koordinaten ξ_i, η_i, ζ_i sind offenbar vollständig bestimmt, wenn man die folgende sechs Grössen bestimmt hat, nämlich:

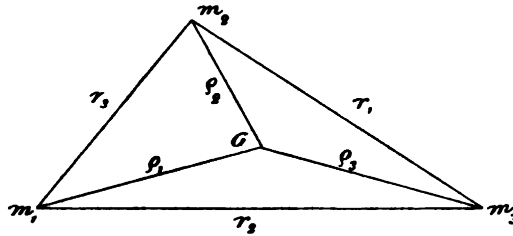
a) die drei Abstände ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 der Massen m_1, m_2, m_3 von ihrem gemeinsamen Schwerpunkt;

b) den Winkel v, den eine von den Linien ϱ z. B. ϱ_1 mit der Schnittlinie zwischen der durch die Massenpunkte m_1, m_2 und m_3 gelegenen Ebene und einer festen Ebene bildet;

c) die Knotenlänge und die Neigung in Bezug auf diese Ebene.

Und man kann also die Koordinaten durch diese sechs Grössen ausdrücken. Nach Differentiation dieser Ausdrücke erhält man dann die lebendige Kraft T.

Die Kraftfunktion U hängt nur von den Entfernungen r_1, r_2 und r_3 ab. Diese lassen sich durch die Abstände ϱ_1, ϱ_2 und ϱ_3 von dem Schwerpunkte (G) folgenderweise ausdrücken.



Man hat:

$$\varrho_1^2 = \xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2$$
$$\varrho_2^2 = \xi_2^2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2$$
$$\varrho_3^2 = \xi_3^2 + \eta_3^2 + \zeta_3^2,$$

und:

$$r_1^2 = (\xi_2 - \xi_3)^2 + (\eta_2 - \eta_3)^2 + (\zeta_2 - \zeta_3)^2$$
$$r_2^2 = (\xi_3 - \xi_1)^2 + (\eta_3 - \eta_1)^2 + (\zeta_3 - \zeta_1)^2$$
$$r_3^3 = (\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2 + (\zeta_1 - \zeta_2)^2,$$

also auch:

$$(7)\quad \begin{cases} r_1^2 = \varrho_2^2 + \varrho_3^2 - 2(\xi_2\xi_3 + \eta_2\eta_3 + \zeta_2\zeta_3) \\ r_2^2 = \varrho_3^2 + \varrho_1^2 - 2(\xi_3\xi_1 + \eta_3\eta_1 + \zeta_3\zeta_1) \\ r_3^2 = \varrho_1^2 + \varrho_2^2 - 2(\xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2 + \zeta_1\zeta_2) . \end{cases}$$

Schreibt man die Gleichungen (5) in der Form

$$\begin{aligned} -m_1\xi_1 &= m_2\xi_2 + m_3\xi_3 \\ -m_1\eta_1 &= m_2\eta_2 + m_3\eta_3 \\ -m_1\zeta_1 &= m_2\zeta_2 + m_3\zeta_3 \end{aligned}$$

so erhält man durch Quadriren und Addiren:

$$m_1^2\varrho_1^2 = m_2^2\varrho_2^2 + m_3^2\varrho_3^2 + 2m_2m_3(\xi_2\xi_3 + \eta_2\eta_3 + \zeta_2\zeta_3) ,$$

und in ähnlicher Weise

$$\begin{aligned} m_2^2\varrho_2^2 &= m_3^2\varrho_3^2 + m_1^2\varrho_1^2 + 2m_3m_1(\xi_3\xi_1 + \eta_3\eta_1 + \zeta_3\zeta_1) \\ m_3^2\varrho_3^2 &= m_1^2\varrho_1^2 + m_2^2\varrho_2^2 + 2m_1m_2(\xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2 + \zeta_1\zeta_2) . \end{aligned}$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen kann man die Relationen (7) folgenderweise schreiben:

$$(8)\quad \begin{cases} m_2m_3r_1^2 = -m_1^2\varrho_1^2 + m_2(m_3 + m_2)\varrho_2^2 + m_3(m_2 + m_3)\varrho_3^2 \\ m_3m_1r_2^2 = -m_2^2\varrho_2^2 + m_3(m_1 + m_3)\varrho_3^2 + m_1(m_3 + m_1)\varrho_1^2 \\ m_1m_2r_3^2 = -m_3^2\varrho_3^2 + m_1(m_2 + m_1)\varrho_1^2 + m_2(m_1 + m_2)\varrho_2^2 , \end{cases}$$

durch welche Gleichungen die Entfernungen der drei Körper unter sich durch die drei Abstände derselben von dem Schwerpunkt ausgedrückt sind.

U kann also als eine Funktion von ϱ_1, ϱ_2 und ϱ_3 betrachtet werden.

Bei der weiteren Rechnung werde ich mich auf den Fall beschränken, dass die Bewegung in einer Ebene stattfindet.

Die lebendige Kraft hat dann die Form

$$(9)\quad T = \tfrac{1}{2}\Sigma m_i\left[\left(\frac{d\xi_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta_i}{dt}\right)^2\right] ,$$

oder, wenn man Polarkoordinaten einführt und setzt

$$\begin{aligned} \xi_i &= \varrho_i \cos v_i \\ \eta_i &= \varrho_i \sin v_i , \end{aligned}$$

so wird

$$T = \tfrac{1}{2}\Sigma m_i \left[\left(\frac{d\varrho_i}{dt}\right)^2 + \varrho_i^2\left(\frac{dv_i}{dt}\right)^2\right]. \tag{9*}$$

Nach den früheren Auseinandersetzungen können wir nun T durch *vier* unabhängige Veränderliche ausdrücken, und ich wähle als solche ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 und v_1, durch welche nun also die sechs Koordinaten in Bezug auf den Schwerpunkt darstellen kann.

Schreiben wir die Gleichungen (5) unter der Form:

$$\begin{aligned} m_1\varrho_1 \cos v_1 + m_2\varrho_2 \cos v_2 &= -m_3\varrho_3 \cos v_3 \\ m_1\varrho_1 \sin v_1 + m_2\varrho_2 \sin v_2 &= -m_3\varrho_3 \sin v_3, \end{aligned}$$

und quadriren und addiren diese Gleichungen, bekommt man:

$$m_1^2\varrho_1^2 + m_2^2\varrho_2^2 + 2\, m_1 m_2 \varrho_1 \varrho_2 \cos(v_1 - v_2) = m_3^2\varrho_3^2 .$$

Zwei ähnliche Gleichungen werden durch Permutation der Indices erhalten. Wir schreiben diese Gleichungen in der Form:

$$\left\{\begin{aligned} -\cos(v_1 - v_2) &= \frac{-m_3^2\varrho_3^2 + m_1^2\varrho_1^2 + m_2^2\varrho_2^2}{2\, m_1 m_2 \varrho_1 \varrho_2} = R_3 \\ -\cos(v_2 - v_3) &= \frac{-m_1^2\varrho_1^2 + m_2^2\varrho_2^2 + m_3^2\varrho_3^2}{2\, m_2 m_3 \varrho_2 \varrho_3} = R_1 \\ -\cos(v_3 - v_1) &= \frac{-m_2^2\varrho_2^2 + m_3^2\varrho_3^2 + m_1^2\varrho_1^2}{2\, m_3 m_1 \varrho_3 \varrho_1} = R_2 . \end{aligned}\right. \tag{10}$$

Diese Relationen bestimmen v_2 und v_3 als Funktionen von ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 und v_1. Durch Differentiation von der ersten und der dritten Gleichung erhält man:

$$\frac{dv_2}{dt} - \frac{dv_1}{dt} = -\frac{1}{\sqrt{1-R_3^2}}\left[\frac{\partial R_3}{\partial \varrho_1}\frac{d\varrho_1}{dt} + \frac{\partial R_3}{\partial \varrho_2}\frac{d\varrho_2}{dt} + \frac{\partial R_3}{\partial \varrho_3}\frac{d\varrho_3}{dt}\right]$$

$$\frac{dv_3}{dt} - \frac{dv_1}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1-R_2^2}}\left[\frac{\partial R_2}{\partial \varrho_1}\frac{d\varrho_1}{dt} + \frac{\partial R_3}{\partial \varrho_2}\frac{d\varrho_2}{dt} + \frac{\partial R_3}{\partial \varrho_3}\frac{d\varrho_3}{dt}\right].$$

Als Ausdruck für T bekommen wir nun:

$$2T = m_1\left[\left(\frac{d\varrho_1}{dt}\right)^2 + \varrho_1^2\left(\frac{dv_1}{dt}\right)^2\right] +$$

$$+m_2\left[\left(\frac{d\varrho_2}{dt}\right)^2+\varrho_2^2\left(\frac{dv_1}{dt}-\frac{1}{\sqrt{1-R_3^2}}\left(\frac{\partial R_3}{\partial\varrho_1}\frac{d\varrho_1}{dt}+\frac{\partial R_3}{\partial\varrho_2}\frac{d\varrho_2}{dt}+\frac{\partial R_3}{\partial\varrho_3}\frac{d\varrho_3}{dt}\right)\right)^2\right]$$

$$+m_3\left[\left(\frac{d\varrho_3}{dt}\right)^2+\varrho_3^2\left(\frac{dv_1}{dt}+\frac{1}{\sqrt{1-R_2^2}}\left(\frac{\partial R_2}{\partial\varrho_1}\frac{d\varrho_1}{dt}+\frac{\partial R_2}{\partial\varrho_2}\frac{d\varrho_2}{dt}+\frac{\partial R_2}{\partial\varrho_3}\frac{d\varrho_3}{dt}\right)\right)^2\right].$$

oder

$$2T=\left(\frac{d\varrho_1}{dt}\right)^2\left(m_1+\frac{m_2\varrho_2^2}{1-R_3^2}\left(\frac{\partial R_3}{\partial\varrho_1}\right)^2+\frac{m_3\varrho_3^2}{1-R_2^2}\left(\frac{\partial R_2}{\partial\varrho_1}\right)^2\right)+$$

$$+\left(\frac{d\varrho_2}{dt}\right)^2\left(m_2+\frac{m_2\varrho_2^2}{1-R_3^2}\left(\frac{\partial R_3}{\partial\varrho_2}\right)^2+\frac{m_3\varrho_3^2}{1-R_2^2}\left(\frac{\partial R_2}{\partial\varrho_2}\right)^2\right)+$$

$$+\left(\frac{d\varrho_3}{dt}\right)^2\left(m_3+\frac{m_2\varrho_2^2}{1-R_3^2}\left(\frac{\partial R_3}{\partial\varrho_3}\right)^2+\frac{m_3\varrho_3^2}{1-R_2^2}\left(\frac{\partial R_2}{\partial\varrho_3}\right)^2\right)+$$

$$+(m_1\varrho_1^2+m_2\varrho_2^2+m_3\varrho_3^2)\left(\frac{dv_1}{dt}\right)^2-$$

$$-2\,m_2\varrho_2^2\frac{dv_1}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-R_3^2}}\left(\frac{\partial R_3}{\partial\varrho_1}\frac{d\varrho_1}{dt}+\frac{\partial R_3}{\partial\varrho_2}\frac{d\varrho_2}{dt}+\frac{\partial R_3}{\partial\varrho_3}\frac{d\varrho_3}{dt}\right)+$$

$$+2\,m_3\varrho_3^2\frac{dv_1}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-R_2^2}}\left(\frac{\partial R_2}{\partial\varrho_1}\frac{d\varrho_1}{dt}+\frac{\partial R_2}{\partial\varrho_2}\frac{d\varrho_1}{dt}+\frac{\partial R_2}{\partial\varrho_3}\frac{d\varrho_3}{dt}\right)+$$

$$+\frac{2m_2\varrho_2^2}{1-R_3^2}\left[\frac{\partial R_3}{\partial\varrho_1}\frac{\partial R_3}{\partial\varrho_2}\frac{d\varrho_1}{dt}\frac{d\varrho_2}{dt}+\frac{\partial R_3}{\partial\varrho_2}\frac{\partial R_3}{\partial\varrho_3}\frac{d\varrho_2}{dt}\frac{d\varrho_3}{dt}+\frac{\partial R_3}{\partial\varrho_3}\frac{\partial R_3}{\partial\varrho_1}\frac{d\varrho_3}{dt}\frac{d\varrho_1}{dt}\right]$$

$$+\frac{2m_3\varrho_3^2}{1-R_2^2}\left[\frac{\partial R_2}{\partial\varrho_1}\frac{\partial R_2}{\partial\varrho_2}\frac{d\varrho_1}{dt}\frac{d\varrho_2}{dt}+\frac{\partial R_2}{\partial\varrho_2}\frac{\partial R_2}{\partial\varrho_3}\frac{d\varrho_2}{dt}\frac{d\varrho_3}{dt}+\frac{\partial R_2}{\partial\varrho_3}\frac{\partial R_2}{\partial\varrho_1}\frac{d\varrho_3}{dt}\frac{d\varrho_1}{dt}\right].$$

Diesen etwas umständlichen Ausdruck für T schreiben wir:

$$(11)\quad 2\,T=A_{11}\left(\frac{d\varrho_1}{dt}\right)^2+A_{22}\left(\frac{d\varrho_2}{dt}\right)^2+A_{33}\left(\frac{d\varrho_3}{dt}\right)^2+A_{44}\left(\frac{dv_1}{dt}\right)^2+$$

$$+2\,A_{12}\frac{d\varrho_1}{dt}\frac{d\varrho_2}{dt}+2\,A_{13}\frac{d\varrho_1}{dt}\frac{d\varrho_3}{dt}+2\,A_{14}\frac{d\varrho_1}{dt}\frac{dv_1}{dt}+$$

$$+2\,A_{23}\frac{d\varrho_2}{dt}\frac{d\varrho_3}{dt}+2\,A_{24}\frac{d\varrho_2}{dt}\frac{dv_4}{dt}+2\,A_{34}\frac{d\varrho_3}{dt}\frac{dv_1}{dt},$$

wo die Koefficienten A sämmtlich Funktionen nur von ϱ_1, ϱ_2 und ϱ_3 sind.

Wollen wir nun ein kanonisches System von Differentialgleichungen aufstellen, wo ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 und v_1 als q-Koordinaten

auftreten, so bekommen wir für das konjugirte System von Koordinaten, p_i, den Werth:

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial \frac{d\varrho_1}{dt}} = A_{11} \frac{d\varrho_1}{dt} + A_{12} \frac{d\varrho_2}{dt} + A_{13} \frac{d\varrho_3}{dt} + A_{14} \frac{dv_1}{dt}$$

$$p_2 = \frac{\partial T}{\partial \frac{d\varrho_2}{dt}} = A_{21} \frac{d\varrho_1}{dt} + A_{22} \frac{d\varrho_2}{dt} + A_{23} \frac{d\varrho_3}{dt} + A_{24} \frac{dv_1}{dt}$$

$$p_3 = \frac{\partial T}{\partial \frac{d\varrho_3}{dt}} = A_{31} \frac{d\varrho_1}{dt} + A_{32} \frac{d\varrho_2}{dt} + A_{33} \frac{d\varrho_3}{dt} + A_{34} \frac{dv_1}{dt}$$

$$p_4 = \frac{\partial T}{\partial \frac{dv_1}{dt}} = A_{41} \frac{d\varrho_1}{dt} + A_{42} \frac{d\varrho_2}{dt} + A_{43} \frac{d\varrho_3}{dt} + A_{44} \frac{dv_1}{dt},$$

wo

$$A_{ij} = A_{ji}.$$

Die Determinante

$$|A_{ij}|$$

der Koefficienten, die wir Δ nennen wollen, ist immer von Null verschieden, [1]) und es wird nun:

$$(12) \qquad \begin{cases} \Delta \dfrac{d\varrho_1}{dt} = \sum p_i \dfrac{\partial \Delta}{\partial A_{i1}} \\ \Delta \dfrac{d\varrho_2}{dt} = \sum p_i \dfrac{\partial \Delta}{\partial A_{i2}} \\ \Delta \dfrac{d\varrho_3}{dt} = \sum p_i \dfrac{\partial \Delta}{\partial A_{i3}} \\ \Delta \dfrac{dv_1}{dt} = \sum p_i \dfrac{\partial \Delta}{\partial A_{i4}}. \end{cases}$$

Setzen wir diese Gleichungen in T ein, so bekommen wir

$$(13) \qquad 2\,T = \Sigma B_{ij} p_i p_j\,,$$

wo die Koefficienten B nur von ϱ_1, ϱ_2 und ϱ_3 abhängig sind.

Die Koefficienten B_{ij} kann man leicht durch die A_{ij} ausdrücken. Da T eine homogene quadratische Form des ersten Ableitungen der q-Koordinaten ist, so ist

[1]) Sieh: Painlevé: Leçons sur l'intégration des équations différentielles de la Mécanique. S. 140.

$$2\,T = \Sigma \frac{\partial T}{\partial q'_i} q'_i$$

oder

$$2\,T = \Sigma p_i q'_i .$$

Und setzt man die Ausdrücke für q'_i aus (12) hier hinein, so findet man für B_{ij} unmittelbar den folgenden Ausdruck:

$$B_{ij} = \frac{1}{\varDelta} \frac{\partial \varDelta}{\partial \varDelta_{ij}} .$$

Die Kraftfunction U hat die Form

(13*) $$U = \frac{m_2 m_3}{r_1} + \frac{m_3 m_1}{r_2} + \frac{m_1 m_2}{r_3} ,$$

und geht durch Einsetzung der Werthe (8) für r in eine Funktion von ϱ_1, ϱ_2 und ϱ_3 über.

Die kanonischen Differentialgleichungen sind nun

(14) $$\left\{\begin{aligned} \frac{d\varrho_1}{dt} &= \frac{\partial(T-U)}{\partial p_1}; & \frac{dp_1}{dt} &= -\frac{\partial(T-U)}{d\varrho_1} \\ \frac{d\varrho_2}{dt} &= \frac{\partial(T-U)}{\partial p_2}; & \frac{dp_2}{dt} &= -\frac{\partial(T-U)}{\partial\varrho_2} \\ \frac{d\varrho_3}{dt} &= \frac{\partial(T-U)}{\partial p_3}; & \frac{dp_3}{dt} &= -\frac{\partial(T-U)}{\partial\varrho_3} \\ \frac{dv_1}{dt} &= \frac{\partial(T-U)}{\partial p_4}; & \frac{dp_4}{dt} &= -\frac{\partial(T-U)}{\partial v_1} , \end{aligned}\right.$$

und die entsprechende JACOBI'sche partielle Differentialgleichung lautet:

(15) $$\tfrac{1}{2}\, \Sigma B_{ij} \frac{\partial W}{\partial q_i} \frac{\partial W}{\partial q_j} = U + \gamma_1 ,$$

wo ich gesetzt habe

$$\varrho_1 = q_1,\ \varrho_2 = q_2,\ \varrho_3 = q_3,\ v_1 = q_4 .$$

Diese Gleichung enthält nun vier unabhängige Veränderliche. Es lässt sich aber gleich übersehen, dass man dieselbe auf eine Gleichung mit nur drei Veränderlichen ϱ_1, ϱ_2 und ϱ_3 educiren kann. In der That kommt in (15) zwar $\frac{\partial W}{\partial v_1}\left(= \frac{\partial W}{\partial q_4}\right)$,

nicht aber v_1 ($= q_4$) selbst vor. Es ist dann unmittelbar ersichtlich, dass, wenn man setzt

(16) $$W = S(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3) + \alpha v,$$

wo α eine willkürliche Konstante bezeichnet, so geht (15) in eine Differentialgleichung von S über, die nur von den drei Abständen von den Schwerpunkt abhängig ist.

Diese Gleichung lautet:

$$\sum_{\substack{i\\j}=1,2,3} B_{ij} \frac{\partial S}{\partial \varrho_i} \frac{\partial S}{\partial \varrho_j} +$$

$$+ B_{44}\alpha^2 + \left(2\, B_{41} \frac{\partial S}{\partial \varrho_1} + 2\, B_{42} \frac{\partial S}{\partial \varrho_1} + 2\, B_{43} \frac{\partial S}{\partial v_3}\right) \alpha$$

$$= 2\,(U + \gamma_1).$$

Hat man ein Integral S dieser Gleichung gefunden, wo ausser α und γ_1 noch zwei andere Integrationskonstanten γ_2 und γ_3 vorkommen, so sind die ϱ und v_1 durch die folgenden Gleichungen gegeben:

(18) $$\left\{\begin{aligned} t + \beta_1 &= \frac{\partial S}{\partial \gamma_1} \\ \beta_2 &= \frac{\partial S}{\partial \gamma_2} \\ \beta_3 &= \frac{\partial S}{\partial \gamma_3} \\ \beta_4 &= \frac{\partial S}{\partial \alpha} + v_1, \end{aligned}\right.$$

wo nun $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ vier neue willkürliche Parameter bezeichnen, welche mit $\alpha_1, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ und den vier Schwerpunktskonstanten die genügende Zahl von Integrationskonstanten liefern.

Die s. g. intermediären Integrale sind:

$$p_1 = \frac{\partial S}{\partial \varrho_1}$$

$$p_2 = \frac{\partial S}{\partial \varrho_2}$$

$$p_3 = \frac{\partial S}{\partial \varrho_3}$$

$$p_4 = \alpha\,,$$

woraus unmittelbar ersichtlich ist, dass

$$(19) \qquad A_{41}\frac{d\varrho_1}{dt} + A_{42}\frac{d\varrho_2}{dt} + A_{43}\frac{d\varrho_3}{dt} + A_{44}\frac{dv_1}{dt} = \alpha$$

ein Integral der Gleichungen (14) ist, was übrigens direkt aus diesen Gleichungen selbst hervorgeht; (19) fällt in der That mit dem Flächenintegral zusammen.



ÖFVERSIGT AF K. SV. VET.-AKAD. FÖRHANDL. 1899. N:o 4.

MEDDELANDEN

FRÅN

LUNDS ASTRONOMISKA OBSERVATORIUM

N:o 7.

UEBER KOMETENBAHNEXCENTRICITÄTEN. II

VON

ELIS STRÖMGREN

MITGETEILT DEN 12. APRIL 1899 DURCH C. V. L. CHARLIER

STOCKHOLM
KUNGL. BOKTRYCKERIET. P. A. NORSTEDT & SÖNER
1899

ÖFVERSIGT AF K. SV. VET.-AKAD. FÖRHANDL. 1899. N:o 4.

MEDDELANDEN

FRÅN

LUNDS ASTRONOMISKA OBSERVATORIUM

N:o 7.

UEBER KOMETENBAHNEXCENTRICITÄTEN. II

VON

ELIS STRÖMGREN

MITGETEILT DEN 12. APRIL 1899 DURCH C. V. L. CHARLIER

STOCKHOLM
KUNGL. BOKTRYCKERIET. P. A. NORSTEDT & SÖNER
1899

In einem früheren Aufsatze [1]) habe ich die Resultate derjenigen Rechnungen mitgeteilt, die ich für die Bestimmung der Bahn, in welcher Komet 1890 II sich dem Centralkörper unseres Sonnensystemes genähert, ausgeführt habe, und die Gründe dargelegt, die mich zu der Ansicht geführt haben, dass die oskulirenden Elemente für die Lösung derartigen Aufgaben nicht zu gebrauchen sind. Ein Vergleich zwischen den Tabellen über die oskulirenden und die konvergirenden Excentricitäten für den Kometen 1890 II dürfte in dieser Hinsicht als völlig überzeugend gelten können. Im Folgenden beabsichtige ich, die Konseqvenzen, welche in kometenkosmogonischer Hinsicht aus meiner in jener Schrift gemachten Auseinandersetzung gezogen werden können, zu berühren so wie auch etwas näher auf die Begründung einzugehen.

* * *

Bevor ich aber zu diesem Thema übergehe, werde ich die Resultate einer Berechnung der Schwerpunktsexcentricitäten für den Kometen 1890 II mitteilen. In meinem schon erwähnten

---

[1]) Ueber Kometenbahnexcentricitäten. I. Öfversigt af K. Vet.-Akad. Förh. 1898. Årg. 55, N:o 7.

Aufsatze habe ich das Verhältniss zwischen den Schwerpunktsexcentricitäten und den konvergirenden Excentricitäten näher klargestellt. Von vornherein dürfte es nicht leicht sein zu entscheiden welche von diesen Werthen im Allgemeinen am schnellsten gegen das Endziel konvergiren werden. Für den Kometen 1890 II ist der Gang der Differenzen bei den ersten Epochen unbedingt gleichmässiger für die nach meinem Vorschlage berechneten »konvergirenden» Werthe, allein bei der fortgesetzten Rechnung hat es sich herausgestellt, dass wenn wir die Berechnung der Schwerpunktsexcentricitäten zeitlich ebenso weit zurückführen, wie es für die konvergirenden Werthe gemacht worden, die zwei Reihen der Excentricitätswerthe immer näher an einander rücken, und bei der letzten angewandten Zeitepoche, 1884 Jan. 8, ist in der Decimale, der fünften, welche l. c. pag. 431 als die letzte sichere angegeben wurde, völlige Uebereinstimmung erreicht worden.

Für die Berechnung der Schwerpunktselemente haben wir in folgender Weise zu verfahren. Zu den ungestörten Koordinaten, x_0, y_0, z_0, und Geschwindigkeiten, $\frac{dx_0}{dt}$, $\frac{dy_0}{dt}$, $\frac{dz_0}{dt}$, des Kometen werden die Störungswerthe, ξ, η, ζ, $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$, und die Koordinaten, $\xi_\odot$, $\eta_\odot$, $\zeta_\odot$, und Geschwindigkeiten, $\frac{d\xi_\odot}{dt}$, $\frac{d\eta_\odot}{dt}$, $\frac{d\zeta_\odot}{dt}$, der Sonne in Bezug auf den Schwerpunkt des Systemes addirt. Wir erhalten auf dieser Weise die Koordinaten und Geschwindigkeiten des Kometen in Bezug af den Schwerpunkt desjenigen Systemes, das von der Sonne und den in der Störungsrechnung benutzten Planeten, Jupiter und Saturnus, gebildet wird, und mit Hülfe dieser Werthe werden die Bahnexcentricitäten nach den l. c. pag. 407 angegebenen Formeln berechnet. Von diesen Grössen kennen wir jetzt alle mit Ausnahme der Korrektionen für die Koordinaten der Sonne, welche mit Hülfe der l. c. pagg. 411—413 gegebenen Tabellen aus folgenden Gleichungen erhalten werden:

$$\xi_\odot = -\frac{\Sigma m_1 x_1}{1 + \Sigma m_1}$$

$$\eta_\odot = -\frac{\Sigma m_1 y_1}{1 + \Sigma m_1}$$

$$\zeta_\odot = -\frac{\Sigma m_1 z_1}{1 + \Sigma m_1}\,.$$

Wenn wir diese Rechnungen ausführen, erhalten wir folgende Werthe:

	1889 Sept. 18	1889 April 11	1888 Nov. 2	1888 Mai 26	1887 Dec. 18	1887 Juli 11	1887 Febr. 1
$\xi_\odot$	+ 1 252	+ 2 217	+ 3 150	+ 3 998	+ 4 712	+ 5 251	+ 5 585
$\eta_\odot$	+ 3 367	+ 3 299	+ 2 986	+ 2 448	+ 1 708	+ 803	— 226
$\zeta_\odot$	— 59	— 75	— 89	— 100	— 108	— 111	— 109
(x)	+ 2.933 888	+ 4.041 690	+ 4.882 605	+ 5.568 912	+ 6.154 458	+ 6.668 825	+ 7.130 009
(y)	— 1.766 906	— 1.519 444	— 1.164 913	— 0.771 535	— 0.363 433	+ 0.049 231	+ 0.461 690
(z)	— 0.861 898	— 2.381 917	— 3.753 237	— 5.008 140	— 6.173 354	— 7.267 590	— 8.304 074

	1886 Aug. 25	1886 März 18	1885 Okt. 9	1885 Mai 2	1884 Nov. 23	1884 Juni 16	1884 Jan. 8
$\xi_\odot$	+ 5 690	+ 5 553	+ 5 170	+ 4 546	+ 3 698	+ 2 653	+ 1 445
$\eta_\odot$	— 1 332	— 2 468	— 3 582	— 4 620	— 5 534	— 6 275	— 6 800
$\zeta_\odot$	— 102	— 89	— 71	— 49	— 22	+ 8	+ 41
(x)	+ 7.549 774	+ 7.936 267	+ 8.295 364	+ 8.631 451	+ 8.947 912	+ 9.247 394	+ 9.532 018
(y)	+ 0.871 575	+ 1.277 686	+ 1.679 424	+ 2.076 531	+ 2.468 936	+ 2.856 669	+ 3.239 822
(z)	— 9.292 443	— 10.239 941	— 11.152 129	— 12.033 415	— 12.887 368	— 13.716 882	— 14.524 362

	1889 Sept. 18	1889 April 11	1888 Nov. 2	1888 Mai 26	1887 Dec. 18	1887 Juli 11	18[illegible] Fe[illegible]
$\log(x)$	0.467 4428	0.606 5630	0.688 6515	0.745 7708	0.789 1898	0.824 0493	0.853 [illegible]
$\log(y)$	0.247 2135$_n$	0.181 6847$_n$	0.066 2934$_n$	9.887 3556$_n$	9.560 4244$_n$	8.692 2387	9.664 [illegible]
$\log(z)$	9.935 4559$_n$	0.376 9266$_n$	0.574 4060$_n$	0.699 6765$_n$	0.790 5212$_n$	0.861 3904$_n$	0.919 [illegible]
$\log(r)$	0.547 9767	0.692 9595	0.797 1058	0.876 7513	0.940 7487	0.994 0419	1.039 [illegible]
$\log\left(\frac{dx}{dt}\right)$	9.514 8547$_n$	9.374 5691$_n$	9.273 8797$_n$	9.196 9992$_n$	9.135 3264$_n$	9.084 0513$_n$	9.040 [illegible]
$\log\left(\frac{dy}{dt}\right)$	8.550 7578$_n$	8.902 1351$_n$	8.977 6820$_n$	9.003 4058$_n$	9.012 2879$_n$	9.013 9931$_n$	9.013 [illegible]
$\log\left(\frac{dz}{dt}\right)$	9.602 0383	9.556 4989	9.514 5100	9.479 4155	9.449 9173	9.424 6806	9.402 [illegible]
C	— 0.682 467	— 0.682 585	— 0.682 666	— 0.682 714	— 0.682 739	— 0.682 745	— 0.68[illegible]
C_1	— 0.737 362	— 0.737 382	— 0.737 417	— 0.737 444	— 0.737 462	— 0.737 467	— 0.73[illegible]
C_{11}	+ 0.891 455	+ 0.891 385	+ 0.891 316	+ 0.891 251	+ 0.891 193	+ 0.891 141	+ 0.891 [illegible]
$\log p$	0.580 991	0.581 007	0.581 017	0.581 014	0.581 003	0.580 985	0.58[illegible]

	1886 Aug. 25	1886 März 18	1885 Okt. 9	1885 Mai 2	1884 Nov. 23	1884 Juni 16	1884 Jan. [illegible]
$\log(x)$	0.877 9339	0.899 6163	0.918 8354	0.936 0838	0.951 7217	0.966 0193	0.979 [illegible]
$\log(y)$	9.940 3048	0.106 4241	0.225 1603	0.317 3384	0.392 5098	0.455 8599	0.510 [illegible]
$\log(z)$	0.968 1299$_n$	1.010 2975$_n$	1.047 3578$_n$	1.080.3889$_n$	1.110 1642$_n$	1.137 2554$_n$	1.162 [illegible]
$\log(r)$	1.079 3448	1.114 5505	1.146 1319	1.174 7524	1.200 9113	1.224 9918	1.247 [illegible]
$\log\left(\frac{dx}{dt}\right)$	9.002 1596$_n$	8.968 4330$_n$	8.938 2164$_n$	8.910 8644$_n$	8.885 8931$_n$	8.862 9306$_n$	8.841 [illegible]
$\log\left(\frac{dy}{dt}\right)$	9.008 7424$_n$	9.004 3089$_n$	8.999 3999$_n$	8.994 2700$_n$	8.989 0679$_n$	8.983 8793	8.978 [illegible]
$\log\left(\frac{dz}{dt}\right)$	9.383 3139	9.365 9643	9.350 2889	9.336 0024	9.322 8847	9.310 7638	9.299 [illegible]
C	— 0.682 737	— 0.682 729	— 0.682 719	— 0.682 709	— 0.682 702	— 0.682 694	— 0.68[illegible]
C_1	— 0.737 462	— 0.737 456	— 0.737 447	— 0.737 436	— 0.737 430	— 0.737 422	— 0.73[illegible]
C_{11}	+ 0.891 060	+ 0.891 029	+ 0.891 007	+ 0.890 992	+ 0.890 980	+ 0.890 970	+ 0.890 [illegible]
$\log p$	0.580 946	0.580 928	0.580 912	0.580 898	0.580 889	0.580 879	0.580 [illegible]

Schwerpunktsexcentricitäten.

Datum.	e	f'	f''
1889 Sept. 18 . .	1.000 82		
		— 6	
1889 April 11. .	1.000 76		— 21
		— 15	
1882 Nov. 2 . .	1.000 61		+ 3
		— 12	
1882 Mai 26 . .	1.000 49		+ 3
		— 9	
1887 Dec. 18 . .	1.000 40		+ 2
		— 7	
1887 Juli 11 . .	1.000 33		+ 2
		— 5	
1887 Febr. 1 . .	1.000 28		+ 1
		— 4	
1886 Aug. 25 . .	1.000 24		+ 1
		— 3	
1886 März 18 . .	1.000 21		+ 0
		— 3	
1885 Okt. 9 . .	1.000 18		+ 1
		— 2	
1885 Mai 2 . . .	1.000 16		+ 0
		— 2	
1884 Nov. 23 . .	1.000 14		+ 1
		— 1	
1884 Juni 16 . .	1.000 13		+ 0
		— 1	
1884 Jan. 8 . . .	1.000 12		

* * *

Die Excentricitätsberechnung hat also nach beiden Methoden dasselbe Resultat gegeben: die Bahn hyperbolisch, $e = 1.000\ 12$, und ich wage zu behaupten, dass dies der erste Fall ist, wo die Beschaffenheit der ursprünglichen Bahn eines sogenannten nicht-periodischen Kometen dargelegt worden ist.

* * *

Die Frage von der Excentricität der Bahnen ist bekanntlich entscheidend in Bezug auf den Platz, welcher in kosmogonischer Hinsicht den Kometen zugewiesen werden muss, und zu diesem Zwecke sind von verschiedenen Autoren auf Grund der Verzeichnisse über bisjetzt berechneten Kometenbahnexcentricitäten Ueberschläge gemacht worden. Aus der Darstellung in

meinem früheren Aufsatze geht hervor, dass die oskulirenden Excentricitäten (z. B. in GALLES Kometenbahnverzeichniss) für diesen Zweck völlig unbrauchbar sind.

Es kann eigenthümlich erscheinen, dass von allen früheren Verfassern die Thatsache übersehen worden ist, dass man, um aus den Kometenbahnberechnungen einige kosmogonische Schlussfolgerungen ziehen zu können, nicht nur eine Rückwärtsrechnung der Kometenstörungen ausführen muss, sondern auch nach der oeschriebenen Methode die Excentricitäten für die Störungen der Sonne reduciren muss.

Das Uebersehen dieser Thatsache beruht wahrscheinlich darauf, dass man sich über *die Grösse* des Einflusses der Kometen- und Sonnenstörungen auf die Bahnelemente keine richtige Vorstellung gebildet hat. Wir wollen zunächst diese Frage etwas näher ins Auge fassen.

Schon aus der Rechnung THRAENS ist es einleuchtend, welche Bedeutung die Störungen des Kometen für die oskulirenden Elemente besitzen, und aus meiner Rechnung für den Kometen 1890 II geht es hervor, dass die Reduktion für die Sonnenstörungen eine ebenso wichtige Rolle spielt.

Für die Bahnelemente der beiden in Frage stehenden Kometen ist der Effekt der Störungen *von derselben Grössenordnung wie die Korrektionen, deren Ableitung der Zweck der ganzen vorhergemachten zeitraubenden Bahnberechnung gewesen ist.* Und es giebt keinen Grund, weshalb wir annehmen sollten, dass es sich nicht in derselben Weise mit allen anderen Kometenbahnen verhält.

Es stellt sich also heraus, dass die Reduktion für die Störungen nicht eine Korrektion darstellt, welche nur eine kleine Verbesserung der früher erhaltenen Werthe bedeutet, im Gegenteil hat sie eine durchaus fundamentale Bedeutung, und das Resultat der ganzen vorherigen Bahnberechnungsarbeit wird ohne diese Reduktion in kosmogonischer Hinsicht völlig nichtssagend.

* * *

Von allen denjenigen Elementensystemen, welche bisjetzt berechnet worden, ist es nur ein sehr kleiner Bruchteil, der für kosmogonische Zwecke verwerthet werden kann. Es sind nur einige Kometen aus den letzten Decennien, welche in Bezug auf das Beobachtungsmaterial so beschaffen sind, dass die Bahnelemente die für unsern Zweck nöthige Genauigkeit besitzen. In vielen Fällen sind die wahrscheinlichen Fehler der Elementenverbesserungen gar nicht berechnet worden, und bei Kometen, für welche eine solche Berechnung ausgeführt wurde, sind die warscheinlichen Fehler nicht selten von derselben Grössenordnung wie die abgeleiteten Elementenkorrektionen selbst.

Eine nothwendige Bedingung für die Verwendung der Bahnelemente für kosmogonische Zwecke ist natürlich dass *schon bei der Bahnberechnung* Rücksicht auf die Störungen genommen wurde. In solchen Fällen, wo die Beobachtungszeit so kurz ist, dass die Störungen keine Rolle spielen können, ist sie zweifelsohne auch zu kurz als dass die Elemente überhaupt die für kosmogonische Schlussfolgerungen nöthige Genauigkeit besitzen könnten.

Wenn indessen für einen bestimmten Kometen die Anzahl der Beobachtungen genügend gross ist und die Beobachtungszeit genügend lang, und wenn die Störungen berücksichtigt worden, ist es von entscheidender Bedeutung welche von den grösseren Planeten bei der Störungsrechnung herangezogen worden.

In Bezug auf diese Frage findet sich oft in Kometenbahnberechnungen eine Auseinandersetzung, die zweifelsohne als unrichtig bezeichnet werden muss. Ein graphischer Ueberschlag hat ergeben, dass sich der Komet keinem der grösseren Planeten sehr nahe kommt, und der Berechner zieht daraus die Schlussfolgerung, dass die Störungen unberücksichtigt bleiben können oder dass es jedenfalls genügt, wenn man auf den grössten Planeten, Jupiter, Rücksicht nimmt.

Dabei ist aber einerseits zu bemerken, dass man, wenn es sich um so kleine Grössen wie in diesem Falle handelt, nicht ohne Rechnung eine Entscheidung treffen kann, andererseits

darf es nicht vergessen werden dass die Störungsrechnung sich auf *die Differenz* zwischen der Einwirkung des störenden Planeten auf *die Sonne* und auf den Kometen basirt.

Teoretisch wäre es natürlich das richtigste, bei der Störungsrechnung *sämmtliche* grössere Planeten mitzunehmen. Allein bei einer derartigen umfassenden Untersuchung würde man in die Rechnung Kvantitäten hineinziehen, welche im Vergleich zu den gesuchten Werthen von verschwindender Bedeutung sind.

Die Bedingung dafür, dass wir bei der Störungsrechnung einen störenden Planeten unberücksichtigt lassen können, ist entweder dass die Einwirkung des Planeten auf die Sonne annähernd gleich gross ist wie seine Wirkung auf den Kometen, oder aber dass der Effekt sowohl für die Sonne wie für den Kometen auf Grund der Kleinheit der Masse oder wegen der Grösse der Entfernung ausser Acht gelassen werden kann.

Demgemäss müssen wir die Frage in zwei zerlegen. Wir untersuchen die Einwirkung sämmtlicher störenden Planeten auf die Bewegung der Sonne. Dieser Störungskomponent ist für sämmtliche Bahnberechnungen von derselben Grössenordnung. Wir ersehen daraus, welche von den störenden Planeten niemals unberücksichtigt werden dürfen. Dann gilt es für jeden konkreten Fall zu entscheiden ob auf Grund der speciellen Lage der Kometenbahn auch andere Planeten mit in Betracht kommen müssen.

Um einen Ueberschlag von der Einwirkung sämmtlicher grösseren Planeten auf die Sonne zu machen, können wir jeden Planeten für sich behandeln, ohne dass wir dabei Grössen von niederer als zweiter Ordnung bezüglich der Massen vernachlässigen.

Wenn wir mit $\bar{r}$ die grösste Entfernung der Sonne von dem gemeinsamen Schwerpunkt bezeichnen und mit $\bar{V}$ die grösste lineare Geschwindigkeit der Sonne, so erhalten wir bei Vernachlässigung von Grössen zweiter Ordnung:

$$\bar{r} = m_1 a(1 + e)$$

$$\bar{V} = m_1 \frac{k}{\sqrt{a}} \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}},$$

wo k die gaussische Konstante, m_1 die Masse des Planeten, a die halbe grosse Achse der Bahn und e die Excentricität bedeuten, und wenn wir diese Rechnungen ausführen, so erhalten wir folgende Tabelle:

	☿	♀	♁	♂
$\text{Log}\frac{1}{m_1}$	6.982 6	5.604 1	5.550 84	6.428 19
Log a	9.587 8	9.859 8	0.000 00	0.182 89
e	0.205 6	0.006 8	0.016 77	0.093 26
$\bar{r}$	0.000 0000	0.000 0018	0.000 0028	0.000 0006
$\bar{V}$	0.000 0001	0.000 0020	0.000 0020	0.000 0002
	♃	♄	♅	♆
$\text{Log}\frac{1}{m_1}$	3.020 811	3.544 27	4.842 42	4.294 47
Log a	0.716 217	0.980 22	1.283 71	1.478 78
e	0.048 25	0.056 07	0.046 86	0.008 99
$\bar{r}$	0.005 2044	0.002 8817	0.000 9141	0.001 5428
$\bar{V}$	0.000 3018	0.000 0672	0.000 0074	0.000 0065

wo die Geschwindigkeiten für ein Intervall von 40 Tagen Gültigkeit haben.

Es geht aus dieser Tabelle unmittelbar hervor, dass bei der Störungsrechnung die Berücksichtigung der vier inneren Planeten nur dann nöthig ist, wenn sie sich dem Kometen sehr stark nähern. Nur in diesem Falle können sie bei der Berechnung der oskulirenden Elemente eine Rolle spielen. Bei der darauf folgenden Rückwärtsrechnung und Reduktion für die Störungen der Sonne können sie immer vernachlässigt werden.

Neptunus und Uranus sind so weit entfernt, dass sie zu der Zeit um die Perihelpassage, d. h. während der Beobachtungszeit, die Störungen für den Kometen und für die Sonne fast gleich gross sein müssen, und für diese Planeten sind die Sonnengeschwindigkeiten so gering, dass es für die Berechnung der konvergirenden Excentricitäten fast völlig gleichgültig ist, ob Neptunus und Uranus berücksichtigt worden oder nicht.

Bei Jupiter und Saturnus erreichen dagegen die Koordinaten und Geschwindigkeiten der Sonne so grosse Beträge, dass keiner von diesen Planeten bei der Berechnung einer Kometenbahn vernachlässigt werden darf, *wenn auch der Komet während seiner ganzen Bahn nicht in ihrer Nähe kommt.*

* * *

Wollen wir schliesslich die Ergebnisse dieser und der vorigen Schrift kurz zusammenfassen.

Von den zur Zeit vorliegenden Kometenbahnberechnungen können nur die wenigsten für kosmogonische Zwecke verwerthet werden. In den meisten Fällen kann wegen der Unzulänglichkeit des Beobachtungsmateriales die nöthige Genauigkeit nicht erreicht werden. Für solche Zwecke, wie z. B. HOLETSCHEK in seinen intressanten Schriften über Kometenbahnen verfolgt hat, wäre dagegen, wenn wir von den Excentricitätsüberschlägen [1]) absehen, ein bedeutend niedriger Approximationsgrad wie der in den Kometenbahnberechnungen erhaltene vollständig genügend.

Um einen reellen Nutzen aus der grossen Arbeit, welche eine Kometenbahnberechnung verursacht, ziehen zu können, ist es nothwendig die Differentialgleichungen für die Elementenkorrektionen durch Berechnung der Störungen zu verbessern, und zwar sind bei der Störungsrechnung die Planeten Jupiter und Saturnus immer zu berücksichtigen.

Aus den auf diese Weise erhaltenen oskulirenden Elementen bekommt man durch Rückwärtsrechnung der Störungen und durch Reduktion für die Sonnenstörungen eine Reihe Excentricitätswerthe, welche gegen den Werth konvergiren, der die ursprüngliche Bahn des Kometen bezeichnet. Am besten ist es, in jedem Falle die Berechnung sowohl der »konvergirenden» Excentricitäten wie der Schwerpunktsexcentricitäten auszuführen.

[1]) I. HOLETSCHEK, Ueber die Vertheilung der Bahnelemente der Kometen pagg. 2—5.

ÖFVERSIGT AF K. SV. VET.-AKAD. FÖRHANDL. 1899. N:o 7.

8.

MEDDELANDEN

FRÅN

LUNDS ASTRONOMISKA OBSERVATORIUM

N:o 8.

INTRODUCTION OF THE ARGUMENT X_m IN THE PROBLEM OF PERTUBATIONS

BY

C. A. SCHULTZ-STEINHEIL

COMMUNICATED 1899 SEPTEMBER 13 BY C. V. L. CHARLIER

STOCKHOLM
KUNGL. BOKTRYCKERIET. P. A. NORSTEDT & SÖNER
1899

ÖFVERSIGT AF K. SV. VET.-AKAD. FÖRHANDL. 1899 N:o 7.

MEDDELANDEN

FRÅN

LUNDS ASTRONOMISKA OBSERVATORIUM

N:o 8.

INTRODUCTION OF THE ARGUMENT X_m IN THE PROBLEM OF PERTUBATIONS

BY

C. A. SCHULTZ-STEINHEIL

COMMUNICATED 1899 SEPTEMBER 13 BY C. V. L. CHARLIER

STOCKHOLM
KUNGL. BOKTRYCKERIET. P. A. NORSTEDT & SÖNER
1899

As far back as 1874 GYLDÉN devised a method of treating the perturbative problem by means of which it is possible to develop the perturbations after two arguments, one of which is constant during half the time of the planet's revolution. Several astronomers viz. BACKLUND, BOHLIN, CALLANDREAU and others have afterwards successfully used this method in their calculations of comets as well as planets, but only for evaluating relative perturbations. CHARLIER, for the first time, has adopted the method on absolute perturbations of a small planet, Thetis; he made his calculations after formulas given by HANSEN, and introduced the argument after all integrations. There are, however, several advantages one gains by introducing the argument before the integration. One of these is that on integrating we then only have integers as divisors and consequently no small divisors appear, and therefore this integration is easely performed. Afterwards we have to determine the constants which are functions of the introduced argument, and therefore constant only during half a revolution. Here the small divisors that did not occur during the integration appear on taking sums of trigonometrical series. We may, however, arrange the formulas so that no terms are enlarged by small divisors and then again diminished by small factors, as is the case in HANSEN's theory of the small planets.

Thus by the above mentioned method we do not effect the disappearance of the small divisors; but this is not our aim in as much more as it is proved that these must for the most part occur in any form. Our chief gain consists in avoiding by this means a very laborious tabulation.

In »Grunddragen af en metod för beräkningen af absoluta störingar, med hufvudsakligaste afseende på de små planeternas banor» GYLDÉN has given formulas for determining the absolute perturbations of a small planet; he has, however, not developed the formulas in detail, or made them fit for numerical calculations, and, so far as I am aware, they have never been practically employed. GYLDÉN, contrary to CHARLIER, introduces the argument X_m already in the developation of $\frac{\Delta}{a}$, and he therefore must calculate this quantity as well as all following quantities separately for an odd and an even m, which makes the necessary labour very great in comparison with HANSEN's. In other points too he deviates from HANSEN in such a way that the calculations seem to become more difficult than necessary. I have therefore thought it better to follow the method given by HANSEN in his »Auseinandersetzung etc.» for determining the quantities $a\frac{\partial\Omega}{\partial\varepsilon}$, $ar\frac{\partial\Omega}{\partial r}$ and $a^2\frac{\partial\Omega}{\partial Z}$ and thus develope them with arguments $i\varepsilon - i'V$ and afterwards change this argument to an argument $i\varepsilon - i'X_m$. It is my intention in a future paper to evaluate the absolute perturbations of a small planet by this method, and I will here give the formulas necessary for this calculation.

In HANSEN's »Auseinandersetzung etc.» we find the formules necessary for determining the coefficients in the following expressions:

$$\left.\begin{aligned} a\frac{\partial\Omega}{\partial\varepsilon} &= \Sigma\Sigma\beta(i\,i's)\cos(i\varepsilon - i'V) - \Sigma\Sigma\beta(i\,i'c)\sin(i\varepsilon - i'V) \\ ar\frac{\partial\Omega}{\partial r} &= \Sigma\Sigma c(i\,i'c)\cos(i\varepsilon - i'V) + \Sigma\Sigma c(i\,i's)\sin(i\varepsilon - i'V) \\ a^2\frac{\partial\Omega}{\partial Z} &= \Sigma\Sigma d(i\,i'c)\cos(i\varepsilon - i'V) + \Sigma\Sigma d(i\,i's)\sin(i\varepsilon - i'V) \end{aligned}\right\} \quad \text{(I)}$$

where

$$V = \mu\varepsilon + c' - \mu c \tag{II}$$

but we have

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\Xi}{d\varepsilon} &= -\frac{3}{\cos^2\varphi}\left[\frac{2+e^2}{2} - 2e\cos\varepsilon + \frac{e^2}{2}\cos 2\varepsilon\right] a\frac{\partial\Omega}{\partial\varepsilon} + \\
&\quad + \frac{3e}{\cos^2\varphi}\left[\sin\varepsilon - \frac{e}{2}\sin 2\varepsilon\right] ar\frac{\partial\Omega}{\partial r} \\
\frac{dY}{d\varepsilon} &= +\frac{2}{\cos^2\varphi}\left[-\frac{3e}{2} + 2\cos\varepsilon - \frac{e}{2}\cos 2\varepsilon\right] a\frac{\partial\Omega}{\partial\varepsilon} + \\
&\quad + \frac{2}{\cos^2\varphi}\left[\sin\varepsilon - \frac{e}{2}\sin 2\varepsilon\right] ar\frac{\partial\Omega}{\partial r} \\
\frac{d\Psi}{d\varepsilon} &= +\frac{2}{\cos^3\varphi}\left[(2-e^2)\sin\varepsilon - \frac{e}{2}\sin 2\varepsilon\right] a\frac{\partial\Omega}{\partial\varepsilon} - \\
&\quad - \frac{1}{\cos^3\varphi}\left[e + 2\cos^2\varphi\cos\varepsilon - e\cos 2\varepsilon\right] ar\frac{\partial\Omega}{\partial r} \\
\frac{dp}{d\varepsilon} &= \left[\sin\varepsilon - \frac{e}{2}\sin 2\varepsilon\right] a^2\frac{\partial\Omega}{\partial Z} \\
\frac{dq}{d\varepsilon} &= \frac{1}{\cos\varphi}\left[-\frac{3e}{2} + (1+e^2)\cos\varepsilon - \frac{e}{2}\cos 2\varepsilon\right] a^2\frac{\partial\Omega}{\partial Z}
\end{aligned}\right\} \tag{III}$$

and if we write

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\Xi}{d\varepsilon} &= \Sigma\Sigma b^{(1)}(i\,i'c)\cos(i\varepsilon - i'V) + \Sigma\Sigma b^{(1)}(i\,i's)\sin(i\varepsilon - i'V) \\
\frac{dY}{d\varepsilon} &= \Sigma\Sigma b^{(2)}(i\,i'c)\cos(i\varepsilon - i'V) + \Sigma\Sigma b^{(2)}(i\,i's)\sin(i\varepsilon - i'V) \\
\frac{d\Psi}{d\varepsilon} &= \Sigma\Sigma b^{(3)}(i\,i'c)\cos(i\varepsilon - i'V) + \Sigma\Sigma b^{(3)}(i\,i's)\sin(i\varepsilon - i'V) \\
\frac{dp}{d\varepsilon} &= \Sigma\Sigma b^{(4)}(i\,i'c)\cos(i\varepsilon - i'V) + \Sigma\Sigma b^{(4)}(i\,i's)\sin(i\varepsilon - i'V) \\
\frac{dq}{d\varepsilon} &= \Sigma\Sigma b^{(5)}(i\,i'c)\cos(i\varepsilon - i'V) + \Sigma\Sigma b^{(5)}(i\,i's)\sin(i\varepsilon - i'V)
\end{aligned}\right\} \tag{IV}$$

a comparation of (III) and (IV) immediately gives the relations between the b-coefficients and the β-, c- and d-coefficients. In these expressions we now have to introduce the argument X_m which is easily made with the aid of the expression (78) in

CHARLIER's »Untersuchungen über die allgemeinen Jupiter-Störungen des Planeten Thetis», and there results equations of the form:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\Xi}{d\varepsilon} &= \Sigma\Sigma a^{(1)}(i\,i'c)\cos(i\varepsilon - i'X_m) + \Sigma\Sigma a^{(1)}(i\,i's)\sin(i\varepsilon - i'X_m)\\
\frac{dY}{d\varepsilon} &= \Sigma\Sigma a^{(2)}(i\,i'c)\cos(i\varepsilon - i'X_m) + \Sigma\Sigma a^{(2)}(i\,i's)\sin(i\varepsilon - i'X_m)\\
\frac{d\Psi}{d\varepsilon} &= \Sigma\Sigma a^{(3)}(i\,i'c)\cos(i\varepsilon - i'X_m) + \Sigma\Sigma a^{(3)}(i\,i's)\sin(i\varepsilon - i'X_m)\\
\frac{dp}{d\varepsilon} &= \Sigma\Sigma a^{(4)}(i\,i'c)\cos(i\varepsilon - i'X_m) + \Sigma\Sigma a^{(4)}(i\,i's)\sin(i\varepsilon - i'X_m)\\
\frac{dq}{d\varepsilon} &= \Sigma\Sigma a^{(5)}(i\,i'c)\cos(i\varepsilon - i'X_m) + \Sigma\Sigma a^{(5)}(i\,i's)\sin(i\varepsilon - i'X_m)
\end{aligned}\right\}\text{(V)}$$

Here is to be remarked that the $a\left(i\,i'^{c}_{s}\right)$ are different for odd and even m, and we will write them by $a_1\left(i\,i'^{c}_{s}\right)$ and $a_2\left(i\,i'^{c}_{s}\right)$ resp.

The differential equation for determining $n\delta z$ is:

$$\frac{dn\delta z}{d\varepsilon} = \Xi(1 - e\cos\varepsilon) + Y\left\{-\frac{3e}{2} + (1 + e^2)\cos\varepsilon - \frac{e}{2}\cos 2\varepsilon\right\} + \\ + \Psi\cos\varphi\left\{\sin\varepsilon - \frac{e}{2}\sin 2\varepsilon\right\} \quad . \;.\; .\; . \quad \text{(VI)}$$

which equation we write in the following form:

$$\frac{dn\delta z}{dz} = \Sigma\Sigma a^{(0)}(i\,i'c)\cos(i\varepsilon - i'X_m) + \Sigma\Sigma a^{(0)}(i\,i's)\sin(i\varepsilon - i'X_m). \quad \text{(VII)}$$

If we integrate (V) and (VII) only regarding the periodic terms we get the following system:

$$\left.\begin{aligned}
n\delta z &= \Sigma\Sigma A^{(0)}(i\,i'c)\cos(i\varepsilon - i'X_m) + \Sigma\Sigma A^{(0)}(i\,i's)\sin(i\varepsilon - i'X_m)\\
\Xi &= \Sigma\Sigma A^{(1)}(i\,i'c)\cos(i\varepsilon - i'X_m) + \Sigma\Sigma A^{(1)}(i\,i's)\sin(i\varepsilon - i'X_m)\\
Y &= \Sigma\Sigma A^{(2)}(i\,i'c)\cos(i\varepsilon - i'X_m) + \Sigma\Sigma A^{(2)}(i\,i's)\sin(i\varepsilon - i'X_m)\\
\Psi &= \Sigma\Sigma A^{(3)}(i\,i'c)\cos(i\varepsilon - i'X_m) + \Sigma\Sigma A^{(3)}(i\,i's)\sin(i\varepsilon - i'X_m)\\
p &= \Sigma\Sigma A^{(4)}(i\,i'c)\cos(i\varepsilon - i'X_m) + \Sigma\Sigma A^{(4)}(i\,i's)\sin(i\varepsilon - i'X_m)\\
q &= \Sigma\Sigma A^{(5)}(i\,i'c)\cos(i\varepsilon - i'X_m) + \Sigma\Sigma A^{(5)}(i\,i's)\sin(i\varepsilon - i'X_m)
\end{aligned}\right\}\text{(VIII)}$$

At last we have the following equation for the determination of and $\frac{u}{\cos i}$:

$$\left.\begin{aligned} 2\nu &= -\tfrac{2}{3}\Xi - Y\left\{\frac{1}{2}\cos\varepsilon - \frac{e}{2}\right\} - \Psi\frac{\cos\varphi}{2}\sin\varepsilon \\ \frac{u}{\cos i} &= q\cos\varphi\sin\varepsilon - p(\cos\varepsilon - e) \end{aligned}\right\} \quad \text{(IX)}$$

where we thus need no further integrations.

After this short exposition of the method for finding the periodic terms, we pass to the essential part, the determination of the constants of integration.

One whichever of the differential quotients $\frac{d\Xi}{d\varepsilon}$, $\frac{dY}{d\varepsilon}$, $\frac{d\Psi}{d\varepsilon}$, $\frac{dp}{d\varepsilon}$ or $\frac{dq}{d\varepsilon}$, which we will design with $\frac{dF_m}{d\varepsilon}$, is of the form

$$\frac{dF_m}{d\varepsilon} = \Gamma_m + \Sigma\Sigma a_1(i\,i'c)\cos(i\varepsilon - i'X_m) + \Sigma\Sigma a_1(i\,i's)\sin(i\varepsilon - i'X_m) \quad (1)$$

— in the following we always suppose m to be odd — where

$$\Gamma_m = \Sigma a_1(0\,i'c)\cos\,i'X_m - \Sigma a_1(0\,i's)\sin i'X_m\,; \quad (2)$$

this is valid for

$$m\pi - \frac{\pi}{2} \leqq \varepsilon \leqq m\pi + \frac{\pi}{2}\,; \quad (3)$$

instead of the variable ε we will here introduce a new variable λ with the following relation existing between ε and λ:

$$\varepsilon = m\pi - \frac{\pi}{2} + \lambda\,;\; 0 \leqq \lambda \leqq \pi\,. \quad (4)$$

The reason of this process will be evident after the integrations have been performed. The equation (1) now becomes

$$\frac{dF_m}{d\lambda} = \Gamma_m + \Sigma\Sigma a_1(i\,i'c)\cos\left[i\left(m\pi - \frac{\pi}{2}\right) + i\lambda - i'X_m\right] + \\ + \Sigma\Sigma a_1(i\,i's)\sin\left[i\left(m\pi - \frac{\pi}{2}\right) + i\lambda - i'X_m\right]\,.\;.\;.\;. \quad (5)$$

and thus

$$F_m = \Gamma_m\cdot\lambda + S_m + \Sigma\Sigma A_1(i\,i'c)\cos\left[i\left(m\pi - \frac{\pi}{2}\right) + i\lambda - i'X_m\right] + \\ + \Sigma\Sigma A_1(i\,i's)\sin\left[i\left(m\pi - \frac{\pi}{2}\right) + i\lambda - i'X_m\right]\,. \quad (6)$$

in like manner

$$F_{m-1} = \Gamma_{m-1} \cdot \lambda + S_{m-1} +$$
$$+ \Sigma\Sigma A_2(i\,i'c) \cos\left[i\left(\overline{m-1}\,\pi - \frac{\pi}{2}\right) + i\lambda - i'X_{m-1}\right] +$$
$$+ \Sigma\Sigma A_2(i\,i's) \sin\left[i\left(\overline{m-1}\,\pi - \frac{\pi}{2}\right) + i\lambda - i'X_{m-1}\right] \ldots \quad (7)$$

Both these expressions (6) and (7) are alike if we put $\lambda = 0$, in the first and $\lambda = \pi$ in the second, whence we get:

$$S_m + \Sigma\Sigma A_1(i\,i'c) \cos\left[i\left(m\pi - \frac{\pi}{2}\right) - i'X_m\right] +$$
$$+ \Sigma\Sigma A_1(i\,i's) \sin\left[i\left(m\pi - \frac{\pi}{2}\right) - i'X_m\right] =$$
$$= + \Sigma\Sigma A_2(i\,i'c) \cos\left[i\left(m\pi - \frac{\pi}{2}\right) - i'X_{m-1}\right] +$$
$$+ \Sigma\Sigma A_2(i\,i's) \sin\left[i\left(m\pi - \frac{\pi}{2}\right) - i'X_{m-1}\right] + \pi\Gamma_{m-1} + S_{m-1} \quad (8)$$

and thus

$$S_m - S_{m-1} - \pi\Gamma_{m-1} = C_m - C_{m-1} \ldots \quad (9)$$

if

$$C_m - C_{m-1} = \Sigma\Sigma A_2(i\,i'c) \cos\left[i\left(m\pi - \frac{\pi}{2}\right) - i'X_{m-1}\right] +$$
$$+ \Sigma\Sigma A_2(i\,i's) \sin\left[i\left(m\pi - \frac{\pi}{2}\right) - i'X_{m-1}\right] -$$
$$- \Sigma\Sigma A_1(i\,i'c) \cos\left[i\left(m\pi - \frac{\pi}{2}\right) - i'X_m\right] -$$
$$- \Sigma\Sigma A_1(i\,i's) \sin\left[i\left(m\pi - \frac{\pi}{2}\right) - i'X_m\right] \ldots \quad (10)$$

Further we have

$$\frac{dn\delta z}{d\varepsilon} = \Xi(1 - e\cos\varepsilon) + Y\left[-\frac{3e}{2} + (1 + e^2)\cos\varepsilon - \frac{e}{2}\cos 2\varepsilon\right] +$$
$$+ \Psi\left[\cos\varphi\sin\varepsilon - \frac{e}{2}\cos\varphi\sin 2\varepsilon\right] \ldots \quad (11)$$

or if we here introduce the variable λ

$$\frac{dn\delta z}{d\lambda} = \Xi\left[1 - e\cos\left(m\pi - \frac{\pi}{2} + \lambda\right)\right] +$$

$$+ Y\left[-\frac{3e}{2} + (1 + e^2)\cos\left(m\pi - \frac{\pi}{2} + \lambda\right) -\right.$$

$$\left. - \frac{e}{2}\cos\left(\overline{2m-1}\,\pi + 2\lambda\right)\right] + \Psi\left[\cos\varphi\sin\left(m\pi - \frac{\pi}{2} + \lambda\right) -\right.$$

$$\left. - \frac{e}{2}\cos\varphi\sin\left(\overline{2m-1}\,\pi + 2\lambda\right)\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

or

$$\frac{dn\delta z}{d\lambda} = \Xi\left[1 - e\cos m\pi\sin\lambda\right] +$$

$$+ Y\left[-\frac{3e}{2} + (1 + e^2)\cos m\pi\sin\lambda + \frac{e}{2}\cos 2\lambda\right] +$$

$$+ \Psi\left[-\cos\varphi\cos m\pi\cos\lambda + \frac{e}{2}\cos\varphi\sin 2\lambda\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

or by putting the values of Ξ, Y and Ψ found from (6) in (13) we get

$$\frac{dn\delta z}{d\lambda} = \left[\Gamma_m^{(1)}\cdot\lambda + S_m^{(1)}\right]\left[1 - e\cos m\pi\sin\lambda\right] +$$

$$+ \left[\Gamma_m^{(2)}\cdot\lambda + S_m^{(2)}\right]\left[-\frac{3e}{2} + (1+e^2)\cos m\pi\sin\lambda + \frac{e}{2}\cos 2\lambda\right] +$$

$$+ \left[\Gamma_m^{(3)}\lambda + S_m^{(3)}\right]\left[-\cos\varphi\cos m\pi\cos\lambda + \frac{e}{2}\cos\varphi\sin 2\lambda\right] +$$

$$+ \text{periodic terms containing } \lambda \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

and by integration

$$n\delta z = K_m + \left[\Gamma_m^{(1)}\cdot\frac{\lambda^2}{2} + S_m^{(1)}\cdot\lambda\right] - \frac{3e}{2}\left[\Gamma_m^{(2)}\cdot\frac{\lambda^2}{2} + S_m^{(2)}\cdot\lambda\right] +$$

$$- e\cos m\pi\Gamma_m^{(1)}\left[\sin\lambda - \lambda\cos\lambda\right] +$$

$$+ (1 + e^2)\cos m\pi\,\Gamma_m^{(2)}\left[\sin\lambda - \lambda\cos\lambda\right] +$$

$$+ \frac{e}{8}\Gamma_m^{(2)}\left[\cos 2\lambda + 2\lambda\sin 2\lambda\right] - \cos\varphi\cos m\pi\Gamma_m^{(3)}\left[\cos\lambda + \lambda\sin\lambda\right] +$$

$$+ \frac{e}{8}\cos\varphi\,\Gamma_m^{(3)}\left[\sin 2\lambda - 2\lambda\cos 2\lambda\right] +$$

This formula is continued on the following page.

$$+ e\cos m\pi\, S^{(1)}_m \cos\lambda - (1+e^2)\cos m\pi\, S^{(2)}_m \cos\lambda +$$

$$+ \frac{e}{4} S^{(2)}_m \sin 2\lambda - \cos\varphi \cos m\pi\, S^{(3)}_m \sin\lambda - \frac{e}{4}\cos\varphi\, S^{(3)}_m \cos 2\lambda +$$

$$+ \Sigma\Sigma A^{(0)}_1 (i\,i'c) \cos\left[i\left(m\pi - \frac{\pi}{2}\right) + i\lambda - i'X_m\right] +$$

$$+ \Sigma\Sigma A^{(0)}_1 (i\,i's) \sin\left[i\left(m\pi - \frac{\pi}{2}\right) + i\lambda - i'X_m\right]. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Here K_m is the constant of integration, which is however function of m and only constant as to λ. By reducing (15) we have

$$n\delta z = K_m + \frac{\lambda^2}{2}\left[\Gamma^{(1)}_m - \frac{3e}{2}\Gamma^{(2)}_m\right] + \lambda\left[S^{(1)}_m - \frac{3e}{2} S^{(2)}_m + \Gamma^{(0)}_m\right] +$$

$$+ \lambda\cos\lambda\cos m\pi\left[e\Gamma^{(1)}_m - (1+e^2)\Gamma^{(2)}_m\right] +$$

$$+ 2\lambda\cos 2\lambda\left[-\frac{e}{8}\cos\varphi\,\Gamma^{(3)}_m\right] +$$

$$+ \lambda\sin\lambda\left[-\cos\varphi\cos m\pi\,\Gamma^{(3)}_m\right] +$$

$$+ 2\lambda\sin 2\lambda\left[+\frac{e}{8}\Gamma^{(2)}_m\right] +$$

$$+ \cos\lambda\cos m\pi\left[-\cos\varphi\Gamma^{(3)}_m + eS^{(1)}_m - (1+e^2) S^{(2)}_m\right] +$$

$$+ \cos 2\lambda\left[+\frac{e}{8}\Gamma^{(2)}_m - \frac{e}{4}\cos\varphi\, S^{(3)}_m\right] +$$

$$+ \sin\lambda\cos m\pi\left[-e\Gamma^{(1)}_m + (1+e^2)\Gamma^{(2)}_m - \cos\varphi S^{(3)}_m\right] +$$

$$+ \sin 2\lambda\left[+\frac{e}{8}\cos\varphi\,\Gamma^{(3)}_m + \frac{e}{4} S^{(2)}_m\right] +$$

$$+ \Sigma\Sigma A^{(0)}_1 (i\,i'c) \cos\left[i\left(m\pi - \frac{\pi}{2}\right) + i\lambda - i'X_m\right] +$$

$$+ \Sigma\Sigma A^{(0)}_1 (i\,i's) \sin\left[i\left(m\pi - \frac{\pi}{2}\right) + i\lambda - i'X_m\right]. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

From (16) we get for determination of K_m

$$K_m - K_{m-1} = \frac{\pi^2}{2}\left[\Gamma^{(1)}_{m-1} - \frac{3e}{2}\Gamma^{(2)}_{m-1}\right] + \pi\left[S^{(1)}_{m-1} - \frac{3e}{2} S^{(2)}_{m-1}\right] -$$

$$-\pi\left[e\cos\overline{m-1}\,\pi\Gamma^{(1)}_{m-1} - (1+e^2)\cos(m-1)\,\pi\,\Gamma^{(2)}_{m-1}\right] +$$

$$+ 2\pi\left[-\frac{e}{8}\cos\varphi\,\Gamma^{(3)}_{m-1}\right] -$$

This formula is continued on the following page.

$$-\Big[-\cos\varphi\cos m\pi\,\Gamma^{(3)}_{m} + e\cos m\pi\,S^{(1)}_{m} -$$

$$-(1+e^2)\cos m\pi\,S^{(2)}_{m}\Big] -$$

$$-\Big[-\cos\varphi\cos\overline{m-1}\,\pi\,\Gamma^{(3)}_{m-1} + e\cos\overline{m-1}\,\pi\,S^{(1)}_{m-1} -$$

$$-(1+e^2)\cos\overline{m-1}\,\pi\cdot S^{(2)}_{m-1}\Big] -$$

$$-\Big[+\frac{e}{8}\Gamma^{(2)}_{m} - \frac{e}{4}\cos\varphi\,S^{(3)}_{m}\Big] +$$

$$+\Big[+\frac{e}{8}\Gamma^{(2)}_{m-1} - \frac{e}{4}\cos\varphi\,S^{(3)}_{m-1}\Big] +$$

$$+ C^{(0)}_{m} - C^{(0)}_{m-1} \,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (17)$$

where

$$C^{(0)}_{m} - C^{(0)}_{m-1} = + \Sigma\Sigma A^{(0)}_{2}(i\,i'c)\cos\Big[i\Big(m\pi - \frac{\pi}{2}\Big) - i'X_{m-1}\Big] +$$

$$+ \Sigma\Sigma A^{(0)}_{2}(i\,i's)\sin\Big[i\Big(m\pi - \frac{\pi}{2}\Big) - i'X_{m-1}\Big] -$$

$$- \Sigma\Sigma A^{(0)}_{1}(i\,i'c)\cos\Big[i\Big(m\pi - \frac{\pi}{2}\Big) - i'X_{m}\Big] -$$

$$- \Sigma\Sigma A^{(0)}_{1}(i\,i's)\sin\Big[i\Big(m\pi - \frac{\pi}{2}\Big) - i'X_{m}\Big] \,.\;.\;. \quad (18)$$

Taking regard to (9), (17) may be written as follows:

$$K_m - K_{m-1} = -\frac{\pi^2}{2}\Big[\Gamma^{(1)}_{m-1} - \frac{3e}{2}\Gamma^{(2)}_{m-1}\Big] +$$

$$+ \pi\Big[S^{(1)}_{m} - \frac{3e}{2}S^{(2)}_{m}\Big] -$$

$$- \frac{e}{8}\Big[\Gamma^{(2)}_{m} - \Gamma^{(2)}_{m-1}\Big] +$$

$$+ \Big[\Gamma^{(3)}_{m} - \Gamma^{(3)}_{m-1}\Big]\cos\varphi\cos m\pi -$$

$$- \Big[C^{(1)}_{m} - C^{(1)}_{m-1}\Big]\Big[+\pi + e\cos m\pi\Big] -$$

$$+ \Big[C^{(2)}_{m} - C^{(2)}_{m-1}\Big]\Big[\frac{3e}{2}\pi + (1+e^2)\cos m\pi\Big] +$$

$$+ \frac{e}{4}\Big[C^{(3)}_{m} - C^{(3)}_{m-1}\Big]\cos\varphi +$$

$$+ \Big[C^{(0)}_{m} - C^{(0)}_{m-1}\Big] \,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (19)$$

By summation of (19) from $m = 1$ to $m = m$ we get

$$K_m - K_0 = \left[C_m^{(0)} - C_0^{(0)}\right] - \pi\left[C_m^{(1)} - C_0^{(1)}\right] + \frac{3e}{2}\pi\left[C_m^{(2)} - C_0^{(2)}\right] +$$

$$+ \frac{e}{4}\cos\varphi\left[C_m^{(3)} - C_0^{(3)}\right] - \frac{e}{8}\left[\Gamma_m^{(2)} - \Gamma_0^{(2)}\right] -$$

$$- \sum_{m=1}^{m} \cos m\pi \left\{e\left[C_m^{(1)} - C_{m-1}^{(1)}\right] - (1+e^2)\left[C_m^{(2)} - C_{m-1}^{(2)}\right] - \right.$$

$$\left. - \cos\varphi\left[\Gamma_m^{(3)} - \Gamma_{m-1}^{(3)}\right]\right\}$$

$$- \frac{\pi^2}{2}\sum_{m=1}^{m}\Gamma_m^{(1)} + \frac{\pi^2}{2}\Gamma_m^{(1)} + \frac{\pi^2}{2}\cdot\frac{3e}{2}\cdot\sum_{m=1}^{m}\Gamma_m^{(2)} - \frac{\pi^2}{2}\cdot\frac{3e}{2}\Gamma_m^{(2)} +$$

$$+ \pi\sum_{m=1}^{m} S_m^{(1)} - \frac{3e}{2}\pi\sum_{m=1}^{m} S_m^{(2)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (20)$$

Here we have taken into consideration the relation

$$\Gamma_0^{(1)} = \frac{3e}{2}\Gamma_0^{(2)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (21)$$

a relation that we get, if we remember that

$$\Xi - \frac{3e}{2}Y = 3\frac{\partial\Omega}{\partial\varepsilon}$$

where the right member does not contain any constant independent of m.

If we regard (16) we find that

$$n\delta z = K_m + \lambda^2 C + \text{etc.};$$

if we had not introduced λ instead of ε we had got

$$n\delta z = K'_m + \varepsilon^2 C' + \text{etc.};$$

that is, in $n\delta z$ terms containing ε^2 and growing indefinitely with the quadrat of the time would have ocurred, but in this case K'_m would have contained terms multiplied by m^2, which would have equalled the secular terms in $\varepsilon^2 C'$; it was for avoiding the occurrence of those terms that λ was introduced. As λ always lies between 0 and π, $\lambda^2 C$ does not grow indefinitely with the time and in this case K_m does not contain terms multiplied by m^2.

Before proceeding further in the development of the expression for the constant K_m, we will give proper forms to the constants of which K_m is a function, viz. C_m and S_m, and for which reason we will prove certain necessary relations. At first we will take the sum $\sum_{n=1}^{m=m} A \cos n\varkappa$, where we suppose that A has two different values, — one for an odd factor n to $\varkappa$, which we will design with A_1 and the other for an even n, viz. A_2. Thus if m is odd we get

$$\sum_{n=1}^{m} A \cos n\varkappa = A_1[\cos m\varkappa + \cos(m-2)\varkappa + \ldots + \cos 3\varkappa + \cos\varkappa] + \\ + A_2[\cos(m-1)\varkappa + \cos(m-3)\varkappa + \ldots + \cos 4\varkappa + \cos 2\varkappa] \\ = A_1 \frac{\sin\frac{m+1}{2}\varkappa \cos\frac{m+1}{2}\varkappa}{\sin\varkappa} + A_2 \frac{\sin\frac{m-1}{2}\varkappa \cos\frac{m+1}{2}\varkappa}{\sin\varkappa} \quad (22)$$

$$\sum_{n=1}^{m} (-1)^n A \cos n\varkappa = \\ = -A_1 \frac{\sin\frac{m+1}{2}\varkappa \cos\frac{m+1}{2}\varkappa}{\sin\varkappa} + A_2 \frac{\sin\frac{m-1}{2}\varkappa \cos\frac{m+1}{2}\varkappa}{\sin\varkappa} \quad (23)$$

$$\sum_{n=1}^{m} A \sin n\varkappa = A_1 \frac{\sin\frac{m+1}{2}\varkappa \sin\frac{m+1}{2}\varkappa}{\sin\varkappa} + A_2 \frac{\sin\frac{m-1}{2}\varkappa \sin\frac{m+1}{2}\varkappa}{\sin\varkappa} \quad (24)$$

$$\sum_{n=1}^{m} (-1)^n A \sin n\varkappa = \\ = -A_1 \frac{\sin\frac{m+1}{2}\varkappa \sin\frac{m+1}{2}\varkappa}{\sin\varkappa} + A_2 \frac{\sin\frac{m-1}{2}\varkappa \sin\frac{m+1}{2}\varkappa}{\sin\varkappa} \quad (25)$$

If m even

$$\sum_{n=1}^{m} A \cos n\varkappa = + A_1 \frac{\sin\frac{m}{2}\varkappa \cos\frac{m}{2}\varkappa}{\sin\varkappa} + A_2 \frac{\sin\frac{m}{2}\varkappa \cos\frac{m+2}{2}\varkappa}{\sin\varkappa} \quad (26)$$

$$\sum_{n=1}^{m} (-1)^n A \cos n\varkappa = - A_1 \frac{\sin\frac{m}{2}\varkappa \cos\frac{m}{2}\varkappa}{\sin\varkappa} + A_2 \frac{\sin\frac{m}{2}\varkappa \cos\frac{m+2}{2}\varkappa}{\sin\varkappa} \quad (27)$$

$$\sum_{n=1}^{m} A \sin n\varkappa = + A_1 \frac{\sin\frac{m}{2}\varkappa \sin\frac{m}{2}\varkappa}{\sin\varkappa} + A_2 \frac{\sin\frac{m}{2}\varkappa \sin\frac{m+2}{2}\varkappa}{\sin\varkappa} \quad (28)$$

$$\sum_{n=1}^{m} (-1)^n A \sin n\varkappa = - A_1 \frac{\sin\frac{m}{2}\varkappa \sin\frac{m}{2}\varkappa}{\sin\varkappa} + A_2 \frac{\sin\frac{m}{2}\varkappa \sin\frac{m+2}{2}\varkappa}{\sin\varkappa}. \quad (29)$$

If in the expression (10) for $C_m - C_{m-1}$ we put for shortness $A(^c_s)$ for $A(i\,i'\,^c_s)$ and if we introduce the following significations:

$$i'\mu\pi = \varkappa \text{ and } i'(\mu c - c') = \theta \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (30)$$

for an arbitrary i and i' may be written

$$\begin{aligned} C_m - C_{m-1} = (-1)^{mi}\Big\{ &+ A_2(c)\cos\left(-i\frac{\pi}{2} + \theta - \overline{m-1}\varkappa\right) + \\ &+ A_2(s)\sin\left(-i\frac{\pi}{2} + \theta - \overline{m-1}\varkappa\right) - \\ &- A_1(c)\cos\left(-i\frac{\pi}{2} + \theta - m\varkappa\right) - \\ &- A_1(s)\sin\left(-i\frac{\pi}{2} + \theta - m\varkappa\right)\Big\} \; . \; . \; . \; . \quad (31) \end{aligned}$$

and thus for an odd and even i resp.

$$\begin{aligned} C_m - C_{m-1} = -(-1)^m(-1)^{\frac{i+1}{2}} \{ &+ A_2(c)\sin(\theta - \overline{m-1}\varkappa) - \\ &- A_2(s)\cos(\theta - \overline{m-1}\varkappa) - \\ &- A_1(c)\sin(\theta - m\varkappa) + \\ &+ A_1(s)\cos(\theta - m\varkappa)\} \; . \; . \; . \quad (32) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_m - C_{m-1} = (-1)^{\frac{i}{2}} \{ &+ A_2(c)\cos(\theta - \overline{m-1}\varkappa) + \\ &+ A_2(s)\sin(\theta - \overline{m-1}\varkappa) - \\ &- A_1(c)\cos(\theta - m\varkappa) - \\ &- A_1(s)\sin(\theta - m\varkappa)\} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (33) \end{aligned}$$

The equations (32) and (33) may be written resp.

$$C_m - C_{m-1} = -(-1)^m(-1)^{\frac{i+1}{2}}\{\Phi_1 \cos m\varkappa - \Psi_1 \sin m\varkappa\} \; . \quad (34)$$

$$C_m - C_{m-1} = (-1)^{\frac{i}{2}}\{\Psi_1 \cos m\varkappa + \Phi_1 \sin m\varkappa\} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (35)$$

where

$$\left.\begin{aligned}\Phi_1 &= A_2(c)\sin(\theta+\varkappa) - A_2(s)\cos(\theta+\varkappa) - A_1(c)\sin\theta + A_1(s)\cos\theta \\ \Psi_1 &= A_2(c)\cos(\theta+\varkappa) + A_2(s)\sin(\theta+\varkappa) - A_1(c)\cos\theta - A_1(s)\sin\theta\end{aligned}\right\}(36)$$

If all indices in the right member of Φ or Ψ change, this is expressed by resp. Φ_2 and Ψ_2.

By summation of the right members of (34) and (35) with respect to i we get resp.

$$C_m - C_{m-1} = -(-1)^m\left[\Phi_1(u)\cos m\varkappa - \Psi_1(u)\sin m\varkappa\right] \quad . \quad . \quad (37)$$

and

$$C_m - C_{m-1} = \Psi_1(g)\cos m\varkappa + \Phi_1(g)\sin m\varkappa \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

where for odd i

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty}(-1)^{\frac{i+1}{2}}\Phi(i) = -\Phi(+1) + \Phi(+3) - \Phi(+5) + \ldots + \Phi(-1) - \Phi(-3) + \Phi(-5) - \ldots = \Phi(u) \quad (39)$$

and for even i

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty}(-1)^{\frac{i}{2}}\Phi(i) = -\Phi(+2) + \Phi(+4) - \Phi(+6) + \ldots - \Phi(-2) + \Phi(-4) - \Phi(-6) + \ldots = \Phi(g) \quad (40)$$

and analogous for Ψ and A and thus

$$\left.\begin{aligned}\Phi_1\binom{u}{g} &= A_2\left(\tbinom{u}{g}c\right)\sin(\theta+\varkappa) - A_2\left(\tbinom{u}{g}s\right)\cos(\theta+\varkappa) - \\ &\quad - A_1\left(\tbinom{u}{g}c\right)\sin\theta + A_1\left(\tbinom{u}{g}s\right)\cos\theta \\ \Psi_1\binom{u}{g} &= A_2\left(\tbinom{u}{g}c\right)\cos(\theta+\varkappa) + A_2\left(\tbinom{u}{g}s\right)\sin(\theta+\varkappa) - \\ &\quad - A_1\left(\tbinom{u}{g}c\right)\cos\theta - A_1\left(\tbinom{u}{g}s\right)\sin\theta\,.\end{aligned}\right\}(41)$$

By summation of (37) and (38) from $m=1$ to $m=m$ with regard taken to the formulas (22)—(29) we have resp. for odd i

$$\sum_{m=1}^{m}(C_m - C_{m-1}) = +\Phi_1(u)\frac{\sin\frac{m+1}{2}\varkappa\cos\frac{m+1}{2}\varkappa}{\sin\varkappa} - \Phi_2(u)\frac{\sin\frac{m-1}{2}\varkappa\cos\frac{m+1}{2}\varkappa}{\sin\varkappa} -$$

This formula is continued on the following page.

$$- \Psi_1(u) \frac{\sin \frac{m+1}{2} \varkappa \sin \frac{m+1}{2} \varkappa}{\sin \varkappa} +$$

$$+ \Psi_2(u) \frac{\sin \frac{m-1}{2} \varkappa \sin \frac{m+1}{2} \varkappa}{\sin \varkappa} \quad \ldots\ldots (42)$$

and for even i

$$\sum_{m=1}^{m} (C_m - C_{m-1}) = \quad \Psi_1(g) \frac{\sin \frac{m+1}{2} \varkappa \cos \frac{m+1}{2} \varkappa}{\sin \varkappa} +$$

$$+ \Psi_2(g) \frac{\sin \frac{m-1}{2} \varkappa \cos \frac{m+1}{2} \varkappa}{\sin \varkappa}$$

$$+ \Phi_1(g) \frac{\sin \frac{m+1}{2} \varkappa \sin \frac{m+1}{2} \varkappa}{\sin \varkappa} +$$

$$+ \Phi_2(g) \frac{\sin \frac{m-1}{2} \varkappa \sin \frac{m+1}{2} \varkappa}{\sin \varkappa} \quad \ldots\ldots (43)$$

and if we add (42) and (43)

$$C_m - C_0 = \quad [\Phi_1(u) + \Psi_1(g)] \frac{\sin \frac{m+1}{2} \varkappa \cos \frac{m+1}{2} \varkappa}{\sin \varkappa} -$$

$$-[\Phi_2(u) - \Psi_2(g)] \frac{\sin \frac{m-1}{2} \varkappa \cos \frac{m+1}{2} \varkappa}{\sin \varkappa} +$$

$$+ [\Phi_1(g) - \Psi_1(u)] \frac{\sin \frac{m+1}{2} \varkappa \sin \frac{m+1}{2} \varkappa}{\sin \varkappa} +$$

$$+ [\Phi_2(g) + \Psi_2(u)] \frac{\sin \frac{m-1}{2} \varkappa \sin \frac{m+1}{2} \varkappa}{\sin \varkappa} \quad \ldots\ldots (44)$$

and quite analogous

$$\sum_{m=1}^{m} (-1)^m [C_m - C_{m-1}] =$$

$$= -[\Phi_1(u) + \Psi_1(g)] \frac{\sin \frac{m+1}{2} \varkappa \cos \frac{m+1}{2} \varkappa}{\sin \varkappa} -$$

$$-[\Phi_2(u) - \Psi_2(g)] \frac{\sin \frac{m-1}{2} \varkappa \cos \frac{m+1}{2} \varkappa}{\sin \varkappa} -$$

This formula is continued on the following page.

$$-[\Phi_1(g) - \Psi_1(u)]\frac{\sin\frac{m+1}{2}\varkappa\sin\frac{m+1}{2}\varkappa}{\sin\varkappa} +$$

$$+ [\Phi_2(g) + \Psi_2(u)]\frac{\sin\frac{m-1}{2}\varkappa\sin\frac{m+1}{2}\varkappa}{\sin\varkappa} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45)$$

These expressions (44) and (45) are afterwards employed on reducing the equation for K_m.

Our next step is to determine $\sum_{m=1}^{m}\Gamma_m$. We may write (2) for an arbitrary i' as follows:

$$\Gamma_m = a_1(0\,i'\,c)\cos(\theta - m\varkappa) + \Sigma a_1(0\,i'\,s)\sin(\theta - m\varkappa) \quad . \quad . \quad . \quad (46)$$

or

$$\Gamma_m = A_1 \cos m\varkappa + B_1 \sin m\varkappa \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (47)$$

where

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= a_1(0\,i'\,c)\cos\theta + a_1(0\,i'\,s)\sin\theta \\ B_1 &= a_1(0\,i'\,c)\sin\theta - a_1(0\,i'\,s)\cos\theta \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48)$$

and thus

$$\sum_{m=1}^{m}\Gamma_m = \sum_{m=1}^{m}[A_1\cos m\varkappa + B_1 \sin m\varkappa] =$$

$$= A_1\frac{\sin\frac{m+1}{2}\varkappa\cos\frac{m+1}{2}\varkappa}{\sin\varkappa} + A_2\frac{\sin\frac{m-1}{2}\varkappa\cos\frac{m+1}{2}\varkappa}{\sin\varkappa}$$

$$+ B_1\frac{\sin\frac{m+1}{2}\varkappa\sin\frac{m+1}{2}\varkappa}{\sin\varkappa} + B_2\frac{\sin\frac{m-1}{2}\varkappa\sin\frac{m+1}{2}\varkappa}{\sin\varkappa} \quad . \quad . \quad (49)$$

which is the expression sought for $\sum_{m=1}^{m}\Gamma_m$.

We have now at length to determine $\sum_{m=1}^{m}S_m$. From the expression (9) we get by summation

$$S_m - S_0 = \pi\sum_{m=1}^{m}\Gamma_{m-1} + \sum_{m=1}^{m}(C_m - C_{m-1}) \quad . \quad . \quad . \quad (50)$$

and thus

$$\sum_{m=1}^{m}S_m = mS_0 + \pi\sum_{m=1}^{m}\sum_{m=1}^{m}\Gamma_{m-1} + \sum_{m=1}^{m}\sum_{m=1}^{m}(C_m - C_{m-1}) \quad . \quad . \quad (51)$$

or

$$\sum_{m=1}^{m} S_m = mS_0 + \sum_{m=1}^{m}\left[\pi\sum_{m=1}^{m}\Gamma_m + \sum_{m=1}^{m}(C_m - C_{m-1})\right] - \pi\sum_{m=1}^{m}\Gamma_m + m\pi\Gamma_0 \quad (52)$$

as

$$\sum_{m=1}^{m}\Gamma_{m-1} = \sum_{m=1}^{m}\Gamma_m - \Gamma_m + \Gamma_0 \,. \quad \ldots\ldots \quad (53)$$

If we consider (44) and (49) we get

$$\pi\sum_{m=1}^{m}\Gamma_m + \sum_{m=1}^{m}(C_m - C_{m-1}) =$$

$$= D_1^{(1)}\frac{\sin\frac{m+1}{2}\varkappa\cos\frac{m+1}{2}\varkappa}{\sin\varkappa} + D_2^{(2)}\frac{\sin\frac{m-1}{2}\varkappa\cos\frac{m+1}{2}\varkappa}{\sin\varkappa} +$$

$$+ E_1^{(1)}\frac{\sin\frac{m+1}{2}\varkappa\sin\frac{m+1}{2}\varkappa}{\sin\varkappa} + E_2^{(2)}\frac{\sin\frac{m-1}{2}\varkappa\sin\frac{m+1}{2}\varkappa}{\sin\varkappa} \quad \ldots \quad (54)$$

where

$$\left.\begin{aligned} D_1^{(1)} &= \pi A_1 + \Phi_1(u) + \Psi_1(g) \\ D_2^{(2)} &= \pi A_2 - \Phi_2(u) + \Psi_2(g) \\ E_1^{(1)} &= \pi B_1 + \Phi_1(g) - \Psi_1(u) \\ E_2^{(2)} &= \pi B_2 + \Phi_2(g) + \Psi_2(u) . \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (55)$$

We may write (54) as follows:

$$\pi\sum_{m=1}^{m}\Gamma_m + \sum_{m=1}^{m}(C_m - C_{m-1}) =$$

$$= + \frac{D_1^{(1)}}{2\sin\varkappa}\sin(m+1)\varkappa + \frac{D_2^{(2)}}{2\sin\varkappa}[\sin m\varkappa - \sin\varkappa] +$$

$$+ \frac{E_1^{(1)}}{2\sin\varkappa}[1 - \cos(m+1)\varkappa] + \frac{E_2^{(2)}}{2\sin\varkappa}[\cos\varkappa - \cos m\varkappa] . \quad (56)$$

From (56) we get by summation with respect to m

$$\sum_{m=1}^{m}\left\{\pi\sum_{m=1}^{m}\Gamma_m + \sum_{m=1}^{m}(C_m - C_{m-1})\right\} =$$

$$= H_1\cdot\frac{m+1}{2} + H_2\cdot\frac{m-1}{2} + \sum_{m=1}^{m}\left\{F_1\frac{\cos m\varkappa}{\sin\varkappa} + G_1\frac{\sin m\varkappa}{\sin\varkappa}\right\} \quad . \quad (57)$$

where

$$\left.\begin{aligned} F_1^{(1)} &= \frac{D_1^{(1)}\sin\varkappa}{2} - \frac{E_1^{(1)}\cos\varkappa}{2} - \frac{E_2^{(2)}}{2} \\ G_1^{(1)} &= \frac{D_1^{(1)}\cos\varkappa}{2} + \frac{D_2^{(2)}}{2} + \frac{E_1^{(1)}\sin\varkappa}{2} \\ H_1 &= \frac{E_1^{(1)} + E_2^{(2)}\cos\varkappa - D_2^{(2)}\sin\varkappa}{2\sin\varkappa} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (58)$$

Thus by (22) and (24) we have

$$\sum_{m=1}^{m}\left\{\pi\sum_{m=1}^{m}\Gamma_m + \sum_{m=1}^{m}(C_m - C_{m-1})\right\} = H_1\cdot\frac{m+1}{2} + H_2\cdot\frac{m-1}{2} +$$

$$+ F_1^{(1)}\frac{\sin\frac{m+1}{2}\varkappa\cos\frac{m+1}{2}\varkappa}{\sin^2\varkappa} + F_1^{(2)}\frac{\sin\frac{m-1}{2}\varkappa\cos\frac{m+1}{2}\varkappa}{\sin^2\varkappa}$$

$$+ G_1^{(1)}\frac{\sin\frac{m+1}{2}\varkappa\sin\frac{m+1}{2}\varkappa}{\sin^2\varkappa} + G_1^{(2)}\frac{\sin\frac{m-1}{2}\varkappa\sin\frac{m+1}{2}\varkappa}{\sin^2\varkappa} \quad \ldots \quad (59)$$

By introducing the expressions (49) and (59) in (52) we get

$$\sum_{m=1}^{m} S_m = m(S_0 + \Gamma_0) + H_1\cdot\frac{m+1}{2} + H_2\cdot\frac{m-1}{2} +$$

$$+ (F_1^{(1)} - A_1\sin\varkappa)\frac{\sin\frac{m+1}{2}\varkappa\cos\frac{m+1}{2}\varkappa}{\sin^2\varkappa} +$$

$$+ (F_1^{(2)} - A_2\sin\varkappa)\frac{\sin\frac{m-1}{2}\varkappa\cos\frac{m+1}{2}\varkappa}{\sin^2\varkappa} +$$

$$+ (G_1^{(1)} - B_1\sin\varkappa)\frac{\sin\frac{m+1}{2}\varkappa\sin\frac{m+1}{2}\varkappa}{\sin^2\varkappa} +$$

$$+ (G_1^{(2)} - B_2\sin\varkappa)\frac{\sin\frac{m-1}{2}\varkappa\sin\frac{m+1}{2}\varkappa}{\sin^2\varkappa} \quad (60)$$

which is the expression sought for $\sum_{m=1}^{m} S_m$.

By (44), (45), (49) and (60) now the equation (20) for K_m will become

where

$$W_2 = \frac{\pi^2}{4}\left(B_2^{(1)} - B_2^{(2)}\right) - \cos\varphi B_2^{(3)} - \frac{e}{8} B_2^{(2)} + \beta_2 + f_1^{0.4} + f_1^{(4)} +$$

$$+ \frac{1}{\sin\varkappa}\left\{f_2^{0.1} + \alpha_1 + \tfrac{1}{2} f_1^{(1)} + \tfrac{1}{2} f_2^{(1)}\right\} + \frac{\cos\varkappa}{\sin\varkappa}\left\{f_1^{0.2} + \alpha_2 + f_1^{(2)}\right\} -$$

$$- \frac{1}{2\sin^2\varkappa}\left(f_1^{(4)} + f_2^{(4)}\right) - \frac{\cos\varkappa}{2\sin^2\varkappa}\left(f_1^{(3)} + f_2^{(3)}\right). \quad \ldots \ldots (67)$$

From (50), taking (56) into consideration, we have at last for odd m

$$S_m = S_0 + \frac{E_1^{(1)} + E_2^{(2)}\cos\varkappa - D_2^{(2)}\sin\varkappa}{2\sin\varkappa} + F_1^{(1)}\frac{\cos m\varkappa}{\sin\varkappa} + G_1^{(1)}\frac{\sin m\varkappa}{\sin\varkappa}. \quad (68)$$

We may write (44) för odd m:

$$C_m^{(n)} - C_0^{(n)} = \frac{-\varphi_2^{n.2}\sin\varkappa + \varphi_1^{n.3} + \varphi_2^{n.4}\cos\varkappa}{2\sin\varkappa} +$$

$$+ \frac{\varphi_1^{n.1}\sin\varkappa - \varphi_1^{n.3}\cos\varkappa - \varphi_2^{n.4}}{2\sin\varkappa}\cos m\varkappa +$$

$$+ \frac{\varphi_1^{n.1}\cos\varkappa + \varphi_2^{n.2} + \varphi_1^{n.3}\sin\varkappa}{2\sin\varkappa}\sin m\varkappa$$

and for even m:

$$C_m^{(n)} - C_0^{(n)} = \frac{-\varphi_1^{n.2}\sin\varkappa + \varphi_2^{n.3} + \varphi_1^{n.4}\cos\varkappa}{2\sin\varkappa} +$$

$$+ \frac{\varphi_1^{n.2}\sin\varkappa - \varphi_2^{n.3} - \varphi_1^{n.4}\cos\varkappa}{2\sin\varkappa}\cos m\varkappa +$$

$$+ \frac{\varphi_1^{n.1} + \varphi_2^{n.2}\cos\varkappa + \varphi_1^{n.4}\sin\varkappa}{2\sin\varkappa}\sin m\varkappa.$$

From (61) and (62) it is evident that U, V and W are enlarged by small divisors and afterwards these coefficients again are partly diminished by the factor $\sin m\varkappa$ and, besides, several great terms disappear in the sum. It is however possible to avoid this inconvenience. K_m may also be written in the form

$$K_m = K_0 + m\pi\left(S_1^{(1)} - \frac{3e}{2} S_0^{(2)}\right) +$$
$$+ f_1^{(0)} \cdot a_1^{(0)} + f_2^{(0)} \cdot a_2^{(0)} + f_3^{(0)} \cdot a_3^{(0)} + f_4^{(0)} \cdot a_4^{(0)} +$$
$$+ f_1^{(1)} \cdot a_1^{(1)} + f_2^{(1)} \cdot a_2^{(1)} + f_3^{(1)} \cdot a_3^{(1)} + f_4^{(1)} \cdot a_4^{(1)}$$

where the f-coefficients are independent of m and the small divisors and thus calculated once for all and the factors a growing with m.

The expressions S_m and C_m may also be written in the same form, with the same factors a viz.

$$S_m = S_0 + g_1^{(0)} a_1^{(0)} + g_2^{(0)} a_2^{(0)} + g_3^{(0)} a_3^{(0)} + g_4^{(0)} a_4^{(0)}$$
$$C_m = C_0 + h_1^{(0)} a_1^{(0)} + h_2^{(0)} a_2^{(0)} + h_3^{(0)} a_3^{(0)} + h_4^{(0)} a_4^{(0)}$$

where the g- and h-coefficients are independent of m and the small divisors.

It now remains to determine the real constants of integration viz. K_0, $S_0^{(1)}$, $S_0^{(2)}$, $S_0^{(3)}$, $S_0^{(4)}$, $S_0^{(5)}$, which is accomplished by the condition that the perturbations shall be zero at the epoch. The determination of $n\delta z$ thus beeing concluded, the developments of 2ν and $\frac{u}{\cos i}$ are now easily performed. We had (IX)

$$2\nu = -\tfrac{2}{3}\Xi - Y\left\{\tfrac{1}{2}\cos\varepsilon - \frac{e}{2}\right\} - \Psi\frac{\cos\varphi}{2}\sin\varepsilon$$

where we at first have to introduce the variable λ by which

$$2\nu = -\tfrac{2}{3}\Xi - \tfrac{1}{2}Y\{\cos m\pi\sin\lambda - e\} + \tfrac{1}{2}\Psi\cos\varphi\cos m\pi\cos\lambda\,.$$

If in this equation we substitute the values of Ξ, Y and Ψ found from (6) there results:

$$\begin{aligned}2\nu = &-\tfrac{2}{3}\left[\Gamma_m^{(1)}\lambda + S_m^{(1)}\right] - \\ &-\tfrac{1}{2}\left[\Gamma_m^{(2)}\lambda + S_m^{(2)}\right]\left[\cos m\pi\sin\lambda - e\right] + \\ &+\tfrac{1}{2}\left[\Gamma_m^{(3)}\lambda + S_m^{(3)}\right]\cos m\pi\cos\varphi\cos\lambda + \text{periodic terms.}\end{aligned}$$

The equation of $\frac{u}{\cos i}$ was (IX)

$$\frac{u}{\cos i} = q\cos\varphi\sin\varepsilon - p(\cos\varepsilon - e)\,.$$

After introduction of λ and the expressions for p and q found from (6) we find:

$$\frac{u}{\cos i} = -\left[\Gamma_m^{(4)}\lambda + S_m^{(4)}\right]\left[\cos m\pi \sin\lambda - e\right] -$$
$$-\left[\Gamma_m^{(5)}\lambda + S_m^{(5)}\right]\cos\varphi \cos m\pi \cos\lambda + \text{periodic terms.}$$

Here we must bear in mind that no quantity calculated is afterwards enlarged by small divisors, but many are diminished by the divisor i. Moreover no quantities are formed by the difference of two large quantities, and thus we get them more accurately than otherwise would be possible and we need not begin the calculation with so many decimals. In many cases it will be sufficient to consider the greatest terms, and thus in K_m, S_m and C_m only those in which small divisors occur, and in the periodic terms for those which are of the highest degrees with respect to e; under such circumstances the determination of $n\delta z$, 2ν and $\frac{u}{\cos i}$ for a certain epoch will be easily made. If they have to be determined with great accuracy we may bring the periodic terms to the form

$$A(i) \cos i\lambda + B(i) \sin i\lambda$$

where $A(i)$ and $B(i)$ must be determined for each half revolution and it would not be so easily performed to determine $n\delta z$, 2ν and $\frac{u}{\cos i}$ for a single value of λ, but if we had to determine these quantities for many successive values of λ within the same half revolution (the same value of m) — the quantities $A(i)$ and $B(i)$ once calculated — this would not take long to make, and an ephemerid would thus by this method be easily performed. I am now calculating the planet (263) *Dresda* after this metod and hope soon to arrive at a result. The formulas here given are not always developed to a degree convenient for numerical calculation, but I have considered it better to make those developments in connexion with the application of the formulas on a numerical example.

ÖFVERSIGT AF K. SV. VET.-AKAD. FÖRHANDL. 1899. N:o 7.

MEDDELANDEN

FRÅN

LUNDS ASTRONOMISKA OBSERVATORIUM

N:o 9.

UEBER AKROMATISCHE LINSENSYSTEME

VON

C. V. L. CHARLIER

(ZWEITE MITTEILUNG)

MITGETEILT DEN 13. SEPTEMBER 1899

STOCKHOLM
KUNGL. BOKTRYCKERIET. P. A. NORSTEDT & SÖNER
1899

ÖFVERSIGT AF K. SV. VET.-AKAD. FÖRHANDL. 1899 N:o 7.

MEDDELANDEN

FRÅN

LUNDS ASTRONOMISKA OBSERVATORIUM

N:o 9.

UEBER AKROMATISCHE LINSENSYSTEME

VON

C. V. L. CHARLIER

(ZWEITE MITTEILUNG)

MITGETEILT DEN 13. SEPTEMBER 1899

STOCKHOLM
KUNGL. BOKTRYCKERIET. P. A. NORSTEDT & SÖNER
1899

1. In einer vorigen Mittheilung habe ich bei der Diskussion der aus zwei getrennten Gläsern bestehenden akromatischen Linsenkombinationen einen Fall übersehen; und indem ich jetzt zu demselben zurückkomme, werde ich gleichzeitig die Verhältnisse be zweilinsigen Linsenkombinationen etwas näher erörtern.

Wie im vorigen Aufsatz [1]) hervorgehoben wurde lässt sich aus zwei Linsen, die auf einem Abstand von einander gestellt sind, nur dann ein akromatisches Linsensystem zusammensetzen, wenn man der einen oder der anderen Linse oder beiden eine mehr oder weniger beträchtliche Glasdicke giebt. Man kann zwar unter Anwendung von zwei unendlich dünnen Linsen bewirken, dass die *Gesammtbrennweite* des Linsensystems für zwei verschiedene Farben gleich ausfällt, und es lässt sich auch aus beliebigen Glassorten Linsenkombinationen aus zwei dünnen Linsen ausführen, bei denen die *Vereinigungsweiten* für zwei Farben zusammenfallen, bei denen also die Strahlen von zwei verschiedenen Farben in demselben Punkt die optische Achse schneiden. Diese Bedingungen *gleichzeitig* zu erfüllen ist aber nicht möglich, sei es denn, dass man die Glasdicke des Linsen von derselben Grössenordnung wählt, wie der Abstand zwischen

---

[1]) Ich werde denselben im Folgenden kurzweg mit I bezeichnen.

den beiden Linsen. Sind, bei unendlich dünnen Linsen, die Brennweiten für zwei Strahlen von verschiedener Farbe einander gleich, so werden doch die Brennpunkte für diese beiden Farben nicht zusammenfallen; und wenn man das letztere bewirkt, so sind die Brennweiten wieder verschieden, d. h. auch wenn Strahlen von zwei Farben sich in einem Punkt auf der Achse schneiden, so werden die Strahlen doch nicht parallel in den Fokus einfallen, woraus folgt, dass die Bilder von verschiedener Farbe von verschiedener Grösse werden.

Ein Linsensystem, das nur die *eine* von den Bedingungen für den Akromatismus erfüllt — und das ich *halbakromatisches* nennen will — kann in folgender Weise berechnet werden.

2. Nehmen wir zuerst an, dass die Brennweiten zusammenfallen. Nach I (10) hat man dann die beiden Gleichungen

$$(1) \qquad \begin{cases} -1 = x + y + txy \\ \;\;\, 0 = Ax + By + txy(A + B), \end{cases}$$

und die Elimination zwischen den beiden Gleichungen führt zur folgenden Formel zur Bestimmung von x

$$(2) \qquad x^2 + x\left[\frac{1}{t}\left(1 - \frac{A}{B}\right) + 1 + \frac{A}{B}\right] + \frac{1}{t} = 0.$$

Diese Gleichung kann man bei einer ganz beliebigen Wahl der Glassorten erfüllen, obgleich deswegen nicht diese Wahl gleichgültig ist. Nimmt man die beiden Linsen von derselben Glasart, so nehmen die Gleichungen eine besonders einfache Form an, und diese Wahl hat noch den Vortheil, dass in diesem Fall der Akromatismus (Gleichheit der Brennweiten) nicht nur für zwei Farben, sondern für alle Farben *gleichzeitig* erfüllt ist, da nämlich die zweite Gleichung (1) für $A = B$ von der Farbe unabhängig ist.

Ich habe nun in meiner vorigen Abhandlung behauptet, dass, wenn die Linsen aus derselben Glassorte verfertigt sind, die Gleichungen (1) nur für Linsensysteme mit negativer Brennweite, d. h. für *Okulare* (unter anderen für das nach HUYGENS genannte Okular) erfüllt werden können. Dies ist indessen ein Irrthum,

was mir eigentlich bekannt war, da ich schon November 1897 darüber an D:r R. STEINHEIL geschrieben hatte, und derselbe, hierdurch veranlasst, auch ein nach dieser Formeln berechnetes Objektiv verfertigt hatte und somit ein akromatisches (oder richtiger halbakromatisches) vollständiges Fernrohr aus einer einzigen Glassorte fertig gestellt hatte.

Ist $A = B$, so giebt die Gleichung (2)

$$x = -1 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{t}},$$

und hieraus erhält man für die Vereinigungsweite den Ausdruck:

$$(3) \qquad g = 1 + tx = 1 - t \pm \sqrt{t^2 - t}.$$

Um einen nicht imaginären Ausdruck für g zu erhalten, muss in diesem Falle immer der Abstand (t) zwischen den Linsen grösser als die Gesammtbrennweite des Linsensystems genommen werden, und die Formel (3) zeigt nun, dass dann immer der eine Werth von g *positiv*, der andere *negativ* sein muss. Im letzteren Fall haben wir es mit einem Okular, im vorigen mit einem Objektiv zu thun.

Die Gesammtlänge eines solchen Objektives ist gleich $t + g$, also

$$1 + \sqrt{t^2 - t},$$

also beispielswiese:

für $t = 1.0$;	Fernrohrlänge	$= 1.00$
$t = 1.5$	»	$= 1.87$
$t = 2.0$	»	$= 2.41$
$t = 3.0$	»	$= 3.45.$

Der Umstand, dass der Abstand zwischen der beiden Linsen immer grösser als die Gesammtbrennweite des Linsensystems sein muss, ist ein grosser Nachtheil für solche Fernröhre, da nämlich hierdurch das Fernrohr theils eine verhältnissmessig grosse Länge bekommt, theils auch ein geringes Gesichtsfeld erhält.

3. Im Allgemeinen wird es indessen vorteilhafter sein die beiden Linsen aus verschiedenen Glassorten zu wählen. Wird die Gleichung (2) nach x aufgelöst, erhält man nach einer kleinen Rechnung

$$x = -\frac{1}{2}\left[1 + \frac{A}{B} + \frac{1}{t}\left(1 - \frac{A}{B}\right)\right] \pm \frac{1}{2}\frac{1 + \frac{A}{B}}{t}\sqrt{(t-1)\left(t - \left(\frac{A-B}{A+B}\right)^2\right)}.$$

Der Ausdruck unter dem Quadratwurzelzeichen bleibt *positiv*, wenn entweder t grösser als Eins, oder kleiner als $\left(\frac{A-B}{A+B}\right)^2$ ist. Um zu entscheiden, ob man es mit einem Objektiv oder mit einem Okular zu thun hat, bildet man den Ausdruck für die Vereinigungsweite (g). Es wird

$$(4) \qquad g = \frac{A+B}{2B}\left[1 - t \pm \sqrt{(t-1)\left(t - \left(\frac{A-B}{A+B}\right)^2\right)}\right],$$

und hieraus geht nun hervor, dass man für

1) $t > 1$ ein *Objektiv* oder ein *Okular* erhält, je nach dem man das obere oder untere Zeichen der Wurzel nimmt;

2) dass man für $t < \left(\frac{A-B}{A+B}\right)^2$ zwei verschiedene *Objektiv*-formen bekommt.

Die für $t > 1$ erhaltenen Linsensysteme haben dieselben Mängel, wie die aus einer einzigen Glassorte verfertigten akromatischen Linsensysteme, ohne indessen die Vortheile der letzteren aufweisen zu können (nämlich für alle Farben gleichzeitig akromatisirt zu sein).

Von grösserem Interesse sind jedenfalls die für

$$(5) \qquad t < \left(\frac{A-B}{A+B}\right)^2$$

erhaltenen Objektive, die ja auch die einzigen sind, die zur Anwendung gekommen sind.

Die Formen dieser Objektive für verschiedene Werthe von t werde ich hier kurz auseinandersetzen.

Ausser von t hängt der Werth von g, wie auch von x und y, von A und B, oder im Wesentlichen von dem *Verhältniss* zwischen diesen Grössen ab. Ich erinnere nun daran, dass

$$(6) \qquad A = \frac{\varDelta n'}{n' - 1}$$

und B eine ähnliche Bedeutung für die *zweite* Linse hat. Es bedeutet hier $\varDelta n$ die Zerstreuung der Linse, und zwar werde ich, um das Problem zu preciziren, annehmen dass es sich um die Zerstreuung zwischen den FRAUENHOFER'schen Linien F und C in dem Sonnenspektrum handelt, so dass

$$A = \frac{n_F - n_C}{n_D - 1}.$$

Für den reciproken Werth von A sind in dem »Productions- und Preis-Verzeichniss des glastechnischen Laboratoriums SCHOTT & GEN. in Jena» die Zahlen angegeben und zwar findet man, dass dieselben zwischen 70.0 (Leichtes Phosphat-Crown) bis 19.7 (Schwerster Silicat-Flint) variiren (Katalog vom Jahre 1886), und das Verhältniss $A:B$ kann also mit Benutzung der jetzt vorhandenen Glassorten Werthe zwischen 0.28 und 3.5 annehmen. Die gegen die äussersten Grenzen für A entsprechenden Glassorten werden indessen nicht völlig einwurfsfrei sein aus optischem Gesichtspunkte; man wird aber jedenfalls bis zu dem Werth $A:B = 2$ (resp. $\frac{1}{2}$ für Crown voraus) gehen können. Ich habe deswegen für den letzteren Grenzfall unter Annahme von verschiedenen Werthen für den Abstand zwischen den Linsen die Werthe der Vereinigungsweite und der Fokallänge der Linsen berechnet, und zwar mit Hülfe der folgenden Formeln:

$$(6) \qquad \begin{cases} g = \dfrac{A+B}{2B}\left[1 - t \pm \sqrt{(1-t)\left(\left(\dfrac{A-B}{A+B}\right)^2 - t\right)}\right] \\ x = \dfrac{g-1}{t} \\ y = -\dfrac{B}{A}x - 1 - \dfrac{B}{A}. \end{cases}$$

Man erhält nun:

I. *Crown voraus.* $B = 2\,A$.

Brennweite für C und F gleich.

a) oberes Zeichen in (6):

t	x	y	g
0.01	— 2.02	+ 1.04	+ 0.9798
0.02	— 2.05	+ 1.10	+ 0.9590
0.03	— 2.07	+ 1.14	+ 0.9378
0.04	— 2.10	+ 1.20	+ 0.9160
0.05	— 2.14	+ 1.28	+ 0.8932.

b) unteres Zeichen in (6):

t	x	y	g
0.01	— 49.47	+ 95.94	+ 0.5053
0.02	— 24.45	+ 45.90	+ 0.5110
0.03	— 16.10	+ 29.20	+ 0.5171
0.04	— 11.90	+ 20.80	+ 0.5240
0.05	— 9.36	+ 15.72	+ 0.5318.

II. *Flint voraus.* $A = 2\,B$.

Brennweite für C und F gleich.

a) oberes Zeichen in (6):

t	x	y	g
0.01	+ 95.94	— 49.47	+ 1.9594
0.02	+ 45.90	— 24.45	+ 1.9180
0.03	+ 29.19	— 16.10	+ 1.8756
0.04	+ 20.80	— 11.90	+ 1.8320
0.05	+ 15.73	— 9.36	+ 1.7864.

b) unteres Zeichen in (6):

t	x	y	g
0.01	+ 1.04	— 2.02	+ 1.0106
0.02	+ 1.10	— 2.05	+ 1.0220
0.03	+ 1.14	— 2.07	+ 1.0342
0.04	+ 1.20	— 2.10	+ 1.0480
0.05	+ 1.27	— 2.13	+ 1.0636.

Die Fälle I. a) und II. b) sind die einzigen, die praktisches Interesse haben, da nämlich die anderen Fälle zu Linsen mit allzu kleinen Fokallängen führen. Bemerkenswerth ist, dass man die Flintglaslinse und die Crownglaslinse einfach mit einander vertauschen kann ohne dass das Linsensystem aufhört akromatisch zu sein, nur wird die Vereinigungsweite eine andere, indem dieselbe für Crown voraus immer kleiner als die Brennweite, für Flint voraus dagegen grösser als die Brennweite ausfällt. Wie die obigen Zahlen zeigen, so ist (bei den angenommenen Werthe des Verhältnisses zwischen der Zerstreuungen des Crown- und des Flint-glases) genähert:

für *Crown* voraus: $g = 1 - 2t$,

» *Flint* » : $g = 1 + t$.

4. Wenn die zwei Linsen so bestimmt sind, dass die Brennweiten für zwei Farben denselben Werth haben, so werden doch, wie schon hervorgehoben worden ist, die Vereinigungsweiten für diese Farben nicht zusammenfallen, sei es denn, dass man dies durch eine geeignete Wahl der Dicken der Linsen erreichen kann. Es ist nämlich

$$F = -\frac{1}{k}$$

$$\Phi = -\frac{g}{k},$$

wo F die Brennweite, Φ die Vereinigungsweite bezeichnet. Hieraus folgt

(7) $$\Delta\Phi = \frac{g\Delta k - k\Delta g}{k^2},$$

und wird also $\Delta k = 0$ gesetzt, so muss offenbar auch $\Delta g = 0$ sein, damit $\Delta\Phi$ verschwindet. Nun ist, wenn die Dicke der Linsen gleich Null gesetzt wird,

$$g = 1 + tx,$$

also

$$\Delta g = t\Delta x,$$

ein Ausdruck, der unter den gemachten Voraussetzungen immer von Null verschieden ist.

5. Will man die Fokallängen von zwei unendlich dünnen Linsen so bestimmen, dass die *Vereinigungsweite* des resultirenden Linsensystemes für zwei Farben unverändert bleibt, so dass also die Strahlen von diesen beiden Farben sich in demselben Punkt auf der Achse schneiden, so hat man nach (7) $\Delta\Phi = 0$ zu setzen, und nehmen wir die Gesammtbrennweite zur Längeneinheit, bekommt man somit zur Bestimmung von x und y in diesem Falle die beiden Gleichungen:

$$(8) \qquad \begin{cases} -1 = x + y + txy \\ \;\;\, 0 = Ax + By + 2\,Btxy + Bt^2x^2y\,. \end{cases}$$

Diese Gleichungen lassen sich leicht lösen. Man kann dieselben in der That in folgenden Weise schreiben:

$$\begin{aligned} -1 &= x + y(1 + tx) \\ 0 &= Ax + By(1 + tx)^2\,. \end{aligned}$$

Wird die erste Gleichung mit $B(1 + tx)$ multiplicirt und von der zweiten subtrahirt, bekommt man somit zur Bestimmung von x die Gleichung

$$B(1 + tx) = Ax - Bx(1 + tx)\,,$$

oder

$$(9) \qquad x^2 - x\left(\frac{A}{Bt} - \frac{1}{t} - 1\right) + \frac{1}{t} = 0\,.$$

Sind die beiden Linsen aus derselben Glassorte, so dass $A = B$, so wird also:

$$x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{t}}\,,$$

und man erhält für $t > 4$ zwei Linsenkombinationen, die indessen nur als Okulare benutzt werden können, und mit denen ich mich deswegen nicht aufhalten will.

In dem allgemeinen Fall erhält man nun aus (9):

$$(10)\; 2\,tx = \frac{A}{B} - 1 - t \pm \sqrt{\left(t - \left(1 + \sqrt{\frac{A}{B}}\right)^2\right)\left(t - \left(1 - \sqrt{\frac{A}{B}}\right)^2\right)}\,.$$

Damit die Quadratwurzel reell bleibt, muss der Abstand t zwischen den beiden Linsen entweder grösser als $\left(1+\sqrt{\frac{A}{B}}\right)^2$ oder kleiner als $\left(1-\sqrt{\frac{A}{B}}\right)^2$ sein.

Führt man den Ausdruck für die Vereinigungsweite g aus, so zeigt es sich, dass man es im vorigen Falle mit einen Okular im letzteren mit einem Objektiv zu thun hat.

Um mit dem vorher diskutirten Fall, wo die *Brennweiten* für zwei Farben unverändert bleiben, einen Vergleich zu erhalten, werde ich nach (10) für dieselben Werthe für t, wie oben, diejenigen Objektive berechnen, bei denen die *Vereinigungsweiten* für zwei Farben zusammenfallen, und zwar werde ich dabei auch von der Voraussetzung ausgehen, dass die Zerstreuung $\left(\frac{\Delta n}{n-1}\right)$ für die Flintglaslinse die doppelte von derjenigen der Crownglaslinse ist.

Die dabei zur Anwendung kommenden Formeln sind die folgenden:

$$(21)\begin{cases} g=\frac{1}{2}\left(1+\frac{A}{B}-t\right)\pm\sqrt{\left(\left(1+\sqrt{\frac{A}{B}}\right)^2-t\right)\left(\left(1-\sqrt{\frac{A}{B}}\right)^2-t\right)} \\ x=\frac{g-1}{t} \\ y=-\frac{A}{B}\frac{x}{g^2}. \end{cases}$$

Ich erhalte nun:

III. *Crown voraus.* $B = 2A$.

Vereinigungsweite für C und F gleich.

a) Oberes Zeichen in (21):

t	x	y	g
0.01	— 2.05	+ 1.07	+ 0.9795
0.02	— 2.10	+ 1.14	+ 0.9581
0.03	— 2.15	+ 1.23	+ 0.9354
0.04	— 2.22	+ 1.34	+ 0.9112
0.05	— 2.30	+ 1.47	+ 0.8850 .

b) Unteres Zeichen in (21):

t	x	y	g
0.01	— 48.97	+ 94.01	+ 0.5103
0.02	— 23.90	+ 43.86	+ 0.5219
0.03	— 15.51	+ 27.12	+ 0.5346
0.04	— 11.28	+ 18.73	+ 0.5488
0.05	— 8.70	+ 13.63	+ 0.5650 .

IV. *Flint voraus.* $A = 2\,B$.

Vereinigungsweite für C und F gleich.

a) Oberes Zeichen in (21):

t	x	y	g
0.01	+ 97.98	— 50.00	+ 1.9798
0.02	+ 47.96	— 24.98	+ 1.9592
0.03	+ 31.27	— 16.65	+ 1.9381
0.04	+ 22.91	— 12.51	+ 1.9165
0.05	+ 17.88	— 9.98	+ 1.8942 .

b) Unteres Zeichen in (21):

t	x	y	g
0.01	+ 1.02	— 2.00	+ 1.0102
0.02	+ 1.04	— 2.00	+ 1.0208
0.03	+ 1.06	— 2.00	+ 1.0319
0.04	+ 1.09	— 2.00	+ 1.0435
0.05	+ 1.12	— 2.01	+ 1.0558 .

Diese Formen stimmen also ziemlich nahe mit den Formen I und II überein, d. h. es braucht nur ein kleine Veränderung der Fokallänge der Linsen gemacht werden um ein für die Brennweiten akromatisirtes Objektiv in ein für die Vereinigungsweiten akromatisirtes zu verwandeln. Eine kleine Veränderung gehört immerhin dazu, die um so kleiner wird je näher die Linsen an einander stehen.

Die Form I a geht annähernd in die Form III a über, wenn man den Abstand zwischen den beiden Linsen etwas ver-

kleinert, und wird umgekehrt der Abstand vergrössert, so geht II b in IV b über.

Ich erinnere daran, dass x und y die reciproken Werthe der Fokallängen mit entgegengesetztem Zeichen der beiden Linsen bezeichnen.

6. Der Abstand zwischen den Linsen darf nicht beliebig gross sein. Derselbe kann im Falle I und II höchst 0.11 ($^1/_9$) betragen, im Falle III höchstens 0.09 und im Falle IV höchstens 0.17 in der Gesammtbrennweite als Einheit ausgedrückt.

Machen wir keine Annahme in Bezug auf die Werthe von A und B, so erhält man aus der Formel (6) als grössten Werth von t, wenn $\Delta k = 0$ ist,

$$t = \left(\frac{A - B}{A + B}\right)^2$$

mithin als *Grenzfall:*

$$(22) \qquad \begin{cases} g = \dfrac{2A}{A + B} \\ x = \dfrac{A + B}{A - B} = -y\,. \end{cases}$$

Also

$$\text{I.} \quad B = 2A \because t = \tfrac{1}{9}, \quad g = \tfrac{2}{3}, \quad x = -3 = -y\,.$$

$$\text{II.} \quad A = 2B \because t = \tfrac{1}{9}, \quad g = \tfrac{4}{3}, \quad x = 3 = -y\,.$$

Bei diejenigen Objektiven, bei denen die *Vereinigungsweiten* für zwei Farben zusammenfallen, bekommt man für den *Grenzfall* nach (21):

$$t = \left(1 - \sqrt{\frac{A}{B}}\right)^2.$$

Also:

$$(23) \qquad \begin{cases} g = \sqrt{\dfrac{A}{B}} \\ x = \dfrac{\sqrt{B}}{\sqrt{A} - \sqrt{B}} = -y\,, \end{cases}$$

und hieraus:

$$\text{III.}\quad B = 2A \cdot\because t = \tfrac{3}{2} - \sqrt{2} = 0.086\,.$$
$$g = \sqrt{\tfrac{1}{2}} = 0{,}707\,,$$
$$x = -2\left(1 + \sqrt{\tfrac{1}{2}}\right) = -3.414 = -y\,.$$
$$\text{IV.}\quad A = 2B \cdot\because t = 3 - 2\sqrt{2} = 0.172\,.$$
$$g = \sqrt{2} = 1.414\,,$$
$$x = \sqrt{2} + 1 = 2.414 = -y\,.$$

Die Formen I und III mit Crown voraus haben vor den anderen den Vorzug zu kleinen Fernrohrlängen zu führen. Auch wenn der Abstand zwischen den Linsen sehr klein, oder verschwindend, ist, haben diejenigen Objektivformen, bei denen die Crownglaslinse vorausgeht, wesentliche Vortheile vor den Objektiven mit Flint voraus, wie man aus den in § 5 erhaltenen Resultaten unter Hinzuziehung der Dicken der Linsen leicht findet.



ÖFVERSIGT AF K. SV. VET.-AKAD. FÖRHANDL. 1899. N:o 9.

MEDDELANDEN

FRÅN

LUNDS ASTRONOMISKA OBSERVATORIUM

N:o 10.

ENTWICKELUNG DER STÖRUNGSFUNKTION DURCH KANONISCHE ELEMENTE

VON

G. NORÉN UND J. A. WALLBERG

MITGETEILT AM 8. NOVEMBER 1899 DURCH C. V. L. CHARLIER

STOCKHOLM
KUNGL. BOKTRYCKERIET. P. A. NORSTEDT & SÖNER
1900

ÖFVERSIGT AF K. SV. VET.-AKAD. FÖRHANDL. 1899. N:o 9.

MEDDELANDEN

FRÅN

LUNDS ASTRONOMISKA OBSERVATORIUM

N:o 10.

ENTWICKELUNG DER STÖRUNGSFUNKTION DURCH KANONISCHE ELEMENTE

VON

G. NORÉN UND J. A. WALLBERG

MITGETEILT AM 8. NOVEMBER 1899 DURCH C. V. L. CHARLIER

STOCKHOLM
KUNGL. BOKTRYCKERIET. P. A. NORSTEDT & SÖNER
1900

Bei verschiedenen neueren Untersuchungen in der Theorie der Bewegung der Himmelskörper, besonders denjenigen, die in den Untersuchungen von POINCARÉ wurzeln, wird die kanonische Form der Bewegungsgleichungen mit Vorliebe benutzt, und wir haben es deswegen für nützlich betrachtet, die Entwickelung der Störungsfunktion durch *kanonische* Elemente zu geben. Diese ist die Aufgabe der folgenden Arbeit, in welcher wir uns zu dem zweiten Grad der Neigungen und der Excentricitäten beschränkt haben.

Die hier angewandte Entwicklungsmethode ist dieselbe, die von Herrn Professor C. V. L. CHARLIER in seinen Universitäts vorlesungen diesen Herbst auseinandergesetzt worden ist.

Wir bezeichnen mit A, B, C die drei Körper, und mit m_a, m_b, m_c deren Massen, und nehmen an, dass m_c sehr gross in Verhältnis zu m_a und m_b ist.

Wir bedienen uns der JACOBI'schen Koordinaten, so dass q_1, q_2, q_3 die rechtwinkligen Koordinaten von A in Bezug auf den Schwerpunkt G zwischen B und C und q_4, q_5, q_6 die rechtwinkligen Koordinaten von B in Bezug auf C bezeichnen.

Statt der elliptischen Elemente führen wir ein System von neuen Veränderlichen ein, nämlich:

für A: Λ, λ, ξ, η, p, q

für B: Λ', λ', ξ', η', p', q'

durch die Relationen:

$$\left.\begin{aligned}
\Lambda &= \sqrt{a} \\
\lambda &= l + \pi \\
\xi &= \sqrt{2\Lambda(1 - \sqrt{1 - e^2})} \cdot \cos \pi \\
\eta &= \sqrt{2\Lambda(1 - \sqrt{1 - e^2})} \cdot \sin \pi \\
p &= \sqrt{2\Lambda\sqrt{1 - e^2}\,(1 - \cos i)} \,.\, \cos \Omega \\
q &= \sqrt{2\Lambda\sqrt{1 - e^2}\,(1 - \cos i)} \cdot \sin \Omega
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

mit den gewöhnlichen elliptischen Elementen verbunden.

Wir bekommen dann für die Bewegung von A und B die Differentialgleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
\beta \frac{d\Lambda}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial \lambda}; & \beta \frac{d\lambda}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial \Lambda} \\
\beta \frac{d\xi}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial \eta}; & \beta \frac{d\eta}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial \xi} \\
\beta \frac{dp}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial q}; & \beta \frac{dq}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial p}
\end{aligned}\right\} \text{für } A \qquad (2)$$

$$\left.\begin{aligned}
\beta' \frac{d\Lambda'}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial \lambda'}; & \beta' \frac{d\lambda'}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial \Lambda'} \\
\beta' \frac{d\xi'}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial \eta'}; & \beta' \frac{d\eta'}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial \xi'} \\
\beta' \frac{dp'}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial q'}; & \beta' \frac{dq'}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial p'}
\end{aligned}\right\} \text{für } B \qquad (2')$$

wo F die Störungsfunktion bezeichnet, und β, β' Massenkonstanten sind, nämlich

$$\beta = m_a \sqrt{\frac{(m_b + m_c)m_c}{m_a + m_b + m_c}}$$

$$\beta' = \frac{m_b m_c}{\sqrt{m_b + m_c}}.$$

Die obigen Differentialgleichungen sind zwar nicht von rein kanonischer Form, indem die linken Seiten mit den Faktoren β

oder β' multiplicirt sind, es bedarf aber nur eine kleine Veränderung in der Form der Veränderlichen, um die Gleichungen kanonisch zu bekommen. Indessen ziehen wir die oben gegebene Form vor, weil wir dadurch den sonst beständig auftretenden Faktor β in den Rechnungen vermeiden —. Entwickeln wir die Störungsfunktion nach den Massen, erhalten wir bis zu Gliedern zweiter Ordnung:

$$\left.\begin{aligned} F = \frac{m_a m_c}{2\Lambda^2} + \frac{m_b m_c}{2\Lambda'^2} + \\ + \frac{m_a m_b}{r_{ab}} - \frac{m_a m_b}{r^3_{ag}}(q_1 q_4 + q_2 q_5 + q_3 q_6), \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

wo r_{ab} und r_{ag} die Entfernungen zwischen A und B resp. A und G bedeuten.

Wir wollen jetzt F nach Potenzen von ξ, η, p, q, ξ', η', p', q' entwickeln, so dass die Koefficienten in der Entwickelung Funktionen von nur Λ, λ, Λ', λ' sind.

Wir haben dann zuerst die Koordinaten q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6 zu entwickeln. Wir führen doch die Entwickelung nur für q_1, q_2, q_3 aus und bemerken, dass die Ausdrücke für q_4, q_5, q_6 daraus durch Vertauschung der Elemente erhalten werden.

Die Entwickelung gründet sich darauf, dass man $e\cos\pi$, $e\sin\pi$, $\sin i\cos\Omega$ und $\sin i\sin\Omega$ nach Potenzen von ξ, η, p und q entwickeln kann. Man bekommt nämlich:

$$\left.\begin{aligned} e\cos\pi &= \frac{\xi}{\sqrt{\Lambda}}\left(1 - \frac{1}{8}\frac{\xi^2+\eta^2}{\Lambda} + \ldots\right) \\ e\sin\pi &= -\frac{\eta}{\sqrt{\Lambda}}\left(1 - \frac{1}{8}\frac{\xi^2+\eta^2}{\Lambda} + \ldots\right) \\ \sin i\cos\Omega &= \frac{p}{\sqrt{\Lambda}}\left(S_0 - \frac{1}{8}\frac{p^2+q^2}{\Lambda}S_1 \ldots\right) \\ \sin i\sin\Omega &= -\frac{q}{\sqrt{\Lambda}}\left(S_0 - \frac{1}{8}\frac{p^2+q^2}{\Lambda}S_1 \ldots\right) \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

wo

$$S_0 = (1 - e^2)^{-\frac{1}{4}} = 1 + \tfrac{1}{4}\cdot\frac{\xi^2+\eta^2}{\Lambda} + \ldots$$

und

$$S_1 = (1 - e^2)^{-\frac{3}{2}} = 1 + \tfrac{3}{4} \cdot \frac{\xi^2 + \eta^2}{\Delta} + \ldots .$$

Nehmen wir nun an, dass die X-Achse des Koordinatensystems durch den Knoten geht, und bezeichnen wir mit x_0, y_0, z_0 die Koordinaten des Körpers in diesem System, so bekommen wir:

$$\frac{x_0}{a} = (\cos\omega - e)\cos(\pi - \Omega) - \sqrt{1 - e^2}\sin\omega\sin(\pi - \Omega)$$

$$\frac{y_0}{a} = \cos i\left[\sqrt{1 - e^2}\sin\omega\cos(\pi - \Omega) + (\cos\omega - e)\sin(\pi - \Omega)\right]$$

$$\frac{z_0}{a} = \sin i\left[\sqrt{1 - e^2}\sin\omega\cos(\pi - \Omega) + (\cos\omega - e)\sin(\pi - \Omega)\right].$$

Gehen wir nun zu einem Koordinatensystem über, dessen X-Achse durch einen Punkt in der Entfernung Ω vom Knoten geht, und bezeichnen wir mit x, y, z die Koordinaten in diesem System, so bekommen wir die folgenden Relationen zwischen x_0, y_0, z_0 und x, y, z

$$\begin{aligned} x &= x_0 \cos\Omega - y_0 \sin\Omega \\ y &= x_0 \sin\Omega + y_0 \cos\Omega \\ z &= z_0 , \end{aligned}$$

und können die Koordinaten x, y, z folgenderweise schreiben:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{a} &= A\ (\cos\omega - e) + B\sqrt{1 - e^2}\sin\omega \\ \frac{y}{a} &= A_1(\cos\omega - e) + B_1\sqrt{1 - e^2}\sin\omega \\ \frac{z}{a} &= A_2(\cos\omega - e) + B_2\sqrt{1 - e^2}\sin\omega \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

wo

$$\left.\begin{aligned} A\ &= \cos(\pi - \Omega)\cos\Omega - \sin(\pi - \Omega)\sin\Omega\cos i \\ B\ &= -[\sin(\pi - \Omega)\cos\Omega + \cos(\pi - \Omega)\sin\Omega\cos i] \\ A_1 &= \cos(\pi - \Omega)\sin\Omega + \sin(\pi - \Omega)\cos\Omega\cos i \\ B_1 &= -\sin(\pi - \Omega)\sin\Omega + \cos(\pi - \Omega)\cos\Omega\cos i \\ A_2 &= \sin(\pi - \Omega)\sin i \\ B_2 &= \cos(\pi - \Omega)\sin i . \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Wenn wir nun die Bezeichnungen

$$\left.\begin{array}{ll} r = e\cos\pi\,; & u = \sin i\cos\Omega \\ s = e\sin\pi\,; & v = \sin i\sin\Omega \end{array}\right\} \quad (7)$$

und die Potenzreihen

$$\left.\begin{array}{l} P_1 = \frac{1}{2}u^2(1 + \frac{1}{4}(u^2 + v^2) + \ldots) \\ P_2 = \frac{1}{2}uv(1 + \frac{1}{4}(u^2 + v^2) + \ldots) \\ P_3 = \frac{1}{2}v^2(1 + \frac{1}{4}(u^2 + v^2) + \ldots) \end{array}\right\} \quad (8)$$

einführen, und bemerken, dass

$$\cos i = (1 - \sin^2 i)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 i - \frac{1}{8}\sin^4 i - \ldots$$

so können wir die Ausdrücke für A und B in folgender Weise schreiben

$$\left.\begin{array}{l} A = \cos\pi + P_2\sin\pi - P_3\cos\pi \\ B = -\sin\pi + P_2\cos\pi + P_3\sin\pi \\ A_1 = \sin\pi - P_1\sin\pi + P_2\cos\pi \\ B_1 = \cos\pi - P_1\cos\pi - P_2\sin\pi \\ A_2 = u\sin\pi - v\cos\pi \\ B_2 = u\cos\pi + v\sin\pi\,. \end{array}\right\} \quad (9)$$

Setzen wir diese Ausdrücke für die Koefficienten in (5) ein, so bekommen wir:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{x}{a} = -Ae + \cos\pi\cos\omega - \sqrt{1-e^2}\sin\pi\sin\omega + \\ \qquad + P_2(\sin\pi\cos\omega + \sqrt{1-e^2}\cos\pi\sin\omega) + \\ \qquad + P_3(-\cos\pi\cos\omega + \sqrt{1-e^2}\sin\pi\sin\omega) \\ \frac{y}{a} = -A_1e + \sin\pi\cos\omega + \sqrt{1-e^2}\cos\pi\sin\omega - \\ \qquad - P_1(\sin\pi\cos\omega + \sqrt{1-e^2}\cos\pi\sin\omega) + \\ \qquad + P_2(\cos\pi\cos\omega - \sqrt{1-e^2}\sin\pi\sin\omega) \\ \frac{z}{a} = -A_2e + u(\sin\pi\cos\omega + \sqrt{1-e^2}\cos\pi\sin\omega) + \\ \qquad + v(-\cos\pi\cos\omega + \sqrt{1-e^2}\sin\pi\sin\omega) \end{array}\right\} \quad (10)$$

wo

$$A e = r + P_2 s - P_3 r$$
$$A_1 e = s - P_1 s + P_2 r$$
$$A_2 e = u s - v r\,.$$

Führen wir nun weiter die Bezeichnungen ein:

$$D = \cos\pi\cos\omega - \sqrt{1-e^2}\sin\pi\sin\omega$$
$$E = \sin\pi\cos\omega + \sqrt{1-e^2}\cos\pi\sin\omega\,,$$

so gehen (10) in die folgenden über:

$$\frac{x}{a} = -r - P_2\cdot s + P_3\cdot r + D + P_2\cdot E - P_3\cdot D$$
$$\frac{y}{a} = -s + P_1\cdot s - P_2\cdot r + E - P_1\cdot E + P_2\cdot D$$
$$\frac{z}{a} = vr - us + u\cdot E - v\cdot D\,.$$

Wir wollen jetzt D und E nach Potenzen von r und s entwickeln, wobei wir nicht höhere Potenzen als den zweiten mitnehmen.

Bemerken wir, dass

$$\sqrt{1-e^2} = 1 - \tfrac{1}{2}e^2 - \tfrac{1}{8}e^4 - \ldots,$$

so können wir schreiben

$$D = \cos\pi\cos\omega - \sin\pi\sin\omega + \tfrac{1}{2}e^2\sin\pi\sin\omega\,(1 + \tfrac{1}{4}e^2 + \ldots)$$
$$E = \sin\pi\cos\omega + \cos\pi\sin\omega - \tfrac{1}{2}e^2\cos\pi\sin\omega\,(1 + \tfrac{1}{4}e^2 + \ldots).$$

Für $\cos\omega$ und $\sin\omega$ haben wir die folgenden Ausdrücke, wenn wir nicht länger als zum zweiten Grade gehen:

$$\left.\begin{aligned}\cos\omega &= \cos l + \frac{e}{2}(\cos 2l - 1) + \tfrac{3}{8}e^2(\cos 3l - \cos l)\\ \sin\omega &= \sin l + \frac{e}{2}\sin 2l + \tfrac{1}{8}e^2(3\sin 3l - \sin l)\,.\end{aligned}\right\}\quad(10\tfrac{1}{2})$$

Führen wir jetzt, statt der mittleren Anomalie l, die mittlere Länge λ durch die Relation

$$\lambda = l + \pi$$

ein, so bekommen wir endlich:

$$\left.\begin{aligned}D &= \cos\lambda + \tfrac{1}{2} r(\cos 2\lambda - 1) + \tfrac{1}{2} s \sin 2\lambda + \\ &\quad + \tfrac{3}{8} r^2(\cos 3\lambda - \cos\lambda) - \tfrac{1}{8} s^2(3\cos 3\lambda + 5\cos\lambda) + \\ &\quad + \tfrac{1}{4} rs(3\sin 3\lambda + \sin\lambda) \\ E &= \sin\lambda + \tfrac{1}{2} r \sin 2\lambda - \tfrac{1}{2} s(\cos 2\lambda + 1) + \\ &\quad + \tfrac{1}{8} r^2(3\sin 3\lambda - 5\sin\lambda) - \tfrac{3}{8} s^2(\sin 3\lambda + \sin\lambda) - \\ &\quad - \tfrac{1}{4} rs(3\cos 3\lambda - \cos\lambda)\,.\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Wenn wir nicht höhere Potenzen als den zweiten mitnehmen, können wir weiter setzen

$$P_1 = \tfrac{1}{2} u^2$$
$$P_2 = \tfrac{1}{2} uv$$
$$P_3 = \tfrac{1}{2} v^2$$

wonebst $P_2 s$, $P_3 r$, $P_1 s$, $P_2 r$ vernachlässigt werden können, da dieselben keine Glieder von niedrigerem Grade als dem dritten enthalten.

Weiter können wir setzen

$$P_1 \cdot E = \tfrac{1}{2} u^2 \sin\lambda$$
$$P_2 \cdot E = \tfrac{1}{2} uv \sin\lambda$$
$$P_2 \cdot D = \tfrac{1}{2} uv \cos\lambda$$
$$P_3 \cdot D = \tfrac{1}{2} v^2 \cos\lambda$$

und

$$u \cdot E = u \sin\lambda + \tfrac{1}{2} ur \sin 2\lambda - \tfrac{1}{2} su(1 + \cos 2\lambda)$$
$$v \cdot D = v \cos\lambda + \tfrac{1}{2} vr(\cos 2\lambda - 1) - \tfrac{1}{2} sv \sin 2\lambda\,.$$

Unter denselben Voraussetzungen können wir die Gleichungen (4) zu den folgenden verkürzen

$$\left.\begin{aligned}e\cos\pi &= \frac{\xi}{\sqrt{A}} \\ e\sin\pi &= -\frac{\eta}{\sqrt{A}} \\ \sin i \cos\Omega &= \frac{p}{\sqrt{A}} \\ \sin i \sin\Omega &= -\frac{q}{\sqrt{A}}\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

und also

$$r = \frac{\xi}{\sqrt{\Delta}}; \quad s = -\frac{\eta}{\sqrt{\Delta}}$$

$$u = \frac{p}{\sqrt{\Delta}}; \quad v = -\frac{q}{\sqrt{\Delta}}$$

Wir bekommen also die folgenden Ausdrücke für die Koordinaten nach Potenzen von ξ, η, p, q,

$$\left.\begin{aligned}
\frac{x}{\Delta^2} &= \cos\lambda + \tfrac{1}{2}\frac{\xi}{\sqrt{\Delta}}(\cos 2\lambda - 3) - \tfrac{1}{2}\frac{\eta}{\sqrt{\Delta}}\sin 2\lambda + \\
&+ \tfrac{3}{8}\frac{\xi^2}{\Delta}(\cos 3\lambda - \cos\lambda) - \tfrac{1}{8}\frac{\eta^2}{\Delta}(3\cos 3\lambda + 5\cos\lambda) - \\
&- \tfrac{1}{4}\frac{\xi\eta}{\Delta}(3\sin 3\lambda + \sin\lambda) - \tfrac{1}{2}\frac{pq}{\Delta}\sin\lambda - \tfrac{1}{2}\frac{q^2}{\Delta}\cos\lambda \\
\frac{y}{\Delta^2} &= \sin\lambda + \tfrac{1}{2}\frac{\xi}{\sqrt{\Delta}}\sin 2\lambda + \tfrac{1}{2}\frac{\eta}{\sqrt{\Delta}}(\cos 2\lambda + 3) + \\
&+ \tfrac{1}{8}\frac{\xi^2}{\Delta}(3\sin 3\lambda - 5\sin\lambda) - \tfrac{3}{8}\frac{\eta^2}{\Delta}(\sin 3\lambda + \sin\lambda) + \\
&+ \tfrac{1}{4}\frac{\xi\eta}{\Delta}(3\cos 3\lambda - \cos\lambda) - \tfrac{1}{2}\frac{p^2}{\Delta}\sin\lambda - \tfrac{1}{2}\frac{pq}{\Delta}\cos\lambda \\
\frac{z}{\Delta^2} &= \frac{p}{\sqrt{\Delta}}\sin\lambda + \frac{q}{\sqrt{\Delta}}\cos\lambda + \tfrac{1}{2}\frac{\xi p}{\Delta}\sin 2\lambda - \\
&- \tfrac{1}{2}\frac{\xi q}{\Delta}(3 - \cos 2\lambda) + \tfrac{1}{2}\frac{\eta p}{\Delta}(3 + \cos 2\lambda) - \tfrac{1}{2}\frac{\eta q}{\Delta}\sin 2\lambda.
\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Wir unterscheiden jetzt in F zwei Theile F_1 und F_2, von denen der erstere der principale Theil und der letztere der komplementäre Theil genannt wird. Wir setzen also

$$F = F_1 + F_2$$

wo

$$F_1 = \frac{m_a m_b}{r_{ab}} \quad (14)$$

und

$$\left.\begin{aligned}
F_2 &= \frac{m_a m_c}{2\Delta^2} + \frac{m_b m_c}{2\Delta'^2} + \\
&- \frac{m_a m_b}{r^3_{ag}}(q_1 q_4 + q_2 q_5 + q_3 q_6).
\end{aligned}\right\} \quad (15)$$

F_1 enthält nur die Entfernung r_{ab} zwischen den beiden Körpern und ist also völlig symmetrisch in Bezug auf die Koordinaten der beiden Körper. F_2 aber enthält die Entfernung r_{ag} zwischen A und dem Schwerpunkt von B und C und zeigt darum eine kleine Asymmetrie in Bezug auf die Koordinaten. Weil nun q_1, q_2, q_2 gerade dieselben Funktionen sind von ξ, η, p, q als q_4, q_5, q_6 von ξ', η', p', q', so wird auch F_1 sich völlig symmetrisch und F_2 ein wenig unsymmetrisch in Bezug auf die neuen Veränderlichen zeigen. Wir wollen zuerst F_2 entwickeln.

Wir haben dann zuerst den Ausdruck $(q_1 q_4 + q_2 q_5 + q_3 q_6)$ zu entwickeln.

Wir bekommen dafür:

$$
\begin{aligned}
\frac{q_1 q_4 + q_2 q_5 + q_3 q_6}{\Delta^2 \Delta'^2} &= \cos(\lambda - \lambda') + \\
&+ \frac{\xi}{\sqrt{\Delta}}\left[\tfrac{1}{2}\cos(2\lambda - \lambda') - \tfrac{3}{2}\cos\lambda'\right] + \\
&+ \frac{\eta}{\sqrt{\Delta}}\left[-\tfrac{1}{2}\sin(2\lambda - \lambda') + \tfrac{3}{2}\sin\lambda'\right] \\
&+ \frac{\xi'}{\sqrt{\Delta'}}\left[\tfrac{1}{2}\cos(2\lambda' - \lambda) - \tfrac{3}{2}\cos\lambda\right] + \\
&+ \frac{\eta'}{\sqrt{\Delta'}}\left[-\tfrac{1}{2}\sin(2\lambda' - \lambda) + \tfrac{3}{2}\sin\lambda\right] + \\
&+ \frac{\xi^2}{\Delta}\left[\tfrac{3}{8}\cos(3\lambda - \lambda') - \tfrac{1}{2}\cos(\lambda - \lambda') + \tfrac{1}{8}\cos(\lambda + \lambda')\right] + \\
&+ \frac{\eta^2}{\Delta}\left[-\tfrac{3}{8}\cos(3\lambda - \lambda') - \tfrac{1}{2}\cos(\lambda - \lambda') - \tfrac{1}{8}\cos(\lambda + \lambda')\right] + \\
&+ \frac{\xi\eta}{\Delta}\left[-\tfrac{3}{4}\sin(3\lambda - \lambda') \qquad\qquad - \tfrac{1}{4}\sin(\lambda + \lambda')\right] + \\
&+ \frac{\xi'^2}{\Delta'}\left[\tfrac{3}{8}\cos(3\lambda' - \lambda) - \tfrac{1}{2}\cos(\lambda - \lambda') + \tfrac{1}{8}\cos(\lambda + \lambda')\right] + \\
&+ \frac{\eta'^2}{\Delta'}\left[-\tfrac{3}{8}\cos(3\lambda' - \lambda) - \tfrac{1}{2}\cos(\lambda - \lambda') - \tfrac{1}{8}\cos(\lambda + \lambda')\right] + \\
&+ \frac{\xi'\eta'}{\Delta'}\left[-\tfrac{3}{4}\sin(3\lambda' - \lambda) \qquad\qquad - \tfrac{1}{4}\sin(\lambda + \lambda')\right] + \\
&+ \frac{\xi\xi'}{\sqrt{\Delta\Delta'}}\left[\tfrac{9}{4} - \tfrac{3}{4}\cos 2\lambda - \tfrac{3}{4}\cos 2\lambda' + \tfrac{1}{4}\cos(2\lambda - 2\lambda')\right]
\end{aligned}
$$

$$+\frac{\eta\eta'}{\sqrt{\Delta\Delta'}}[\tfrac{9}{4}+\tfrac{3}{4}\cos 2\lambda+\tfrac{3}{4}\cos 2\lambda'+\tfrac{1}{4}\cos(2\lambda-2\lambda')]+$$

$$+\frac{\xi\eta'}{\sqrt{\Delta\Delta'}}[\tfrac{3}{4}\sin 2\lambda+\tfrac{3}{4}\sin 2\lambda'+\tfrac{1}{4}\sin(2\lambda-2\lambda')]+$$

$$+\frac{\xi'\eta}{\sqrt{\Delta\Delta'}}[\tfrac{3}{4}\sin 2\lambda'+\tfrac{3}{4}\sin 2\lambda+\tfrac{1}{4}\sin(2\lambda'-2\lambda)]+$$

$$+\frac{p^2}{\Delta}[\tfrac{1}{4}\cos(\lambda+\lambda')-\tfrac{1}{4}\cos(\lambda-\lambda')]$$

$$+\frac{q^2}{\Delta}[-\tfrac{1}{4}\cos(\lambda+\lambda')-\tfrac{1}{4}\cos(\lambda-\lambda')]-$$

$$-\tfrac{1}{2}\frac{pq}{\Delta}\sin(\lambda+\lambda')+$$

$$+\frac{p'^2}{\Delta'}[\tfrac{1}{4}\cos(\lambda+\lambda')-\tfrac{1}{4}\cos(\lambda-\lambda')]+$$

$$+\frac{q'^2}{\Delta'}[-\tfrac{1}{4}\cos(\lambda+\lambda')-\tfrac{1}{4}\cos(\lambda-\lambda')]-$$

$$-\tfrac{1}{2}\frac{p'q'}{\Delta'}\sin(\lambda+\lambda')+$$

$$+\frac{pp'}{\sqrt{\Delta\Delta'}}[-\tfrac{1}{2}\cos(\lambda+\lambda')+\tfrac{1}{2}\cos(\lambda-\lambda')]+$$

$$+\frac{qq'}{\sqrt{\Delta\Delta'}}[\tfrac{1}{2}\cos(\lambda+\lambda')+\tfrac{1}{2}\cos(\lambda-\lambda')]+$$

$$+\frac{pq'}{\sqrt{\Delta\Delta'}}[\tfrac{1}{2}\sin(\lambda+\lambda')+\tfrac{1}{2}\sin(\lambda-\lambda')]+$$

$$+\frac{p'q}{\sqrt{\Delta\Delta'}}[\tfrac{1}{2}\sin(\lambda'+\lambda)+\tfrac{1}{2}\sin(\lambda'-\lambda)].$$

Weiter haben wir $\frac{1}{r_{ag}^3}$ zu entwickeln.

Weil G der Ursprung des Achsensystems ist, auf welches die Lage des Körpers A bezogen ist, so ist r_{ag} gerade der Radiusvektor von A, und also:

$$r_{ag}=a(1-e\cos\omega)$$

und wenn wir den in ($10\tfrac{1}{2}$) gegebenen Ausdruck für $\cos\omega$ benutzen:

$$\frac{r_{ag}}{\Delta^2} = 1 - \frac{\xi}{\sqrt{\Delta}}\cos\lambda + \frac{\eta}{\sqrt{\Delta}}\sin\lambda +$$

$$+ \tfrac{1}{2}\frac{\xi^2}{\Delta}(1 - \cos 2\lambda) + \tfrac{1}{2}\frac{\eta^2}{\Delta}(1 + \cos 2\lambda) + \frac{\xi\eta}{\Delta}\sin 2\lambda$$

und also weiter:

$$\frac{\Delta^6}{r^3_{ag}} = 1 + \frac{3\xi}{\sqrt{\Delta}}\cos\lambda - \frac{3\eta}{\sqrt{\Delta}}\sin\lambda +$$

$$+ \tfrac{3}{2}\frac{\xi^2}{\Delta}[3\cos 2\lambda + 1] - \tfrac{3}{2}\frac{\eta^2}{\Delta}[3\cos 2\lambda - 1] - \frac{9\xi\eta}{\Delta}\sin 2\lambda\,.$$

Wir bekommen also den folgenden Ausdruck für den komplementären Theil der Störungsfunction:

$$F_2 = \frac{m_a m_c}{2\Delta^2} + \frac{m_b m_c}{2\Delta'^2} + m_a m_b \cdot \frac{\Delta^2\Delta'^2}{\Delta^6}\Big\{- \cos(\lambda - \lambda') +$$

$$+ \frac{\xi}{\sqrt{\Delta}}[- 2\cos(2\lambda - \lambda')] +$$

$$+ \frac{\eta}{\sqrt{\Delta}}[2\sin(2\lambda - \lambda')] +$$

$$+ \frac{\xi'}{\sqrt{\Delta'}}[\tfrac{3}{2}\cos\lambda - \tfrac{1}{2}\cos(2\lambda' - \lambda)] +$$

$$+ \frac{\eta'}{\sqrt{\Delta'}}[- \tfrac{3}{2}\sin\lambda + \tfrac{1}{2}\sin(2\lambda' - \lambda)] +$$

$$+ \frac{\xi^2}{\Delta}[- \tfrac{1}{8}\cos(\lambda + \lambda') + \tfrac{1}{2}\cos(\lambda - \lambda') - \tfrac{27}{8}\cos(3\lambda - \lambda')] +$$

$$+ \frac{\eta^2}{\Delta}[\tfrac{1}{8}\cos(\lambda + \lambda') + \tfrac{1}{2}\cos(\lambda - \lambda') + \tfrac{27}{8}\cos(3\lambda - \lambda')] +$$

$$+ \frac{\xi\eta}{\Delta}[\tfrac{1}{4}\sin(\lambda + \lambda') \qquad\qquad + \tfrac{27}{4}\sin(3\lambda - \lambda')] +$$

$$+ \frac{\xi'^2}{\Delta'}[- \tfrac{1}{8}\cos(\lambda + \lambda') + \tfrac{1}{2}\cos(\lambda - \lambda') - \tfrac{3}{8}\cos(3\lambda' - \lambda)] +$$

$$+ \frac{\eta'^2}{\Delta'}[\tfrac{1}{8}\cos(\lambda + \lambda') + \tfrac{1}{2}\cos(\lambda - \lambda') + \tfrac{3}{8}\cos(3\lambda' - \lambda)] +$$

$$+ \frac{\xi'\eta'}{\Delta'}[\tfrac{1}{4}\sin(\lambda + \lambda') \qquad\qquad + \tfrac{3}{4}\sin(3\lambda' - \lambda)] +$$

$$+ \frac{\xi\xi'}{\sqrt{\Delta\Delta'}}[3\cos 2\lambda - \cos(2\lambda - 2\lambda')] +$$

$$+ \frac{\eta\eta'}{\sqrt{\varDelta\varDelta'}}[-3\cos 2\lambda - \cos(2\lambda - 2\lambda')] +$$

$$+ \frac{\xi\eta'}{\sqrt{\varDelta\varDelta'}}[-3\sin 2\lambda - \sin(2\lambda - 2\lambda')] +$$

$$+ \frac{\xi'\eta}{\sqrt{\varDelta\varDelta'}}[-3\sin 2\lambda - \sin(2\lambda' - 2\lambda)] +$$

$$+ \frac{p^2}{\varDelta}[-\tfrac{1}{4}\cos(\lambda + \lambda') + \tfrac{1}{4}\cos(\lambda - \lambda')] +$$

$$+ \frac{q^2}{\varDelta}[\tfrac{1}{4}\cos(\lambda + \lambda') + \tfrac{1}{4}\cos(\lambda - \lambda')] +$$

$$+ \frac{pq}{\varDelta}[\tfrac{1}{2}\sin(\lambda + \lambda')] +$$

$$+ \frac{p'^2}{\varDelta'}[-\tfrac{1}{4}\cos(\lambda + \lambda') + \tfrac{1}{4}\cos(\lambda - \lambda')] +$$

$$+ \frac{q'^2}{\varDelta'}[\tfrac{1}{4}\cos(\lambda + \lambda') + \tfrac{1}{4}\cos(\lambda - \lambda')] +$$

$$+ \frac{p'q'}{\varDelta'}[\tfrac{1}{2}\sin(\lambda + \lambda')] +$$

$$+ \frac{pp'}{\sqrt{\varDelta\varDelta'}}[\tfrac{1}{2}\cos(\lambda + \lambda') - \tfrac{1}{2}\cos(\lambda - \lambda')] +$$

$$+ \frac{qq'}{\sqrt{\varDelta\varDelta'}}[-\tfrac{1}{2}\cos(\lambda + \lambda') - \tfrac{1}{2}\cos(\lambda - \lambda')] +$$

$$+ \frac{pq'}{\sqrt{\varDelta\varDelta'}}[-\tfrac{1}{2}\sin(\lambda + \lambda') - \tfrac{1}{2}\sin(\lambda - \lambda')] +$$

$$+ \frac{p'q}{\sqrt{\varDelta\varDelta'}}[-\tfrac{1}{2}\sin(\lambda' + \lambda) - \tfrac{1}{2}\sin(\lambda' - \lambda)]\Big\}.$$

F_2 zeigt, wie wir sehen, völlige Symmetrie in Bezug auf die Glieder, die p und q enthalten, was offenbar daraus kommt, dass der Radiusvektor r_{ag} von der Inclination unabhängig ist und also p und q nicht enthält.

Etwas umständlicher stellt sich die Berechnung von F_1.

Unter der im Anfang des Aufsatzes gemachten Voraussetzung betreffend der Massen können wir annähernd

$$\frac{m_c}{m_b + m_c} = 1$$

setzen und bekommen dann den folgenden Ausdruck für r_{ab}:

$$r_{ab}^2 = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 + q_5^2 + q_6^2 -$$
$$- 2(q_1q_4 + q_2q_5 + q_3q_6) =$$
$$= r_{ag}^2 + r_{bc}^2 - 2(q_1q_4 + q_2q_5 + q_3q_6),$$

wo r_{bc} die Entfernung zwischen B und C bedeutet.

Wir bekommen für r_{ag}^2:

$$r_{ag}^2 = \varDelta^4 - 2\varDelta^4 \cdot \frac{\xi}{\sqrt{\varDelta}} \cos\lambda + 2\varDelta^4 \frac{\eta}{\sqrt{\varDelta}} \sin\lambda +$$
$$+ \frac{\varDelta^4}{2} \cdot \frac{\xi^2}{\varDelta}(3 - \cos 2\lambda) + \frac{\varDelta^4}{2} \cdot \frac{\eta^2}{\varDelta}(3 + \cos 2\lambda) +$$
$$+ \varDelta^4 \cdot \frac{\xi\eta}{\varDelta} \sin 2\lambda$$

und weil r_{bc} offenbar der Radiusvector des Körpers B ist, so bekommt man den Ausdruck für r_{bc}^2 durch Vertauschung der Elemente:

$$r_{bc}^2 = \varDelta'^4 - 2\varDelta'^4 \frac{\xi'}{\sqrt{\varDelta'}} \cos\lambda' + 2\varDelta'^4 \frac{\eta'}{\sqrt{\varDelta'}} \sin\lambda' +$$
$$+ \frac{\varDelta'^4}{2} \cdot \frac{\xi'^2}{\varDelta'}(3 - \cos 2\lambda') + \frac{\varDelta'^4}{2} \cdot \frac{\eta'^2}{\varDelta'}(3 + \cos 2\lambda') +$$
$$+ \varDelta'^4 \cdot \frac{\xi'\eta'}{\varDelta'} \sin 2\lambda'.$$

Wir unterscheiden nun in r_{ab}^2 zwei Theile $\varDelta_0^2$ und f, so dass $\varDelta_0^2$ die Glieder vom Grade Null und f die Glieder vom ersten und zweiten Grade bezeichnet. Also:

$$r_{ab}^2 = \varDelta_0^2 + f.$$

Dann wird

$$\varDelta_0^2 = \varDelta^4 + \varDelta'^4 - 2\varDelta^2\varDelta'^2 \cos(\lambda - \lambda').$$

Der Minimalwerth von $\varDelta_0$ ist offenbar $(\varDelta^2 - \varDelta'^2)$; f kan beliebig klein werden. Nehmen wir nun an, dass $|\varDelta^2 - \varDelta'^2|$ d. h. $|a - a'|$ eine untere Grenze hat oder immer von Null verschieden sein muss, so können wir, wenn wir schreiben

$$r_{ab}^2 = \Delta_0^2 \left[1 + \frac{f}{\Delta_0^2}\right]$$

beliebige Potenzen von r_{ab}^2 nach den Potenzen von $\frac{f}{\Delta_0^2}$ entwickeln.

Wir bekommen dann für $\frac{1}{r_{ab}}$:

$$\frac{1}{r_{ab}} = \left(r_{ab}^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta_0}\left(1 - \tfrac{1}{2}\frac{f}{\Delta_0^2} + \tfrac{3}{8}\frac{f^2}{\Delta_0^4} - \tfrac{5}{16}\frac{f^3}{\Delta_0^6} + \ldots\right)$$

und wenn wir nur zum zweiten Grade gehen

$$\frac{1}{r_{ab}} = \frac{1}{\Delta_0} - \tfrac{1}{2}\frac{f}{\Delta_0^3} + \tfrac{3}{8}\frac{f^2}{\Delta_0^5}.$$

Wir bekommen für $-\tfrac{1}{2}\frac{f}{\Delta_0^3}$:

$$-\tfrac{1}{2}\cdot\frac{f}{\Delta_0^3} =$$

$$= \frac{\xi}{\sqrt{A}\Delta_0^3}\cdot\left[A^4 \cos\lambda - \tfrac{3}{2} A^2 A'^2 \cos\lambda' + \tfrac{1}{2} A^2 A'^2 \cos(2\lambda - \lambda')\right] +$$

$$+ \frac{\eta}{\sqrt{A}\cdot\Delta_0^3}\cdot\left[- A^4 \sin\lambda + \tfrac{3}{2} A^2 A'^2 \sin\lambda' - \tfrac{1}{2} A^2 A'^2 \sin(2\lambda - \lambda')\right] +$$

$$+ \frac{\xi'}{\sqrt{A'}\cdot\Delta_0^3}\cdot\left[A'^4 \cos\lambda' - \tfrac{3}{2} A^2 A'^2 \cos\lambda + \tfrac{1}{2} A^2 A'^2 \cos(2\lambda' - \lambda)\right] +$$

$$+ \frac{\eta'}{\sqrt{A'}\cdot\Delta_0^3}\left[- A'^4 \sin\lambda' + \tfrac{3}{2} A^2 A'^2 \sin\lambda - \tfrac{1}{2} A^2 A'^2 \sin(2\lambda' - \lambda)\right] +$$

$$+ \frac{\xi^2}{A\cdot\Delta_0^3}\cdot\left[- \tfrac{3}{4} A^4 + \tfrac{1}{8} A^2 A'^2 \cos(\lambda + \lambda') - \tfrac{1}{2} A^2 A'^2 \cos(\lambda - \lambda') +\right.$$

$$\left. + \tfrac{1}{4} A^4 \cos 2\lambda + \tfrac{3}{8} A^2 A'^2 \cos(3\lambda - \lambda')\right] +$$

$$+ \frac{\eta^2}{A\cdot\Delta_0^3}\cdot\left[- \tfrac{3}{4} A^4 - \tfrac{1}{8} A^2 A'^2 \cos(\lambda + \lambda') - \tfrac{1}{2} A^2 A'^2 \cos(\lambda - \lambda') -\right.$$

$$\left. - \tfrac{1}{4} A^4 \cos 2\lambda - \tfrac{3}{8} A^2 A'^2 \cos(3\lambda - \lambda')\right] +$$

$$+ \frac{\xi\eta}{A\cdot\Delta_0^3}\left[- \tfrac{1}{4} A^2 A'^2 \sin(\lambda + \lambda') - \tfrac{1}{2} A^4 \sin 2\lambda -\right.$$

$$\left. - \tfrac{3}{4} A^2 A'^2 \sin(3\lambda - \lambda')\right] +$$

$$+ \frac{\xi'^2}{\Lambda' \Delta_0^3} [- \tfrac{3}{4} \Lambda'^4 + \tfrac{1}{8} \Lambda^2 \Lambda'^2 \cos(\lambda + \lambda') - \tfrac{1}{2} \Lambda^2 \Lambda'^2 \cos(\lambda - \lambda') +$$

$$+ \tfrac{1}{4} \Lambda'^4 \cos 2\lambda' + \tfrac{3}{8} \Lambda^2 \Lambda'^2 \cos(3\lambda' - \lambda)] +$$

$$+ \frac{\eta'^2}{\Lambda' \Delta_0^3} [- \tfrac{3}{4} \Lambda'^4 - \tfrac{1}{8} \Lambda^2 \Lambda'^2 \cos(\lambda + \lambda') - \tfrac{1}{2} \Lambda^2 \Lambda'^2 \cos(\lambda - \lambda') -$$

$$- \tfrac{1}{4} \Lambda'^4 \cos 2\lambda' - \tfrac{3}{8} \Lambda^2 \Lambda'^2 \cos(3\lambda' - \lambda)] +$$

$$+ \frac{\xi' \eta'}{\Lambda' \cdot \Delta_0^3} [- \tfrac{1}{4} \Lambda^2 \Lambda'^2 \sin(\lambda + \lambda') - \tfrac{1}{2} \Lambda'^4 \sin 2\lambda' -$$

$$- \tfrac{3}{4} \Lambda^2 \Lambda'^2 \sin(3\lambda' - \lambda)] +$$

$$+ \frac{\xi \xi'}{\sqrt{\Lambda \Lambda'} \cdot \Delta_0^3} [\tfrac{9}{4} \Lambda^2 \Lambda'^2 - \tfrac{3}{4} \Lambda^2 \Lambda'^2 \cos 2\lambda - \tfrac{3}{4} \Lambda^2 \Lambda'^2 \cos 2\lambda' +$$

$$+ \tfrac{1}{4} \Lambda^2 \Lambda'^2 \cos(2\lambda - 2\lambda')] +$$

$$+ \frac{\eta \eta'}{\sqrt{\Lambda \Lambda'} \Delta_0^3} [\tfrac{9}{4} \Lambda^2 \Lambda'^2 + \tfrac{3}{4} \Lambda^2 \Lambda'^2 \cos 2\lambda + \tfrac{3}{4} \Lambda^2 \Lambda'^2 \cos 2\lambda' +$$

$$+ \tfrac{1}{4} \Lambda^2 \Lambda'^2 \cos(2\lambda - 2\lambda')] +$$

$$+ \frac{\xi \eta'}{\sqrt{\Lambda \Lambda'} \cdot \Delta_0^3} [\tfrac{3}{4} \Lambda^2 \Lambda'^2 \sin 2\lambda + \tfrac{3}{4} \Lambda^2 \Lambda'^2 \sin 2\lambda' +$$

$$+ \tfrac{1}{4} \Lambda^2 \Lambda'^2 \sin(2\lambda - 2\lambda')] +$$

$$+ \frac{\xi' \eta}{\sqrt{\Lambda \Lambda'} \Delta_0^3} [\tfrac{3}{4} \Lambda^2 \Lambda'^2 \sin 2\lambda' + \tfrac{3}{4} \Lambda^2 \Lambda'^2 \sin 2\lambda +$$

$$+ \tfrac{1}{4} \Lambda^2 \Lambda'^2 \sin(2\lambda' - 2\lambda)] +$$

$$+ \frac{p^2}{\Lambda \cdot \Delta_0^3} [\tfrac{1}{4} \Lambda^2 \Lambda'^2 \cos(\lambda + \lambda') - \tfrac{1}{4} \Lambda^2 \Lambda'^2 \cos(\lambda - \lambda')] +$$

$$+ \frac{q^2}{\Lambda \cdot \Delta_0^3} [- \tfrac{1}{4} \Lambda^2 \Lambda'^2 \cos(\lambda + \lambda') - \tfrac{1}{4} \Lambda^2 \Lambda'^2 \cos(\lambda - \lambda')] +$$

$$+ \frac{pq}{\Lambda \cdot \Delta_0^3} [- \tfrac{1}{2} \Lambda^2 \Lambda'^2 \sin(\lambda + \lambda')] +$$

$$+ \frac{p'^2}{\Lambda' \cdot \Delta_0^3} [\tfrac{1}{4} \Lambda^2 \Lambda'^2 \cos(\lambda + \lambda') - \tfrac{1}{4} \Lambda^2 \Lambda'^2 \cos(\lambda - \lambda')] +$$

$$+ \frac{q'^2}{\Lambda' \cdot \Delta_0^3} [- \tfrac{1}{4} \Lambda^2 \Lambda'^2 \cos(\lambda + \lambda') - \tfrac{1}{4} \Lambda^2 \Lambda'^2 \cos(\lambda - \lambda')] +$$

$$+ \frac{p' q'}{\Lambda' \cdot \Delta_0^3} [- \tfrac{1}{2} \Lambda^2 \Lambda'^2 \sin(\lambda + \lambda')] +$$

$$+ \frac{pp'}{\sqrt{\varDelta\varDelta'}\cdot\varDelta_0^3}\left[-\tfrac{1}{2}\varDelta^2\varDelta'^2\cos(\lambda+\lambda') + \tfrac{1}{2}\varDelta^2\varDelta'^2\cos(\lambda-\lambda')\right] +$$

$$+ \frac{qq'}{\sqrt{\varDelta\varDelta'}\cdot\varDelta_0^3}\left[\tfrac{1}{2}\varDelta^2\varDelta'^2\cos(\lambda+\lambda') + \tfrac{1}{2}\varDelta^2\varDelta'^2\cos(\lambda-\lambda')\right] +$$

$$+ \frac{pq'}{\sqrt{\varDelta\varDelta'}\cdot\varDelta_0^3}\left[\tfrac{1}{2}\varDelta^2\varDelta'^2\sin(\lambda+\lambda') + \tfrac{1}{2}\varDelta^2\varDelta'^2\sin(\lambda-\lambda')\right] +$$

$$+ \frac{p'q}{\sqrt{\varDelta\varDelta'}\varDelta_0^3}\left[\tfrac{1}{2}\varDelta^2\varDelta'^2\sin(\lambda'+\lambda) + \tfrac{1}{2}\varDelta^2\varDelta'^2\sin(\lambda'-\lambda)\right]$$

und dann für $\frac{3}{8}\frac{f^2}{\varDelta_0^5}$:

$$\tfrac{3}{8}\cdot\frac{f^2}{\varDelta_0^5} =$$

$$= \frac{\xi^2}{\varDelta\cdot\varDelta_0^5}\left[\tfrac{3}{4}\varDelta^8 + \tfrac{15}{8}\varDelta^4\varDelta'^4 - \tfrac{9}{4}\varDelta^6\varDelta'^2\cos(\lambda+\lambda') -\right.$$

$$- \tfrac{3}{2}\varDelta^6\varDelta'^2\cos(\lambda-\lambda') - \tfrac{9}{8}\varDelta^4\varDelta'^4\cos 2\lambda + \tfrac{3}{4}\varDelta^8\cos 2\lambda +$$

$$+ \tfrac{27}{16}\varDelta^4\varDelta'^4\cos 2\lambda' - \tfrac{9}{8}\varDelta^4\varDelta'^4\cos(2\lambda-2\lambda') + \tfrac{3}{4}\varDelta^6\varDelta'^2\cos(3\lambda-\lambda') +$$

$$\left. + \tfrac{3}{16}\varDelta^4\varDelta'^4\cos(4\lambda-2\lambda')\right) +$$

$$+ \frac{\eta^2}{\varDelta\cdot\varDelta_0^5}\left[\tfrac{3}{4}\varDelta^8 + \tfrac{15}{8}\varDelta^4\varDelta'^4 + \tfrac{9}{4}\varDelta^6\varDelta'^2\cos(\lambda+\lambda') -\right.$$

$$- \tfrac{3}{2}\varDelta^6\varDelta'^2\cos(\lambda-\lambda') + \tfrac{9}{8}\varDelta^4\varDelta'^4\cos 2\lambda - \tfrac{3}{4}\varDelta^8\cos 2\lambda -$$

$$- \tfrac{27}{16}\varDelta^4\varDelta'^4\cos 2\lambda' - \tfrac{9}{8}\varDelta^4\varDelta'^4\cos(2\lambda-2\lambda') -$$

$$\left. - \tfrac{3}{4}\varDelta^6\varDelta'^2\cos(3\lambda-\lambda') - \tfrac{3}{16}\varDelta^4\varDelta'^4\cos(4\lambda-2\lambda')\right] +$$

$$+ \frac{\xi\eta}{\varDelta\cdot\varDelta_0^5}\left[\tfrac{9}{2}\varDelta^6\varDelta'^2\sin(\lambda+\lambda') + \tfrac{9}{4}\varDelta^4\varDelta'^4\sin 2\lambda -\right.$$

$$- \tfrac{3}{2}\varDelta^8\sin 2\lambda - \tfrac{27}{8}\varDelta^4\varDelta'^4\sin 2\lambda' -$$

$$\left. - \tfrac{3}{2}\varDelta^6\varDelta'^2\sin(3\lambda-\lambda') - \tfrac{3}{8}\varDelta^4\varDelta'^4\sin(4\lambda-2\lambda')\right] +$$

$$+ \frac{\xi'^2}{\varDelta'\varDelta_0^5}\left[\tfrac{3}{4}\varDelta'^8 + \tfrac{15}{8}\varDelta^4\varDelta'^4 - \tfrac{9}{4}\varDelta^2\varDelta'^6\cos(\lambda+\lambda') -\right.$$

$$- \tfrac{3}{2}\varDelta^2\varDelta'^6\cos(\lambda-\lambda') + \tfrac{3}{4}\varDelta'^8\cos 2\lambda' - \tfrac{9}{8}\varDelta^4\varDelta'^4\cos 2\lambda' +$$

$$+ \tfrac{27}{16}\varDelta^4\varDelta'^4\cos 2\lambda - \tfrac{9}{8}\varDelta^4\varDelta'^4\cos(2\lambda'-2\lambda) + \tfrac{3}{4}\varDelta^2\varDelta'^6\cos(3\lambda'-\lambda) +$$

$$\left. + \tfrac{3}{16}\varDelta^4\varDelta'^4\cos(4\lambda'-2\lambda)\right] +$$

$$+ \frac{\eta'^2}{\Lambda' \Delta_0^5} [\tfrac{3}{4} \Lambda'^8 + \tfrac{15}{8} \Lambda^4 \Lambda'^4 + \tfrac{9}{4} \Lambda^2 \Lambda'^6 \cos(\lambda + \lambda') -$$
$$- \tfrac{3}{2} \Lambda^2 \Lambda'^6 \cos(\lambda - \lambda') - \tfrac{3}{4} \Lambda'^8 \cos 2\lambda' + \tfrac{9}{8} \Lambda^4 \Lambda'^4 \cos 2\lambda' -$$
$$- \tfrac{27}{16} \Lambda^4 \Lambda'^4 \cos 2\lambda - \tfrac{9}{8} \Lambda^4 \Lambda'^4 \cos(2\lambda' - 2\lambda) - \tfrac{3}{4} \Lambda^2 \Lambda'^6 \cos(3\lambda' - \lambda) -$$
$$- \tfrac{3}{16} \Lambda^4 \Lambda'^4 \cos(4\lambda' - 2\lambda)] +$$
$$+ \frac{\xi'\eta'}{\Lambda' \Delta_0^5} [\tfrac{9}{2} \Lambda^2 \Lambda'^6 \sin(\lambda + \lambda') - \tfrac{3}{2} \Lambda'^8 \sin 2\lambda' +$$
$$+ \tfrac{9}{4} \Lambda^4 \Lambda'^4 \sin 2\lambda' - \tfrac{27}{8} \Lambda^4 \Lambda'^4 \sin 2\lambda - \tfrac{3}{2} \Lambda^2 \Lambda'^6 \sin(3\lambda' - \lambda) -$$
$$- \tfrac{3}{8} \Lambda^4 \Lambda'^4 \sin(4\lambda' - 2\lambda)] +$$
$$+ \frac{\xi\xi'}{\sqrt{\Lambda\Lambda'}\, \Delta_0^5} [- \tfrac{9}{4} \Lambda^2 \Lambda'^6 - \tfrac{9}{4} \Lambda^6 \Lambda'^2 + \tfrac{21}{4} \Lambda^4 \Lambda'^4 \cos(\lambda + \lambda') +$$
$$+ \tfrac{21}{8} \Lambda^4 \Lambda'^4 \cos(\lambda - \lambda') - \tfrac{9}{4} \Lambda^6 \Lambda'^2 \cos 2\lambda + \tfrac{3}{4} \Lambda^2 \Lambda'^6 \cos 2\lambda -$$
$$- \tfrac{9}{4} \Lambda^2 \Lambda'^6 \cos 2\lambda' + \tfrac{3}{4} \Lambda^6 \Lambda'^2 \cos 2\lambda' + \tfrac{3}{4} \Lambda^2 \Lambda'^6 \cos(2\lambda - 2\lambda') +$$
$$+ \tfrac{3}{4} \Lambda^6 \Lambda'^2 \cos(2\lambda - 2\lambda') - \tfrac{9}{8} \Lambda^4 \Lambda'^4 \cos(3\lambda - \lambda') -$$
$$- \tfrac{9}{8} \Lambda^4 \Lambda'^4 \cos(3\lambda' - \lambda) + \tfrac{3}{8} \Lambda^4 \Lambda'^4 \cos(3\lambda - 3\lambda')] +$$
$$+ \frac{\eta\eta'}{\sqrt{\Lambda\Lambda'}\, \Delta_0^5} [- \tfrac{9}{4} \Lambda^6 \Lambda'^2 - \tfrac{9}{4} \Lambda^2 \Lambda'^6 - \tfrac{21}{4} \Lambda^4 \Lambda'^4 \cos(\lambda + \lambda') +$$
$$+ \tfrac{21}{8} \Lambda^4 \Lambda'^4 \cos(\lambda - \lambda') + \tfrac{9}{4} \Lambda^6 \Lambda'^2 \cos 2\lambda - \tfrac{3}{4} \Lambda^2 \Lambda'^6 \cos 2\lambda +$$
$$+ \tfrac{9}{4} \Lambda^2 \Lambda'^6 \cos 2\lambda' - \tfrac{3}{4} \Lambda^6 \Lambda'^2 \cos 2\lambda' + \tfrac{3}{4} \Lambda^6 \Lambda'^2 \cos(2\lambda - 2\lambda') +$$
$$+ \tfrac{3}{4} \Lambda^2 \Lambda'^6 \cos(2\lambda - 2\lambda') + \tfrac{9}{8} \Lambda^4 \Lambda'^4 \cos(3\lambda - \lambda') +$$
$$+ \tfrac{9}{8} \Lambda^4 \Lambda'^4 \cos(3\lambda' - \lambda) + \tfrac{3}{8} \Lambda^4 \Lambda'^4 \cos(3\lambda - 3\lambda')] +$$
$$+ \frac{\xi\eta'}{\sqrt{\Lambda\Lambda'}\, \Delta_0^5} [- \tfrac{21}{4} \Lambda^4 \Lambda'^4 \sin(\lambda + \lambda') - \tfrac{33}{8} \Lambda^4 \Lambda'^4 \sin(\lambda - \lambda') +$$
$$+ \tfrac{9}{4} \Lambda^6 \Lambda'^2 \sin 2\lambda - \tfrac{3}{4} \Lambda^2 \Lambda'^6 \sin 2\lambda + \tfrac{9}{4} \Lambda^2 \Lambda'^6 \sin 2\lambda' -$$
$$- \tfrac{3}{4} \Lambda^6 \Lambda'^2 \sin 2\lambda' + \tfrac{3}{4} \Lambda^6 \Lambda'^2 \sin(2\lambda - 2\lambda') +$$
$$+ \tfrac{3}{4} \Lambda^2 \Lambda'^6 \sin(2\lambda - 2\lambda') + \tfrac{9}{8} \Lambda^4 \Lambda'^4 \sin(3\lambda - \lambda') +$$
$$+ \tfrac{9}{8} \Lambda^4 \Lambda'^4 \sin(3\lambda' - \lambda) + \tfrac{3}{8} \Lambda^4 \Lambda'^4 \sin(3\lambda - 3\lambda')] +$$
$$+ \frac{\xi'\eta}{\sqrt{\Lambda\Lambda'}\, \Delta_0^5} [- \tfrac{21}{4} \Lambda^4 \Lambda'^4 \sin(\lambda + \lambda') - \tfrac{33}{8} \Lambda^4 \Lambda'^4 \sin(\lambda' - \lambda) +$$
$$+ \tfrac{9}{4} \Lambda^2 \Lambda'^6 \sin 2\lambda' - \tfrac{3}{4} \Lambda^6 \Lambda'^2 \sin 2\lambda' + \tfrac{9}{4} \Lambda^6 \Lambda'^2 \sin 2\lambda -$$
$$- \tfrac{3}{4} \Lambda^2 \Lambda'^6 \sin 2\lambda + \tfrac{3}{4} \Lambda^2 \Lambda'^6 \sin(2\lambda' - 2\lambda) +$$
$$+ \tfrac{3}{4} \Lambda^6 \Lambda'^2 \sin(2\lambda' - 2\lambda) + \tfrac{9}{8} \Lambda^4 \Lambda'^4 \sin(3\lambda' - \lambda) +$$
$$+ \tfrac{9}{8} \Lambda^4 \Lambda'^4 \sin(3\lambda - \lambda') + \tfrac{3}{8} \Lambda^4 \Lambda'^4 \sin(3\lambda' - 3\lambda)].$$

Hieraus bekommt man endlich für F_1 den folgenden Ausdruck:

$$F_1 = m_a m_b \Bigg[\frac{1}{\Delta_0} +$$

$$+ \xi \frac{1}{\Delta_0^3 \sqrt{\Lambda}} \{\Lambda^4 \cos\lambda - \tfrac{3}{2} \Lambda^2\Lambda'^2 \cos\lambda' + \tfrac{1}{2} \Lambda^2\Lambda'^2 \cos(2\lambda - \lambda')\} +$$

$$+ \eta \frac{1}{\Delta_0^3 \sqrt{\Lambda}} \{-\Lambda^4 \sin\lambda + \tfrac{3}{2} \Lambda^2\Lambda'^2 \sin\lambda' - \tfrac{1}{2} \Lambda^2\Lambda'^2 \sin(2\lambda - \lambda')\} +$$

$$+ \xi' \frac{1}{\Delta_0^3 \sqrt{\Lambda'}} \{\Lambda'^4 \cos\lambda' - \tfrac{3}{2} \Lambda^2\Lambda'^2 \cos\lambda + \tfrac{1}{2} \Lambda^2\Lambda'^2 \cos(2\lambda' - \lambda)\} +$$

$$+ \eta' \frac{1}{\Delta_0^3 \sqrt{\Lambda'}} \{-\Lambda'^4 \sin\lambda' + \tfrac{3}{2} \Lambda^2\Lambda'^2 \sin\lambda - \tfrac{1}{2} \Lambda^2\Lambda'^2 \sin(2\lambda' - \lambda)\} +$$

$$+ \xi^2 \cdot \frac{1}{\Lambda} \Bigg\{\frac{1}{\Delta_0^3} [-\tfrac{3}{4} \Lambda^4 + \tfrac{1}{8} \Lambda^2\Lambda'^2 \cos(\lambda + \lambda') - \tfrac{1}{2} \Lambda^2\Lambda'^2 \cos(\lambda - \lambda') +$$

$$+ \tfrac{1}{4} \Lambda^4 \cos 2\lambda + \tfrac{3}{8} \Lambda^2\Lambda'^2 \cos(3\lambda - \lambda')] +$$

$$+ \frac{1}{\Delta_0^5} [\tfrac{3}{4} \Lambda^8 + \tfrac{15}{8} \Lambda^4\Lambda'^4 - \tfrac{9}{4} \Lambda^6\Lambda'^2 \cos(\lambda + \lambda') - \tfrac{3}{2} \Lambda^6\Lambda'^2 \cos(\lambda - \lambda') +$$

$$+ \tfrac{3}{4} \Lambda^8 \cos 2\lambda - \tfrac{9}{8} \Lambda^4\Lambda'^4 \cos 2\lambda + \tfrac{27}{16} \Lambda^4\Lambda'^4 \cos 2\lambda' -$$

$$- \tfrac{9}{8} \Lambda^4\Lambda'^4 \cos(2\lambda - 2\lambda') + \tfrac{3}{4} \Lambda^6\Lambda'^2 \cos(3\lambda - \lambda') +$$

$$+ \tfrac{3}{16} \Lambda^4\Lambda'^4 \cos(4\lambda - 2\lambda')]\Bigg\} +$$

$$+ \eta^2 \frac{1}{\Lambda} \Bigg\{\frac{1}{\Delta_0^8} [-\tfrac{3}{4} \Lambda^4 - \tfrac{1}{8} \Lambda^2\Lambda'^2 \cos(\lambda + \lambda') - \tfrac{1}{2} \Lambda^2\Lambda'^2 \cos(\lambda - \lambda') -$$

$$- \tfrac{1}{4} \Lambda^4 \cos 2\lambda - \tfrac{3}{8} \Lambda^2\Lambda'^2 \cos(3\lambda - \lambda')] +$$

$$+ \frac{1}{\Delta_0^5} [\tfrac{3}{4} \Lambda^8 + \tfrac{15}{8} \Lambda^4\Lambda'^4 + \tfrac{9}{4} \Lambda^6\Lambda'^2 \cos(\lambda + \lambda') - \tfrac{3}{2} \Lambda^6\Lambda'^2 \cos(\lambda - \lambda') +$$

$$+ \tfrac{9}{8} \Lambda^4\Lambda'^4 \cos 2\lambda - \tfrac{3}{4} \Lambda^8 \cos 2\lambda - \tfrac{27}{16} \Lambda^4\Lambda'^4 \cos 2\lambda' -$$

$$- \tfrac{9}{8} \Lambda^4\Lambda'^4 \cos(2\lambda - 2\lambda') - \tfrac{3}{4} \Lambda^6\Lambda'^2 \cos(3\lambda - \lambda') -$$

$$- \tfrac{3}{16} \Lambda^4\Lambda'^4 \cos(4\lambda - 2\lambda')]\Bigg\} +$$

$$+ \xi\eta \cdot \frac{1}{\Lambda} \Bigg\{\frac{1}{\Delta_0^8} [-\tfrac{1}{4} \Lambda^2\Lambda'^2 \sin(\lambda + \lambda') - \tfrac{1}{2} \Lambda^4 \sin 2\lambda -$$

$$- \tfrac{3}{4} \Lambda^2\Lambda'^2 \sin(3\lambda - \lambda')] +$$

$$+ \frac{1}{\Delta_0^5}\left[\tfrac{9}{2}\, \Lambda^6 \Lambda'^2 \sin(\lambda+\lambda') - \tfrac{3}{2}\, \Lambda^8 \sin 2\lambda + \tfrac{9}{4}\, \Lambda^4 \Lambda'^4 \sin 2\lambda -\right.$$

$$- \tfrac{27}{8}\, \Lambda^4 \Lambda'^4 \sin 2\lambda' - \tfrac{3}{2}\, \Lambda^6 \Lambda'^2 \sin(3\lambda - \lambda') -$$

$$\left.- \tfrac{3}{8}\, \Lambda^4 \Lambda'^4 \sin(4\lambda - 2\lambda')\right]\Big\} +$$

$$+ \xi'^2 \cdot \frac{1}{\Lambda'}\left\{\frac{1}{\Delta_0^3}\left[- \tfrac{3}{4}\, \Lambda'^4 + \tfrac{1}{8}\, \Lambda^2 \Lambda'^2 \cos(\lambda+\lambda') - \tfrac{1}{2}\, \Lambda^2 \Lambda'^2 \cos(\lambda-\lambda') +\right.\right.$$

$$\left. + \tfrac{1}{4}\, \Lambda'^4 \cos 2\lambda' + \tfrac{3}{8}\, \Lambda^2 \Lambda'^2 \cos(3\lambda' - \lambda)\right] +$$

$$+ \frac{1}{\Delta_0^5}\left[\tfrac{3}{4}\, \Lambda'^8 + \tfrac{15}{8}\, \Lambda^4 \Lambda'^4 - \tfrac{9}{4}\, \Lambda^2 \Lambda'^6 \cos(\lambda+\lambda') - \tfrac{3}{2}\, \Lambda^2 \Lambda'^6 \cos(\lambda-\lambda') +\right.$$

$$+ \tfrac{3}{4}\, \Lambda'^8 \cos 2\lambda' - \tfrac{9}{8}\, \Lambda^4 \Lambda'^4 \cos 2\lambda' + \tfrac{27}{16}\, \Lambda^4 \Lambda'^4 \cos 2\lambda -$$

$$- \tfrac{9}{8}\, \Lambda^4 \Lambda'^4 \cos(2\lambda' - 2\lambda) + \tfrac{3}{4}\, \Lambda^2 \Lambda'^6 \cos(3\lambda' - \lambda) +$$

$$\left.\left. + \tfrac{3}{16}\, \Lambda^4 \Lambda'^4 \cos(4\lambda' - 2\lambda)\right]\right\} +$$

$$+ \eta'^2 \cdot \frac{1}{\Lambda'}\left\{\frac{1}{\Delta_0^3}\left[- \tfrac{3}{4}\, \Lambda'^4 - \tfrac{1}{8}\, \Lambda^2 \Lambda'^2 \cos(\lambda+\lambda') - \tfrac{1}{2}\, \Lambda^2 \Lambda'^2 \cos(\lambda-\lambda') -\right.\right.$$

$$\left. - \tfrac{1}{4}\, \Lambda'^4 \cos 2\lambda' - \tfrac{3}{8}\, \Lambda^2 \Lambda'^2 \cos(3\lambda' - \lambda)\right] +$$

$$+ \frac{1}{\Delta_0^5}\left[\tfrac{3}{4}\, \Lambda'^8 + \tfrac{15}{8}\, \Lambda^4 \Lambda'^4 + \tfrac{9}{4}\, \Lambda^2 \Lambda'^6 \cos(\lambda+\lambda') - \tfrac{3}{2}\, \Lambda^2 \Lambda'^6 \cos(\lambda-\lambda') -\right.$$

$$- \tfrac{3}{4}\, \Lambda'^8 \cos 2\lambda' + \tfrac{9}{8}\, \Lambda^4 \Lambda'^4 \cos 2\lambda' - \tfrac{27}{16}\, \Lambda^4 \Lambda'^4 \cos 2\lambda -$$

$$- \tfrac{9}{8}\, \Lambda^4 \Lambda'^4 \cos(2\lambda' - 2\lambda) - \tfrac{3}{4}\, \Lambda^2 \Lambda'^6 \cos(3\lambda' - \lambda) -$$

$$\left.\left. - \tfrac{3}{16}\, \Lambda^4 \Lambda'^4 \cos(4\lambda' - 2\lambda)\right]\right\} +$$

$$+ \xi'\eta' \frac{1}{\Lambda'}\left\{\frac{1}{\Delta_0^3}\left[- \tfrac{1}{4}\, \Lambda^2 \Lambda'^2 \sin(\lambda + \lambda') - \tfrac{1}{2}\, \Lambda'^4 \sin 2\lambda' -\right.\right.$$

$$\left. - \tfrac{3}{4}\, \Lambda^2 \Lambda'^2 \sin(3\lambda' - \lambda)\right] +$$

$$+ \frac{1}{\Delta_0^5}\left[\tfrac{9}{2}\, \Lambda^2 \Lambda'^6 \sin(\lambda + \lambda') - \tfrac{3}{2}\, \Lambda'^8 \sin 2\lambda' + \tfrac{9}{4}\, \Lambda^4 \Lambda'^4 \sin 2\lambda' -\right.$$

$$- \tfrac{27}{8}\, \Lambda^4 \Lambda'^4 \sin 2\lambda - \tfrac{3}{2}\, \Lambda^2 \Lambda'^6 \sin(3\lambda' - \lambda) -$$

$$\left.\left. - \tfrac{3}{8}\, \Lambda^4 \Lambda'^4 \sin(4\lambda' - 2\lambda)\right]\right\} +$$

$$+ \frac{\xi\xi'}{\sqrt{\Lambda\Lambda'}}\left\{\frac{1}{\Delta_0^3}\left[\tfrac{9}{4}\, \Lambda^2 \Lambda'^2 - \tfrac{3}{4}\, \Lambda^2 \Lambda'^2 \cos 2\lambda - \tfrac{3}{4}\, \Lambda^2 \Lambda'^2 \cos 2\lambda' +\right.\right.$$

$$\left. + \tfrac{1}{4}\, \Lambda^2 \Lambda'^2 \cos(2\lambda - 2\lambda')\right] +$$

$$+ \frac{1}{\Delta_0^5}\Big[-\tfrac{9}{4}\Lambda^2\Lambda'^6 - \tfrac{9}{4}\Lambda^6\Lambda'^2 + \tfrac{21}{4}\Lambda^4\Lambda'^4\cos(\lambda+\lambda') +$$

$$+ \tfrac{21}{8}\Lambda^4\Lambda'^4\cos(\lambda-\lambda') - \tfrac{9}{4}\Lambda^6\Lambda'^2\cos 2\lambda + \tfrac{3}{4}\Lambda^2\Lambda'^6\cos 2\lambda -$$

$$- \tfrac{9}{4}\Lambda^2\Lambda'^6\cos 2\lambda' + \tfrac{3}{4}\Lambda^6\Lambda'^2\cos 2\lambda' + \tfrac{3}{4}\Lambda^2\Lambda'^6\cos(2\lambda-2\lambda') +$$

$$+ \tfrac{3}{4}\Lambda^6\Lambda'^2\cos(2\lambda-2\lambda') - \tfrac{9}{8}\Lambda^4\Lambda'^4\cos(3\lambda-\lambda') -$$

$$- \tfrac{9}{8}\Lambda^4\Lambda'^4\cos(3\lambda'-\lambda) + \tfrac{3}{8}\Lambda^4\Lambda'^4\cos(3\lambda-3\lambda')\Big]\Big\} +$$

$$+ \frac{\eta\eta'}{\sqrt{\Lambda\Lambda'}}\Big\{\frac{1}{\Delta_0^3}\Big[\tfrac{9}{4}\Lambda^2\Lambda'^2 + \tfrac{3}{4}\Lambda^2\Lambda'^2\cos 2\lambda + \tfrac{3}{4}\Lambda^2\Lambda'^2\cos 2\lambda' +$$

$$+ \tfrac{1}{4}\Lambda^2\Lambda'^2\cos(2\lambda-2\lambda')\Big] +$$

$$+ \frac{1}{\Delta_0^5}\Big[-\tfrac{9}{4}\Lambda^6\Lambda'^2 - \tfrac{9}{4}\Lambda^2\Lambda'^6 - \tfrac{21}{4}\Lambda^4\Lambda'^4\cos(\lambda+\lambda') +$$

$$+ \tfrac{21}{8}\Lambda^4\Lambda'^4\cos(\lambda-\lambda') + \tfrac{9}{4}\Lambda^6\Lambda'^2\cos 2\lambda - \tfrac{3}{4}\Lambda^2\Lambda'^6\cos 2\lambda +$$

$$+ \tfrac{9}{4}\Lambda^2\Lambda'^6\cos 2\lambda' - \tfrac{3}{4}\Lambda^6\Lambda'^2\cos 2\lambda' + \tfrac{3}{4}\Lambda^6\Lambda'^2\cos(2\lambda-2\lambda') +$$

$$+ \tfrac{3}{4}\Lambda^2\Lambda'^6\cos(2\lambda-2\lambda') + \tfrac{9}{8}\Lambda^4\Lambda'^4\cos(3\lambda-\lambda') +$$

$$+ \tfrac{9}{8}\Lambda^4\Lambda'^4\cos(3\lambda'-\lambda) + \tfrac{3}{8}\Lambda^4\Lambda'^4\cos(3\lambda-3\lambda')\Big]\Big\} +$$

$$+ \frac{\xi\eta'}{\sqrt{\Lambda\Lambda'}}\Big\{\frac{1}{\Delta_0^3}\Big[\tfrac{3}{4}\Lambda^2\Lambda'^2\sin 2\lambda + \tfrac{3}{4}\Lambda^2\Lambda'^2\sin 2\lambda' +$$

$$+ \tfrac{1}{4}\Lambda^2\Lambda'^2\sin(2\lambda-2\lambda')\Big] +$$

$$+ \frac{1}{\Delta_0^5}\Big[-\tfrac{21}{4}\Lambda^4\Lambda'^4\sin(\lambda+\lambda') - \tfrac{33}{8}\Lambda^4\Lambda'^4\sin(\lambda-\lambda') +$$

$$+ \tfrac{9}{4}\Lambda^6\Lambda'^2\sin 2\lambda - \tfrac{3}{4}\Lambda^2\Lambda'^6\sin 2\lambda + \tfrac{9}{4}\Lambda^2\Lambda'^6\sin 2\lambda' -$$

$$- \tfrac{3}{4}\Lambda^6\Lambda'^2\sin 2\lambda' + \tfrac{3}{4}\Lambda^6\Lambda'^2\sin(2\lambda-2\lambda') + \tfrac{3}{4}\Lambda^2\Lambda'^6\sin(2\lambda-2\lambda') +$$

$$+ \tfrac{9}{8}\Lambda^4\Lambda'^4\sin(3\lambda-\lambda') + \tfrac{9}{8}\Lambda^4\Lambda'^4\sin(3\lambda'-\lambda) +$$

$$+ \tfrac{3}{8}\Lambda^4\Lambda'^4\sin(3\lambda-3\lambda')\Big]\Big\} +$$

$$+ \frac{\xi'\eta}{\sqrt{\Lambda\Lambda'}}\Big\{\frac{1}{\Delta_0^3}\Big[\tfrac{3}{4}\Lambda^2\Lambda'^2\sin 2\lambda + \tfrac{3}{4}\Lambda^2\Lambda'^2\sin 2\lambda' +$$

$$+ \tfrac{1}{4}\Lambda^2\Lambda'^2\sin(2\lambda'-2\lambda)\Big] +$$

$$+ \frac{1}{\Delta_0^5}\Big[-\tfrac{21}{4}\Lambda^4\Lambda'^4\sin(\lambda+\lambda') - \tfrac{33}{8}\Lambda^4\Lambda'^4\sin(\lambda'-\lambda) +$$

$$+ \tfrac{9}{4}\Lambda^2\Lambda'^6\sin 2\lambda' - \tfrac{3}{4}\Lambda^6\Lambda'^2\sin 2\lambda' + \tfrac{9}{4}\Lambda^6\Lambda'^2\sin 2\lambda -$$

$$- \tfrac{3}{4}\Lambda^2\Lambda'^6\sin 2\lambda + \tfrac{3}{4}\Lambda^2\Lambda'^6\sin(2\lambda'-2\lambda) +$$

$$+ \tfrac{3}{4} \Delta^6 \Delta'^2 \sin(2\lambda' - 2\lambda) + \tfrac{9}{8} \Delta^4 \Delta'^4 \sin(3\lambda' - \lambda) +$$

$$+ \tfrac{9}{8} \Delta^4 \Delta'^4 \sin(3\lambda - \lambda') + \tfrac{3}{8} \Delta^4 \Delta'^4 \sin(3\lambda' - 3\lambda)]\Big\} +$$

$$+ p^2 \frac{1}{\Delta_0^3 \Delta} \{\tfrac{1}{4} \Delta^2 \Delta'^2 \cos(\lambda + \lambda') - \tfrac{1}{4} \Delta^2 \Delta'^2 \cos(\lambda - \lambda')\} +$$

$$+ q^2 \frac{1}{\Delta_0^3 \Delta} \{- \tfrac{1}{4} \Delta^2 \Delta'^2 \cos(\lambda + \lambda') - \tfrac{1}{4} \Delta^2 \Delta'^2 \cos(\lambda - \lambda')\} +$$

$$+ pq \frac{1}{\Delta_0^3 \Delta} \{- \tfrac{1}{2} \Delta^2 \Delta'^2 \sin(\lambda + \lambda')\} +$$

$$+ p'^2 \frac{1}{\Delta_0^3 \Delta'} \{\tfrac{1}{4} \Delta^2 \Delta'^2 \cos(\lambda + \lambda') - \tfrac{1}{4} \Delta^2 \Delta'^2 \cos(\lambda - \lambda')\} +$$

$$+ q'^2 \frac{1}{\Delta_0^3 \Delta'} \{- \tfrac{1}{4} \Delta^2 \Delta'^2 \cos(\lambda + \lambda') - \tfrac{1}{4} \Delta^2 \Delta'^2 \cos(\lambda - \lambda')\} +$$

$$+ p'q' \frac{1}{\Delta_0^3 \Delta'} \{- \tfrac{1}{2} \Delta^2 \Delta'^2 \sin(\lambda + \lambda')\} +$$

$$+ pp' \frac{1}{\Delta_0^3 \sqrt{\Delta \Delta'}} \{- \tfrac{1}{2} \Delta^2 \Delta'^2 \cos(\lambda + \lambda') + \tfrac{1}{2} \Delta^2 \Delta'^2 \cos(\lambda - \lambda')\} +$$

$$+ qq' \frac{1}{\Delta_0^3 \sqrt{\Delta \Delta'}} \{\tfrac{1}{2} \Delta^2 \Delta'^2 \cos(\lambda + \lambda') + \tfrac{1}{2} \Delta^2 \Delta'^2 \cos(\lambda - \lambda')\} +$$

$$+ pq' \frac{1}{\Delta_0^3 \sqrt{\Delta \Delta'}} \{\tfrac{1}{2} \Delta^2 \Delta'^2 \sin(\lambda + \lambda') + \tfrac{1}{2} \Delta^2 \Delta'^2 \sin(\lambda - \lambda')\} +$$

$$+ p'q \frac{1}{\Delta_0^3 \sqrt{\Delta \Delta'}} \{\tfrac{1}{2} \Delta^2 \Delta'^2 \sin(\lambda + \lambda') - \tfrac{1}{2} \Delta^2 \Delta'^2 \sin(\lambda - \lambda')\}\Big].$$



ÖFVERSIGT AF K. SV. VET.-AKAD. FÖRHANDL. 1900. N:o 2.

MEDDELANDEN

FRÅN

LUNDS ASTRONOMISKA OBSERVATORIUM

N:o 11.

WAHRSCHEINLICHKEITSBESTIMMUNGEN BEI DER GEWÖHNLICHEN KETTENBRUCHENTWICKELUNG REELLER ZAHLEN

VON

T. BRODÉN

MITGETEILT AM 14 FEBRUAR 1900 DURCH C. W. L. CHARLIER

STOCKHOLM
KUNGL. BOKTRYCKERIET. P. A. NORSTEDT & SÖNER
1900

ÖFVERSIGT AF K. SV. VET.-AKAD. FÖRHANDL. 1900. N:o 2.

MEDDELANDEN

FRÅN

LUNDS ASTRONOMISKA OBSERVATORIUM

N:o 11.

WAHRSCHEINLICHKEITSBESTIMMUNGEN BEI DER GEWÖHNLICHEN KETTENBRUCHENTWICKELUNG REELLER ZAHLEN

VON

T. BRODÉN

MITGETEILT AM 14 FEBRUAR 1900 DURCH C. W. L. CHARLIER

STOCKHOLM
KUNGL. BOKTRYCKERIET. P. A. NORSTEDT & SÖNER
1900

1. Im Jahre 1888 behandelte GYLDÉN in zwei Aufsätzen [1]) eine mathematische Frage, welche er etwa folgendermassen formulirte: Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei der Entwickelung irrationaler Decimalbrüche in Kettenbrüche ganze Zahlen von gegebener Grösse auftreten? Und im Zusammenhange hiermit wurde die Wahrscheinlichkeit für Divergenz gewisser in der Störungstheorie vorkommender Reihen in Betracht gezogen.

Die folgende Darstellung lässt sich als eine Revision dieser GYLDÉN'schen Untersuchung bezeichnen. Erstens werden die betreffenden Fragen im Ganzen mit einer etwas grösseren mathematischen Gründlichkeit (und damit folgenden grösseren Einfachheit) angegriffen, als in GYLDÉN's Darstellung sich vorfindet (oder von ihm beabsichtigt wurde). Zweitens wird der erstgenannte Theil der Untersuchung in gewissen Hinsichten sachlich ergänzt, sowie auch einige darin vorkommenden Versehen angezeigt. Hierbei sei sogleich bemerkt, dass dieser Theil der Untersuchung, obgleich an sich von Interesse, in bedeutendem Masse ohne directe Anwendung bei der erwähnten reihentheoretischen Frage

[1]) Om sannolikheten af inträdande divergens vid användande af de hittills brukliga methoderna att analytiskt framställa planetariska störingar. Öfversigt af K. Vet.Akad. Förh., årg. 45, p. 77—87. Om sannolikheten att påträffa stora tal vid utvecklingen af irrationela decimalbråk i kedjebråk. Ibid. p. 349 —358.

bleibt (und namentlich dass die angedeuteten Fehler in dieser Richtung keine Bedeutung haben). Drittens werden an das von GYLDÉN angegebene Hauptresultat der reihentheoretischen Untersuchung gewisse Anmerkungen geknüpft.

2. Zunächst müssen einige wahrscheinlichkeitstheoretische Bemerkungen principieller Natur vorausgeschickt werden. Wenn man eine im Sinne der modernen Mengenlehre allgemeine Theorie für Wahrscheinlichkeiten bei *unendlich vielen Möglichkeiten* schreiben wollte,[1]) so müsste man, so viel ich finden kann, von dem Begriffe eines *Grenzüberganges* ausgehen (wenigstens insofern es möglich sein sollte, die Theorie in Verbindung mit Versuchen und Beobachtungen zu setzen). Eine Haupt-Definition würde etwa folgendermassen lauten: Es sei $\varphi(n)$ eine ganzzahlige, unaufhörlich und unbegrenzt mit n wachsende Function; es bedeute ferner für alle (ganze, positive) n-Werthe, P_n eine bestimmte Menge von $\varphi(n)$ Möglichkeiten, und P_n sei immer in P_{n+1} enthalten; die *abzählbar* unendliche Grenzmenge $\lim\limits_{n=\infty} P_n$ [d. h. die Gesammtheit aller Elemente, welche für hinreichend grosse n in P_n eingehen] sei mit P bezeichnet; zu jeder Menge P_n gehöre eine gewisse Wahrscheinlichkeitszahl S_n (Anzahl von günstigen Möglichkeiten durch $\varphi(n)$ dividirt); dann heisse $\lim\limits_{n=\infty} S_n$ die bei *diesem* Grenzübergange zur Menge P gehörende Wahrscheinlichkeit. (Die Möglichkeit eines unbestimmten Werthes von $\lim S_n$ könnte gewisse Bemerkungen veranlassen, welche wir doch hier übergehen). — Eine andere denkbare Weise, den Grenzübergang einzurichten, ist die folgende: Man theile eine gegebene, *abzählbare oder nicht-abzählbare* unendliche Menge von Möglichkeiten in $\varphi(n)$ Gruppen von je unendlich vielen Elementen; eine Gruppe werde als günstig betrachtet, wenn sie wenigstens *ein* günstiges

[1]) So viel ich weiss, enthält die Literatur in dieser Richtung höchstens zerstreute Bemerkungen. Namentlich scheinen (nach Angabe von E. CZUBER, Die Entwickelung der Wahrscheinlichkeitstheorie, Jahresbericht d. deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 7, Heft. 2 (1899), p. 50) einige derartige Aussprüche von CESÁRO und VIVANTI in den Zeitschriften Periodico di Matematica VI und Rivista di Mat. I vorkommen, welche ich nicht Gelegenheit gehabt habe zu sehen.

Element enthält, sonst ungünstig — *oder* die Gruppe sei günstig, wenn sie *lauter* günstige Elemente enthält, sonst ungünstig; die durch $\varphi(n)$ dividirte Anzahl der günstigen Gruppen sei S_n; man theile nachher jede Gruppe in Untergruppen, so dass in Alles $\varphi(n+1)$ Gruppen entstehen, bilde in analoger Weise den Quotienten S_{n+1} u. s. w.; dann heisse $\lim_{n=\infty} S_n$ die zu *diesem* Grenzübergange gehörende Wahrscheinlichkeit.

Andere etwa mögliche Gestaltungen des Grenzüberganges werden wir hier nicht betrachten.

Die Art des Grenzüberganges in irgend einer Richtung *a priori* bestimmen zu wollen, wäre sinnlos: bei jeder vorkommenden Anwendung müssen die näheren Umstände hierüber entscheiden.

Im Folgenden wird in erster Hand die erste der beiden genannten Betrachtungsweisen vorausgesetzt. Ueber dieselbe sei sogleich folgendes bemerkt. Selbstverständlich ist es denkbar, dass man unter gewissen Voraussetzungen die nähere Art des Grenzüberganges verändern kann (bei gegebener Menge P), ohne dass der Werth von $\lim S_n$ sich ändert. Unter solchen Umständen kann es möglich sein, den Begriff der Wahrscheinlichkeit in einer Form zu definiren, bei welcher der Grenzübergang wenigstens in gewisser Hinsicht eliminirt ist. Ferner ist es eben so denkbar, dass in zwei oder mehreren analogen Fällen, welche sich auf verschiedene Mengen P beziehen, die Wahrscheinlichkeit ganz dieselbe sein kann. Namentlich lässt es sich denken, dass dies sogar für eine *nicht-abzählbare* Menge von P-Systemen gilt, welche etwa eine Strecke stetig ausfüllen (oder sonst aus irgend einem Gesichtspunkte eine Totalität von mehr oder weniger einfacher Art bilden). Durch diese beiden Umstände im Verein wird es ermöglicht, auch von dem jetzt fraglichen Ausgangspunkte zur Theorie der »geometrischen Wahrscheinlichkeit» als Specialfall zu gelangen. — Bei der zweiten Betrachtungsweise gestaltet sich dieser Uebergang einfacher, da es von vornherein erlaubt ist, eine nicht-abzählbare Menge von Möglichkeiten anzunehmen.

Die meisten der im Folgenden behandelten Fragen führen im Wesentlichen nicht über das Gebiet der »geometrischen Wahrscheinlichkeit» hinaus. Aber es ist mit Rücksicht auf einige Fragen nothwendig, eine gewisse Abtheilung jener allgemeineren Theorie hier kurz zu skizziren. Man betrachte eine stetige Folge reeller Zahlen x, etwa diejenigen zwischen 0 und 1. Und es sei eine bestimmte arithmetische Eigenschaft vorgelegt, welche gewissen Zahlen x zukommt, anderen aber nicht; die Menge der ersteren heisse Q. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine willkührliche Zahl x zur Menge Q gehört? Diese Frage ist *sinnlos*, wenn sie ohne weitere Voraussetzungen dargestellt wird (Beispiel: wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine willkührlich gewählte Zahl x rational ist?).

Um nöthige Bestimmtheit zu gewinnen, denken wir uns zunächst, dass man eine bestimmte abzählbare Theilmenge P herausnimmt und dieselbe in bestimmter Weise als Grenzfall für endliche Mengen P_n auffasst. Ein specieller, aber wichtiger Grenzübergang dieser Art ist der folgende. Es sei σ eine beliebige pos. Grösse < 1, und a_1, a_2 zwei Theilstrecken im Intervalle $0 \dots 1$, welche beide die Länge σ haben; die Anzahl der in a_1 bez. a_2 fallenden Stellen x, welche zu P_n gehören, sei ϱ_1 bez. ϱ_2; die angedeutete Specializirung besteht darin, dass $\lim_{n=\infty} (\varrho_1 : \varrho_2)$ *gleich Eins* sein soll. Dies lässt sich kurz auch so ausdrücken, dass die Grenzmenge P überall dieselbe »Dichtigkeit» hat — welche Eigenschaft also nicht der Menge P als solchen zukommt, sondern an bestimmte Zerlegungen in endliche Mengen geknüpft ist. Ein anderer Ausdruck für dieselbe Sache: alle Strecken von derselben Länge sind *gleichberechtigt*. Eine gegebene überalldichte (und abzählb.) Menge P lässt sich in der That immer, und zwar auf unendlich viele Weisen, in der genannten Art als Grenzfall darstellen; der ziemlich einfache Beweis hierfür wird hier ausgelassen. Jetzt sind verschiedene Fälle hinsichtlich der Menge Q zu unterscheiden.

1) Q ist in keinem Theilintervalle condensirt. Dann dürfte es immer gelten, dass die Wahrscheinlichkeit gleich Null ist.

ganz unabhängig davon, wie man die Menge P wählt und zerlegt. Wenn der »Inhalt» I der Menge Q [1]) gleich Null ist, sieht man dies ohne weiteres ein. Aber auch für $I > 0$ [2]) dürfte dasselbe der Fall sein; wir verzichten doch gegenwärtig auf einen ausgeführten Beweis. — Analog wenn die ungünstigen Stellen in keiner Theilstrecke condensirt sind.

2) Die Stellen Q bilden stetige Strecken (in endl. oder unendl. Anzahl), und die ungünstigen Stellen andere stet. Strecken. Dann ist die fragliche Wahrscheinlichkeit, unabhängig von P, gleich der Gesammtlänge der erstgenannten Strecken. Wir befinden uns auf dem Gebiete der »geometrischen Wahrscheinlichkeit».

3) Sowohl die günstigen als auch die ungünstigen Stellen sind überall condensirt. Dann lässt sich bei unbestimmter Menge P gar nichts über die Wahrscheinlichkeit aussprechen.

Dies sind, kann man sagen, die Hauptfälle. Natürlich können auch Zwischenfälle und Combinationen mannigfacher Art vorkommen.

Eine Zerlegung der gegebenen Menge in *Gruppen* der obengenannten Art lässt sich so ausführen, dass man die ganze Strecke $0 \ldots 1$ in Theilstrecken zerlegt, deren Punkte die verschiedenen Gruppen ausmachen (mit besonderen Bestimmungen hinsichtlich der Grenzpunkte), und welche im Limes unendlich klein werden. Speciell können die successiven Systeme von Theilungspunkte so gewählt werden, dass ihre Gesammtheit (welche eine überalldichte Menge bildet) in ganz demselben Sinne wie die obige Menge P überall dieselbe Dichtigkeit hat. Dann

---

[1]) »Inhalt» einer zu einem Linearcontinuum gehörenden Punktmenge Q ist = der unteren Grenze für die Gesammtlänge von Theilstrecken, welche alle Q-Stellen einschliessen.

[2]) Es ist bekannt, dass es wirklich Mengen giebt, welche in keinem Intervalle condensirt sind, aber dennoch einen Inhalt > 0 haben. Vom Verf. ist sogar eine Methode angegeben worden, nach welcher man in einem gegebenen Intervalle derartige Mengen von gegebenem, *beliebig grossem* Inhalt (welcher nur nicht die Länge des ganzen Intervalles erreicht) bilden kann. Man sehe »Functionentheor. Bemerkungen u. Sätze». Acta Univ. Lund., Tom. XXXIII, p. 40, 41, 45. Vgl. auch SCHÖNFLIES, Gött. Nachr. 1899, p. 174.

heisse es auch jetzt, dass alle Strecken von derselben Länge gleichberechtigt sind. Wenn man dies voraussetzt, modificiren sich die 3 obigen Fälle auf folgende Weise:

1 a) Die Wahrscheinlichkeit ist $= 1$ oder $= 0$, jenachdem man voraussetzt, dass eine günstige Strecke überhaupt günstige Stellen oder lauter günstige Stellen enthalten soll. Analog wenn die ungünstigen Stellen in keiner Theilstrecke condensirt sind.

2 a) Ganz wie 2).

3 a) Die Wahrscheinlichkeit ist $= 1$ oder $= 0$, jenachdem die eine oder die andere der unter 1 a) genannten Voraussetzungen gelten soll.

Die Sache lässt sich ferner immer so *verallgemeinern*, dass man anstatt der Gesammtheit aller Zahlen im fraglichen Intervalle, eine Menge M zum Grunde legt, welche (wie z. B. die Gesammtheit der irrationalen Zahlen) überall condensirt ist und in jedem Theilintervalle eine nicht-abzählbare Theilmenge hat, aber keine Strecke stetig ausfüllt (und man kann hierzu dadurch veranlasst werden, dass etwa bei den Irrationalzahlen arithm. Distinctionen möglich sind, von denen es bei rationalen Zahlen keine Rede sein kann). Alles gestaltet sich dann völlig analog. Aber die Fälle 2 und 2 a) sind in folgender modificirter Form zu charakterisiren: die Stellen Q sind so vertheilt, dass sie gewisse Theilstrecken *beherrschen*, in dem Sinne dass diese Strecken keine ungünstigen Stellen enthalten, und ähnlich für die ungünstigen Stellen.

Bei dem in dieser Weise modificirten Falle 2 [oder 2 a] ist ja die Abweichung von den Verhältnissen bei der »geometrischen Wahrscheinlichkeit» ziemlich unwesentlich. Bei der folgenden Untersuchung werden wir grösstentheils eben mit diesem Falle zu thun haben; aber auch mit den übrigen Fällen werden wir in Berührung kommen.

3. Wir gehen jetzt zu der angedeuteten Untersuchung hinsichtlich Kettenbruchentwickelungen über. Die gewöhnliche Kettenbruchentwickelung einer irrationalen Zahl μ zwischen 0 und 1 sei

(1) $$\mu = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \dots}}}$$

Die ganzen positiven Zahlen $a_1, a_2 \dots a_n \dots$ bilden eine unendliche Reihe und sind mit μ eindeutig bestimmt. Man betrachte ferner die Gesammtheit *aller irrationalen* Zahlen im genannten Intervalle $0 \dots 1$. Und es sei festgestellt, dass alle Theilstrecken von derselben Länge gleichberechtigt sein sollen. Dann haben folgende Wahrscheinlichkeiten eine bestimmte Bedeutung, indem die günstigen Fällen (sehe unten) eine Anzahl von Theilstrecken im oben angegebenem Sinne »beherrschen»:

$D_{n,k}$ bez. $S_{n,k}$: die Wahrscheinlichkeit, dass $a_{n+1} = k$ bez. $a_{n+1} \geqq k$ ist;

$\delta_{n,k}$ bez. $\sigma_{n,k}$: die Wahrscheinlichkeit, dass eine in der n-gliedrigen Menge $a_1 \dots a_n$ willkührlich gewählte Zahl $a_i = k$ bez. $\geqq k$ ist;

$\varepsilon_{n,k}$ bez. $\varrho_{n,k}$: die Wahrscheinlichkeit, dass k bez. k oder eine grössere Zahl unter den n Zahlen $a_1 \dots a_n$ vorkommt.

Wir werden uns zunächst mit der Bestimmung von $D_{n,k}$ und $S_{n,k}$ beschäftigen. Die successiven »Convergenten» des Kettenbruches (1) bezeichne man

$$(a_1, a_2, \dots a_n) = \frac{r_n}{s_n} = C_n$$

(r_n und s_n relativ prim). Bekanntlich gelten dann die Relationen

(2) $$r_{n+1} = a_{n+1} r_n + r_{n-1}, \quad s_{n+1} = a_{n+1} s_n + s_{n-1},$$

(3) $$\frac{r_{n+1}}{s_{n+1}} - \frac{r_n}{s_n} = \frac{(-1)^n}{s_n s_{n+1}}.$$

Es sei jetzt n eine bestimmte Zahl, und man setze auch für $a_1 \dots a_n$ bestimmte Werthe voraus, nicht aber für a_{n+1} etc. Dann muss μ, wie unmittelbar ersichtlich ist, zwischen den Werthen

$$(a_1 \dots a_n) \text{ und } (a_1 \dots a_n, 1)$$

liegen; und die erste oder zweite dieser Grenzzahlen ist die kleinere, je nachdem n gerade oder ungerade. Es ist somit μ auf eine Strecke von der Länge

$$l_{n1} = (-1)^n \{(a_1 \ldots a_n, 1) - (a_1 \ldots a_n)\}$$

hingewiesen. Für diese Länge gilt aber auch der Ausdruck

$$l_{n1} = \frac{1}{s_n(s_{n-1} + s_n)},$$

wie aus (2) und (3) unmittelbar hervorgeht, wenn man $a_{n+1} = 1$ setzt. Es sei ferner k eine ganze Zahl > 1. Für Werthe von a_{n+1}, welche $\geqq k$ sind, gilt es, ganz wie für $k = 1$, dass μ in die Strecke

$$(a_1 \ldots a_n) \ldots (a_1 \ldots a_n, k)$$

fällt; und die Länge dieser Strecke ist

$$l_{nk} = \frac{1}{s_n(k s_n + s_{n-1})}.$$

Die Wahrscheinlichkeit (immer bei gegebenen $a_1 \ldots a_n$), dass μ zu dieser Strecke gehört, ist aber gleich $l_{nk} : l_{n1}$. Also folgt, wenn man

$$\frac{s_{n-1}}{s_n} = q_n$$

setzt: Wenn der Quotient q_n bekannt ist, so gilt für die Wahrscheinlichkeit $W(q_n, k)$, dass a_{n+1} den Werth k erreicht oder übersteigt, der Ausdruck

(4) $$W(q_n, k) = \frac{1 + q_n}{k + q_n}.$$ [1])

[1]) Dieser Ausdruck stimmt nicht mit demjenigen überein, den GYLDÉN l. c. p. 81 für dieselbe Grösse herleitet. G. erhält nämlich (mit m statt n)

$$\frac{\left(1 + \frac{s_{m-1}}{s_m}\right)\vartheta_m}{a_{m+1} + \frac{s_{m-1}}{s_m}},$$

wo a_{m+1} dieselbe Bedeutung hat, wie oben k, und ϑ_m als eine gewissermassen unbestimmte Grösse betrachtet wird, für welche nachher der Mittelwerth 0,85380 eingeführt wird. G. hat in der That übersehen, dass seine Gleichung (p. 81)

$$s_m a_{m+1} + s_{m-1} = \nu(s_m + s_{m-1})\vartheta_m$$

Ferner bezeichnen wir mit $F(q_n, k)$ die Wahrscheinlichkeit, bei gegebenem q_n, dass a_{n+1} eben den Werth k annimmt. Für $a_{n+1}=k$ fallen die möglichen μ-Werthe in eine Strecke von der Länge $l_{nk}-l_{n,k+1}$, und man hat also

$$(5)\quad \begin{cases} F(q_n, k) = \dfrac{l_{nk}-l_{n,k+1}}{l_{n1}} = W(q_n, k) - W(q_n, k+1) = \\ \qquad = \dfrac{1+q_n}{(k+q_n)(k+1+q_n)}. \end{cases}$$

Jetzt lassen sich die oben definirten Grössen $D_{n,k}$ und S_n, auf folgende Weise *approximativ* bestimmen. Bei gegebenem q_n-Werth sind die möglichen Werthe von

$$(6)\qquad |\mu - A_n| \cdot s_n(s_n + s_{n-1})$$

gleichmässig im Intervalle $0\ldots 1$ vertheilt. Es ist also »der wahrscheinliche Werth» von (6) [im gewöhnlichen Sinne dieses Ausdruckes] gleich $\frac{1}{2}$. Man hat aber

$$|\mu - A_n| = \frac{1}{s_n s_{n+1}} - \frac{1}{s_{n+1}s_{n+2}} + \frac{1}{s_{n+2}s_{n+3}} - \ldots$$
$$= \frac{1}{s_n s_{n+1}}\left\{1 - q_{n+1}q_{n+2} + q_{n+1}q_{n+2}^2 q_{n+3} - q_{n+1}q_{n+2}^2 q_{n+3}^2 q_{n+4} + \ldots\right\}.$$

Es ist somit, bei gegebenem q_n, der wahrscheinliche Werth von

$$(7)\qquad (1+q_n)\cdot\left\{q_{n+1} - q_{n+1}^2 q_{n+2} + q_{n+1}^2 q_{n+2}^2 q_{n+3} - \ldots\right\}$$

gleich $\frac{1}{2}$. Der wahrscheinliche Werth, bei gegebenem n-Werth, des wahrscheinlichen Werthes von (7) bei gegebenem q_n ist fer-

voraussetzt, dass nicht nur a_{m+1} den in Frage stehenden Minimalwerth hat, sondern auch dass die Grösse ϑ_m, welche sowohl von a_{m+1} als auch von a_{m+2}, a_{m+3} etc. abhängt, gleich 1 ist. Dass es sich so verhält, folgt leicht aus dem Zusammenhange. Die Wahrscheinlichkeit, dass a_{m+1} nicht kleiner als eine gewisse (mit a_{m+1} bezeichnete) Grenze ist, hat den Werth $1:\nu$, wenn $1:\nu$ den grössten Werth von

$$\frac{\vartheta_m(s_m + s_{m-1})}{a_{m+1}s_m + s_{m-1}}$$

bedeutet, welcher überhaupt möglich ist, wenn a_{m+1} jener Grenze nicht untersteigt. Diesen Maximum-Werth erhält man aber, wenn man a_{m+1} eben den genannten Minimum-Werth ertheilt, während ϑ_m d. h. $s_m s_{m+1}\cdot|\mu - A_m|$ seinen für alle a_{m+1} erreichbaren Maximum-Werth 1 hat, was $a_{m+2}=\infty$ voraussetzt. Ueber die Einwirkung dieses Versehens auf G:s nachfolgende Untersuchung, s. unten.

ner, wie man ohne weiteres einsieht, einfach gleich dem wahrscheinlichen Werthe von (7) bei gegebenem n. Dieser wahrscheinliche Werth ist *nicht* gleich dem Producte der wahrscheinlichen Werthe der 2 in (7) eingehenden Factoren. Denn die Factoren sind nicht von einander unabhängig:[1]) die Festsetzung eines bestimmten Werthes von q_n beeinflusst die Wahrscheinlichkeits-Verhältnisse bei q_{n+1} etc. Und ferner ist der wahrscheinliche Werth des Klammerausdruckes nicht gleich derjenigen Reihe, welche entstehen würde, wenn man statt q_{n+1}, q_{n+2} etc. die entsprechenden wahrscheinlichen Werthe einführte, denn man ist freilich dazu berechtigt, die wahrscheinlichen Werthe der einzelnen Glieder einfach zu summiren; aber diese Werthe sind nicht gleich dem Producte der wahrscheinlichen Werthe der eingehenden Factoren, da die verschiedenen Grössen $q_{n+\varrho}$ im gleich oben genannten Sinne nicht von einander unabhängig sind, und dies noch weniger hinsichtlich der vorkommenden *gleichen* Factoren gilt (der wahrscheinliche Werth von q^2_{n+1} ist nicht gleich dem Quadrate des wahrscheinlichen Werthes von q_{n+1} etc). Die Abhängigkeit der verschiedenen $q_{n+\varrho}$ von einander dürfte jedoch, wenigstens für hinreichend grosse n, keine grössere Rolle spielen (wie aus ziemlich einfachen Betrachtungen folgt, welche wir hier nicht ausführen). Dagegen ist es sehr denkbar, dass die wahrscheinlichen Werthe der Quadrate $q^2_{n+\varrho}$ nicht unbeträchtlich von den Quadraten der wahrscheinlichen Werthe der Grössen $q_{n+\varrho}$ abweichen. Da man aber annehmen kann, dass die Abweichungen immer in derselben Richtung gehen, und da andererseits die Glieder der in Frage stehenden Reihe abwechselnde Vorzeichen haben, so ist es auch sehr möglich, dass die von den quadratischen Factoren herrührende Ungenauigkeit im Ganzen ziemlich klein wird. Hypothetisch kann man immer annehmen, dass die obengenannten Substitutionen einen approximativ richtigen Werth giebt, wenigstens für hinreichend grosse n-Werthe.

---

[1]) Man sehe z. B. BERTRAND, Calcul des Probabilités, Paris 1889, p. 61, 62.

Die exacte Bestimmung der wahrscheinlichen Werthe der Grössen $q_{n+\varrho}$ wäre sehr compliziert. Es lässt sich aber zeigen (obgleich wir den Beweis hier nicht ausführen), dass der wahrscheinliche Werth von q_i bei unbegrenzt wachsendem i sich einer bestimmten Grenze q nähert. Für einigermassen grosse i-Werthe kann man q als Approximation für den genannten Werth benutzen. Die Bestimmung von q gestaltet sich, wenn man die gleich oben besprochenen Substitutionen in (7) zulässt, auf folgende Weise. Der wahrscheinliche Werth von $q_{n+\varrho}$ ist gleich $q + \delta_{n+\varrho}$, wo, unabhängig von n, $\lim_{\varrho=\infty} \delta_{n+\varrho} = 0$ ist, und für hinreichend grosse n-Werthe $|\delta_{n+\varrho}|$ unabhängig von ϱ beliebig klein wird. Wenn man also den Ausdruck (7), nach Einführung der wahrscheinlichen Werthe von q_n, q_{n+1} etc., gleich $\frac{1}{2}$ setzt, so geht eine Gleichung

$$(1 - q^2 + q^4 - q^6 + \ldots) + \Delta_n = \frac{1}{2(q + \delta_{n+1})(1 + q + \delta_n)}$$

hervor, wo zufolge der Natur der Reihe $1 - q_{n+1}q_{n+2} + \ldots$ die Grösse Δ_n für $n = \infty$ verschwindet. Da dasselbe für δ_n und δ_{n+1} gilt, erhält man

$$2q(1 + q) = 1 + q^2,$$

d. h.

$$q = \sqrt{2} - 1.\text{[1]} \tag{8}$$

Auch als Grenzwerth betrachtet ist dieser Werth mit Unsicherheit behaftet, und kann nur als eine erste Approximation angesehen werden.

Zwischen den oben mit $S_{n,k}$ und $W(q_n, k)$ bezeichneten Grössen, besteht die Relation, dass $S_{n,k}$ der »wahrscheinliche Werth» von $W(q_n, k)$ ist (bei gegebenem n). Es ist also S_{nk} (sehe oben) gleich dem wahrscheinlichen Werthe von

$$\frac{1 + q_n}{k + q_n}$$

[1]) GYLDÉN erhält, l. c. p. 80, im wesentlichen auf demselben Wege ganz denselben Werth für seine Grösse σ (welche nicht ausdrücklich als Grenzwerth bezeichnet wird).

d. h. von

$$\text{(8 a)} \qquad \frac{1+q_n}{k}\left\{1-\frac{q_n}{k}+\left(\frac{q_n}{k}\right)^2-\left(\frac{q_n}{k}\right)^3+\ldots\right\}.$$

Die Einführung, in diesen Ausdruck, des wahrscheinlichen Werthes von q_n, würde einen mehr oder weniger approximativen Werth von $S_{n,k}$ geben (vgl. oben). Wenn man überdies für diesen wahrscheinlichen Werth den Grenzwerth q benutzt, so geht hervor:

$$\text{(9)} \qquad \lim_{n=\infty} S_{n,k} = S_k = \frac{1+q}{k+q} = \frac{\sqrt{2}}{k-1+\sqrt{2}} = \frac{1,4142}{k+0,4142}.$$ [1])

Aus mehreren, oben angegebenen Gründen ist aber dieser Werth unsicher. Zu bemerken ist jedoch, dass die Einführung in (8 a) des wahrscheinlichen Werthes von q_n bei hinreichend grossen k nur einen beliebig kleinen Fehler mitführen kann. Der mögliche Fehler hat dann in den oben, bei der Bestimmung von q, besprochenen Umständen seinen Hauptgrund. Und jedenfalls ist bei hinreichend grossen k-Werthen S_{nk} nahezu gegen k umgekehrt proportional. [2])

Mit $S_{n,k}$ hängt $D_{n,k}$ (wie unmittelbar aus der Definition der beiden Grössen folgt; vgl. auch (5)) folgendermassen zusammen:

$$D_{nk} = S_{nk} - S_{n,k+1},$$

$$\lim_{n=\infty} D_{nk} = D_k = S_k - S_{k+1}.$$

Die folgende Tabelle zeigt für einige k-Werthe die nach den angegebenen Formeln berechneten Werthe von S_k und D_k.

(A)

k	S_k	D_k	k	S_k	D_k
1	1	0,414	8	0,168	0,018
2	0,586	0,172	9	0,150	0,014
3	0,414	0,094	10	0,136	0,012
4	0,320	0,059	15	0,092	0,006
5	0,261	0,041	20	0,069	0,003
6	0,220	0,029	50	0,0281	0,0004
7	0,191	0,023	100	0,0141	0,0001

[1]) Bei GYLDÉN steht (p. 81) im Zähler 1,2027, zufolge eines oben erwähnten Versehens.

[2]) GYLDÉN p. 82.

Um die Genauigkeit einigermassen abzuschätzen, welche erreicht wird, wenn man die wirklichen Werthe von $S_{n,k}$ und $D_{n,k}$ durch die in der obigen Weise berechneten S_k und D_k ersetzt, kann man sich davon benutzen, dass $S_{0,k}$ und $S_{1,k}$ (und also auch $D_{0,k}$ und $D_{1,k}$) sich ohne allzu grosser Umständlichkeit mit beliebigem Approximationsgrade berechnen lassen. Es ist in der That (wie man ohne weiteres finden kann)

$$(10) \qquad \begin{cases} S_{0,k} = \dfrac{1}{k} \\ S_{1,k} = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \left\{ \dfrac{1}{i} - \dfrac{1}{i + \frac{1}{k}} \right\} = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{1}{i(ki+1)} . \end{cases}$$

Diese $S_{1,k}$-Reihe lässt sich in eine schneller convergierende Reihe nach negativen Potenzen von k umformen, deren erste Glieder (mit abgekürzten Werthen der irrationalen Constanten)

$$\frac{1{,}644934}{k} - \frac{1{,}202046}{k^2} + \frac{1{,}08232}{k^3} - \frac{1{,}03693}{k^4} + \frac{1{,}0171}{k^5} - \dots$$

sind (man sehe unten, die Note). Für die kleinsten k-Werthe ist auch diese Entwickelung nicht besonders bequem. Man kann aber dann mit Vortheil folgende Ausdrücke benutzen, den ersten bei ungeraden, den zweiten bei geraden k-Werthen:

$$S_{1,k} = 1 + \sum_{n=1}^{\frac{1}{2}(k-1)} \left\{ 2 - 2\sin^2 \frac{n\pi}{k} \cdot \log\left(4 \sin^2 \frac{n\pi}{k}\right) - \right.$$
$$\left. - \pi \left(1 - \frac{2n}{k}\right) \mathrm{s\,n}\, \frac{2n\pi}{k} \right\},$$

$$S_{1,k} = 1 - 2\log 2 + \sum_{n=1}^{\frac{1}{2}(k-2)} \left\{ 2 - 2\sin^2 \frac{n\pi}{k} \log\left(4 \sin^2 \frac{n\pi}{k}\right) - \right.$$
$$\left. - \pi \left(1 - \frac{2n}{k}\right) \sin \frac{2n\pi}{k} \right\}.$$

Dieselben gelten immer völlig exact (sehe die Note), werden aber etwa von $k = 7$ an ziemlich unbequem.

Folgende numerische Werthe gehen jetzt hervor:

(*B*)

k	$S_{0,k}$	$D_{0,k}$	$S_{1,k}$	$D_{1,k}$
1	1	0,5000	1	0.3863
2	0,5000	0,1667	0,6187	0,1685
3	0,3333	0,0833	0,4452	0,0954
4	0,2500	0,0500	0,3498	0,0616
5	0,2000	0,0333	0,2882	0,0431
6	0,1667	0,0238	0,2451	0,0319
7	0,1429	0,0179	0,2132	0,0245
8	0,1250	0,0139	0,1887	0,0194
9	0,1111	0,0111	0,1693	0,0158
10	0,1000	0,0091	0,1535	0,0131
15	0,0667	0,0042	0,1046	0,0063
20	0,0500	0,0024	0,0794	0,0037
50	0,02000	0,00039	0,03242	0.00063
100	0,01000	0,00010	0,01632	0,00015

Die Werthe von $S_{0,k}$ sind durchgehends kleiner, die Werthe von $S_{1,k}$ grösser als die S_k-Werthe der Tabelle (*A*), und zugleich $S_{1,k} - S_k$ beträchtlich kleiner als $S_k - S_{0,k}$. Möglicherweise oscillirt $S_{n,k}$ bei wachsendem n unaufhörlich um den wirklichen Grenzwerth S_k (für den die genannte Tabelle nur approximative Werthe geben sollte). Die Variation von $D_{n,k}$ scheint weniger einfachen Gesetzen zu folgen.

4. Auch für $\delta_{n,k}$ und $\sigma_{n,k}$ kann man (bei hinreichend grossen n-Werthen) D_k bez. S_k als approximative Werthe benutzen. Es ist mit anderen Worten

$$nD_k \text{ bez. } nS_k$$

approximativ die »*wahrscheinliche Anzahl*» derjenigen a_i im n-gliedrigen Systeme $a_1, a_2 \ldots a_n$, welche $= k$ bez. $\geqq k$ sind. Wenn man für D_k die (approximativen) Werthe der Tabelle (*A*) benutzt, so gehen, mit $n = 100$, folgende numerische Werthe hervor:

(*C*)

$k(\alpha)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	50	100
$100D_k$	41,4	17,2	9,4	5,9	4,1	2,9	2,3	1,8	1,4	1,2	0,6	0,3	0,04	0,01
$100h_\alpha : H$	40,3	19,3	10,0	4,8	4,1	2,9	2,2	1,7	1,4	1,1				

Die unteren Zahlen rühren von GYLDÉN her: unsere Grösse $\delta_{n,k}$ wird von ihm mit $k_\alpha : H$ bezeichnet, und er berechnet (l. c. p. 350—52) für $\alpha = 1, 2 \ldots 11$ die Grössen $\beta_\alpha = h_\alpha : (1 + \sqrt{2})H$; aus diesen β_α gehen die obigen Werthe von $100 h_\alpha : H$ hervor. Die Abweichungen der Gyldén'schen Zahlen von den unsrigen beruhen auf folgenden Umständen. Erstens setzt G. (mit unseren Bezeichnungen ausgedrückt)

$$\sigma_{n,k} = \frac{(1 + q)\vartheta}{k + q},$$

wo $\vartheta = 0{,}85380$ (sehe oben p. 246), während bei uns $\vartheta = 1$ ist. Zweitens setzt er (aus welchem Grunde?)

$$\sigma_{n,k} = \tfrac{1}{2}\,\delta_{n,k} + \delta_{n,k+1} + \delta_{n,k+2} + \ldots$$

(l. c. p. 350), anstatt $\sigma_{n,k} = \delta_{n,k} + \delta_{n,k+1} + \ldots.$ Diese beiden Verschiedenheiten sind geeignet, einander gewissermassen zu compensiren — die Abweichungen würden sonst bedeutend grösser sein. In Betracht der obengenannten Unsicherheit der ganzen Berechnung, ist es nicht ganz ausgeschlossen, dass GYLDÉN's Zahlen (oder gewisse unter ihnen) zufälliger Weise richtiger sein können, als die unsrigen (vgl. unten, Art. 7); aber *a priori* hat man — so viel ich sehen kann — gar keinen Grund dies anzunehmen.

5. Mit den Grössen $\delta_{n,k}$ hängt folgender Begriff nahe zusammen: der wahrscheinliche Werth A_n einer im Systeme $a_1, a_2 \ldots a_n$ willkührlich gewählten Zahl a_i. Es ist einfach

$$A_n = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \delta_{n,k}.$$

Wenn man $\delta_{n,k}$ durch D_k ersetzt, und für D_k den Werth $F(q, k)$ benutzt, so geht hervor

$$A_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot \frac{1+q}{\left(1 + \frac{q}{k}\right)\left(1 + \frac{1+q}{k}\right)},$$

also, unabhängig von n,

$$A_n = \infty.$$

Die Richtigkeit dieses Ergebnisses ist nicht zu bezweifeln, obgleich die angewandten Ausdrücke nicht exacte Gültigkeit haben. Schon für $n = 1$ wird mit aller Sicherheit $A_n = \infty$; es ist nämlich (sehe oben) exact $\delta_{1,k} = 1 : k(k+1)$. Offenbar gilt übrigens ganz dasselbe, wenn man A_n einfach als den wahrscheinlichen Werth von a_n auffasst.

Hier kann folgendes bemerkt werden. Aus der zweiten der Gleichungen (2) folgt

$$(11) \qquad a_{n+1} = \frac{1}{q_{n+1}} - q_n .$$

Wenn man hier $q_n = q_{n+1} = q$ setzt, so geht hervor:

$$a_{n+1} = 2 .$$

Der wahrscheinliche Werth von a_{n+1} ist aber, wie wir sahen, unendlich gross. Es war auch durchaus nicht zu erwarten, dass die Einführung von q statt q_n und q_{n+1} in (11) den wahrscheinlichen Werth von a_{n+1} geben sollte, da der wahrscheinliche Werth von $1 : x$ im allgemeinen etwas ganz anderes ist als der inverse Werth des wahrscheinlichen Werthes von x.

Gyldén zieht auch eine mit A_n verwandte Grösse in Betracht, indem er von denjenigen a_i absieht, für welche, mit unseren Bezeichnungen, $\sigma_{n,k} < 1 : n$ ist, wenn $k = a_i$ (l. c. p. 356). Für den wahrscheinlichen Werth $\bar{A}_n$, welcher dieser Betrachtungsweise entspricht, leitet G. einen analytischen Ausdruck her (p. 357); hierbei ist jedoch, soviel ich sehen kann, ein Rechenfehler begangen, indem (p. 356) $h_\omega + 2h_{\omega+1} + \ldots = 1$ statt $= 2$ steht; wenn man dies berichtigt (aber im Übrigen G:s Behandlungsweise folgt), so geht hervor:

$$\bar{A}_n = 1{,}207 \cdot \log\frac{n}{2} + 0{,}58$$

(G. hat n statt $n:2$). Aus unserer obigen Behandlungsweise lässt sich dagegen nach ähnlicher Methode herleiten:

$$\bar{A}_n = 1{,}414 \cdot \log\frac{n}{2} + 0{,}19 .$$

[1]) Vgl. Gyldén, l. c. p. 80, 356, 358.

6. Von $\delta_{n,k}$ ist $\varepsilon_{n,k}$ wohl zu trennen. Für die Wahrscheinlichkeit $1-\varepsilon_{n,k}$, dass k *nicht* in der Zahlenfolge $a_1 \ldots a_n$ vorkommt, würde der Ausdruck

$$(12) \qquad \prod_{i=0}^{n-1} (1 - D_{i,k})$$

gelten, *wenn* die Möglichkeiten hinsichtlich der einzelnen Zahlen a_i von einander unabhängig wären, was ja nicht der Fall ist (es ist etwa bei gegebenem a_i die Wahrscheinlichkeit für $a_{i+1} \gtrless k$ nicht gleich $D_{i,k}$ sondern hängt von a_i ab). Offenbar ist aus diesem Grunde das Product (12) grösser als $1-\varepsilon_{n,k}$, also

$$(13) \qquad \varepsilon_{n,k} > 1 - \prod_{i=0}^{n-1} (1 - D_{i,k}) .$$

Aus ziemlich leicht ersichtlichem Grunde kann die Differenz der beiden Grössen, besonders bei einigermassen grossen n-Werthen nicht sehr bedeutend sein. Die folgende Tabelle enthält approximative Werthe für das zweite Glied in (13), welche so berechnet sind, dass für $i \geqq 2$ alle $D_{i,k}$ durch D_k ersetzt sind (diejenigen Werthe, welche $> 0{,}99$ ausfallen, sind nicht mitgenommen):

(D)

$k =$	1	2	5	20	50	100
$n=1$	0,50	0,17	0,03	0,004	0,0004	0,0001
2	0,69	0,31	0,08	0,006	0,0008	0,0003
5	0,94	0,61	0,18	0,014	0,0015	0,0006
10	0,96	0,85	0,34	0,030	0,004	0,0011
50	—	—	0,88	0,14	0,020	0,0050
100	—	—	0,98	0,26	0,040	0,010
200	—	—	—	0,45	0,078	0,020
1000	—	—	—	0,95	0,33	0,095

Für die Grösse $\varrho_{n,k}$ leitet man in analoger Weise

$$(14) \qquad \varrho_{n,k} > 1 - \prod_{i=0}^{n-1} (1 - S_{i,k})$$

her, aber die Differenzen der beiden Glieder dürften in diesem Falle beträchtlich grösser als im vorigen Falle sein. Indessen theilen wir auch für das rechte Glied in (14) einige approx. num. Werthe mit:

(*E*)

$k=$	1	2	5	20	50	100
$n=1$	1	0,50	0,20	0,05	0,02	0,01
2	1	0,81	0,43	0,13	0,05	0,03
5	1	0,99	0,77	0,29	0,13	0,07
10	1	—	0,94	0,51	0,25	0,13
50	1	—	—	0,97	0,76	0,51
100	1	—	—	—	0,94	0,76
200	1	—	—	—	—	0,94

Unabhängig von k sind die Grenzwerthe, für $n=\infty$, von $D_{n,k}$ und $S_{n,k}$ von Null verschieden. Nach (13) und (14) wird also, unabhängig von k,

$$\lim_{n=\infty} \varepsilon_{n,k} = 1\,;\ \lim_{n=\infty} \varrho_{n,k} = 1\,.$$

Dies bedeutet: die Wahrscheinlichkeit, dass es in der unendlichen Reihe $a_1 \ldots a_n \ldots$ überhaupt ein a_n giebt, welches $=k$ bez. $\geqq k$, ist gleich 1. Dass hierbei die günstigen Stellen überalldichte Mengen bilden, ist unmittelbar ersichtlich. Das soeben erhaltene Resultat bedeutet aber, dass die ungünstigen Stellen eine Menge vom *Inhalt Null* bilden. Die Wahrscheinlichkeit ist dann gleich 1, unabhängig davon, ob man die eine oder die andere der in Art. 2 angegebenen Grundvoraussetzungen benützt (sehe Art. 2, die Fälle 1 und 1 *a*)).

Ganz anders gestaltet sich die Sache, wenn man nach der Wahrscheinlichkeit fragt, dass a_n überhaupt unterhalb einer endlichen Grenze bleibt. Dann sind nicht nur die günstigen, sondern auch die ungünstigen Stellen überall condensirt, und man hat also mit dem Falle 3) oder 3 *a*) in Art. 2 zu thun. Eine überall condensirte, abzählbare Theilmenge mit der genannten Eigenschaft ist z. B. die Gesammtheit aller zwischen 0 und 1 fallenden irrationalen Quadratwurzeln aus rationalen Zahlen, wie unmittelbar daraus folgt, dass die Kettenbruchentwickelung einer solchen Zahl immer periodisch ist.

7. Die oben gegebenen Formeln bez. numerische Werthe für q, $D_{n,k}$, $S_{n,k}$, D_k, S_k, $\delta_{n,k}$, $\sigma_{n,k}$, $\varepsilon_{n,k}$, $\varrho_{n,k}$ sind, wie oben

mehrmals hervorgehoben wurde, in erster Hand als Approximationen mit unbekanntem Grade von Genauigkeit zu betrachten (nur mit Ausnahme für die Werthe von $D_{0,k}$ und $D_{1,k}$, $S_{0,k}$ und $S_{1,k}$). Um die Genauigkeit zu prüfen, kann man das Mittel zugreifen, directe Versuche anzustellen. Man hat hierbei eine bestimmte *abzählbare*, im Intervalle $0 \ldots 1$ überall condensirte Menge M von Irrationalzahlen zu wählen und dieselbe der Forderung constanter Dichtigkeit gemäss in endliche Mengen aufzulösen:

$$M = M_1 + M_2 + \ldots + M_i + \ldots .$$

Für einen nicht allzu kleinen i-Werth hat man nachher aus der Zahlenmenge $P_i = M_1 + M_2 + \ldots M_i$ willkührliche Zahlen herauszunehmen, die Kettenbruchentwickelungen dieser Zahlen bis zu einer gewissen Grenze herzustellen und diese Entwickelungen in den fraglichen Beziehungen zu untersuchen. Es ist aber eine wichtige Bemerkung, dass man (wenigstens unter Voraussetzung gewisser Vorsichtsmassregeln), wie leicht ersichtlich, eben so gut eine Menge M von *rationalen* Zahlen benutzen kann, was einfacher wird; es kann z. B. die Menge P_i aus allen abgeschlossenen Decimalbrüchen mit i Decimalstellen bestehen. Auch bei Benutzung einer irrationalen Menge kann man sich freilich so einrichten, dass die Sache nicht allzu compliziert wird; ein solches Verfahren ist doch eigentlich ganz zwecklos, da die nur bis zu einer gewissen Grenze fortgeführte Kettenbruchentwickelung einer Irrationalzahl eben eine rationale Zahl darstellt. Bei rationalen Mengen M hat man nur darauf zu achten, dass höchstens für eine bedeutungslos kleine Menge von M-Stellen die Kettenbruchentwickelung früher als bei der festgesetzten Grenze abbricht.

Gyldén hat einige derartige Versuche vorgenommen. Unter 335 beobachteten a_i-Werthen waren, nach seiner Tabelle l. c. p. 354, 131 gleich 1, 71 gleich 2, 35 gleich 3, 15 gleich 4, 14 gleich 5, und 31 gleich 6, 7, 8, 9 oder 10. Wenn man auf Procentzahlen reducirt, gehen folgende Werthe hervor: 39,1; 21,2; 10,4; 4,5; 4,2; 9,3. Diese Zahlen stimmen ein wenig

besser mit GYLDÉN's eigenen theoretischen Werthen, als mit den unsrigen, überein (sehe die obige Tabelle C). Es kann dies auf einem Zufall bei den Versuchen beruhen (die Anzahl der Beobachtungen ist ja nicht besonders gross); aber es ist auch denkbar, dass GYLDÉN's Berechnungen zufälligerweise richtigere Werthe gegeben haben (vergl. oben Art. 4). G. hat auch gewisse andere Versuche angestellt, deren Resultate eben so gut mit unseren Berechnungen, als mit G:s eigenen, übereinstimmen (l. c. p. 82, 83, 357). — Im Ganzen wird durch die genannten Versuche bestätigt, dass die oben hergeleiteten numerischen Werthe (und GYLDÉN's eigene von denselben nicht bedeutend verschiedene Zahlen) ziemlich nahe den richtigen kommen.

8. Unter den in der Störungstheorie vorkommenden Reihen, welche GYLDÉN l. c. betrachtet, findet sich eine (p. 86), welche nach Weglassen der trigonometrischen Factoren folgende Form erhält:

$$\sum_{n=1}^{\infty} s_n^2 a_{n+1}^2 \varepsilon^{s_n} \tag{15}$$

wo $0 < \varepsilon < 1$ ist, a_n und s_n in der obigen Weise zur Kettenbruchentwickelung einer Zahl $\mu < 1$ gehören.

Wenn wir uns, bei der Untersuchung dieser Reihe, zunächst auf rein »theoretischen» Standpunkt stellen, d. h. die Reihe als wirklich unendlich betrachten und die Begriffe Convergenz-Divergenz in dem gewöhnlichen »mathematischen» Sinne auffassen, so ist über die Wahrscheinlichkeit von Convergenz oder Divergenz folgendes zu sagen. Die Reihe ist eine Dignitätsreihe in ε. Die gewöhnliche, allbekannte Bestimmung des Convergenzradius ist nicht anwendbar, da die vorkommenden Exponenten nicht die ganze Zahlenreihe 1, 2, ... repräsentiren, sondern nur eine in complizierter Weise gebildete Theilmenge. Nach einem schon von CAUCHY [1]) angegebenen Satze (welcher vielleicht weniger be-

[1]) Cours d'analyse de l'Ecole R. Polytechnique. I Partie (Paris 1821), p. 286. Sehe auch HADAMARD, Essai sur l'étude des fonctions données par leurs développement de Taylor. Journ. de Math. (4) VIII (1892), p. 101 ff.

kannt ist) gilt es aber, dass die Reihe convergirt, sobald die obere Unbestimmtheitsgrenze G von

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[s_n]{s_n^2 a_{n+1}^2}$$

kleiner als $1 : \varepsilon$ ist; für $G > 1 : \varepsilon$ findet dagegen immer Divergenz statt; nur der Fall $G = 1 : \varepsilon$ lässt die Sache unentschieden. Da $\lim \left(s_n^2\right)^{\frac{1}{s_n}} = 1$ ist, wird einfach

$$G = \text{obere Unbest.-Grenze für } \lim \{a_{n+1}\}^{\frac{2}{s_n}}.$$

Man ersieht sofort, dass in jeder Theilstrecke des Intervalles $0 \ldots 1$ Stellen μ liegen, bei denen die Kettenbruchentwickelung so beschaffen ist, dass für alle n oberhalb einer gewissen Grenze

$$\{a_{n+1}\}^{\frac{2}{s_n}} < \frac{1}{\varepsilon} - \delta$$

($\delta < 1 : \varepsilon$, sonst beliebig) ist, und ebenso in jeder Theilstrecke solche μ, dass es oberhalb jeder Grenze n-Werthe giebt, für welche

$$\{a_{n+1}\}^{\frac{2}{s_n}} > \frac{1}{\varepsilon} + \delta$$

(δ beliebig, > 0). Sowohl die günstigen als auch die ungünstigen Stellen sind also überall condensirt, und folglich die genannte Wahrscheinlichkeitsfrage völlig *sinnlos* (sehe oben), wenigstens solange man nicht die Variation von μ auf eine bestimmte Theilmenge von Irrationalzahlen beschränkt hat. — Als Function von μ hat die Reihe (15), nach dem Gesagten, eine überall dichte Menge von ∞-Stellen. Es liegt eine Art von »Singularitäten-Condensation» vor, so beschaffen, dass die entstehende Function »total unstetig» wird. Ähnliches ist ja bei störungstheoretischen Reihen schon vorher nachgewiesen worden.[1] Es lässt sich in derartigen Fällen zeigen, dass sowohl die ∞-Stellen, als auch die Stellen mit endlichen Functionenwerthen nicht nur überall dichte sondern auch »nicht-abzählbare» Mengen bilden;

[1] Man sehe namentlich H. BRUNS, Bemerkungen zur Theorie der allgemeinen Störungen. Astron. Nachrichten Bd. 109 (1884) No. 2606, p. 215 ff.

vergl. einen vom Verf. dargestellten Beweis für dasselbe Verhältniss bei gewissen durch ein anderes Condensationsverfahren erhaltenen Reihen, welche die Derivirte von einer eigenthümlichen Art stetiger Functionen darstellen. [1])

In ganz anderer Weise kann sich die Sache gestalten, wenn man nach der Wahrscheinlichkeit fragt, dass die Reihe nicht nur convergirt, sondern auch *von einem gewissen Gliede an sich in irgend einer vorgeschriebenen Weise verhält* (z. B. vom Anfang an stärker als eine gegebene geometrische Reihe convergirt).

Derartige Fragen stehen in nahem Zusammenhange mit derjenigen, wie die Wahrscheinlichkeitsverhältnisse sich gestalten, wenn es nur erwünscht wird, dass die Reihe »*halbconvergent*» [2]) oder »*practisch convergent*» sein soll. Um einen Ausgangspunkt für die Beurtheilung dieser Frage zu gewinnen, setzen wir zunächst nur voraus, dass die Glieder vom ersten bis zum n-ten unaufhörlich abnehmen. Es soll also erstens $u_2 < u_1$ sein (wenn die Glieder mit u_i bezeichnet werden). Dies giebt, wenn man die Relationen $s_1 = a_1$, $s_2 = 1 + a_1 a_2$ benutzt und

$$\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} = p$$

setzt, die Ungleichheit

$$a_3 < \frac{a_1 a_2}{1 + a_1 a_2} \cdot p^{a_1 a_2 - a_1 + 1}, \tag{16}$$

welche, da a_3 ganz ist, mit dieser gleichbedeutend ist:

$$a_3 < h(a_1, a_2),$$

wo $h(a_1, a_2)$ die ganze Zahl bedeutet, welche nächst grösser als das rechte Glied ist (oder diese Grösse selbst, falls sie ganz ist). Hiernach wird die Wahrscheinlichkeit w_2, dass $u_2 < u_1$ ist,

$$w_2 = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)(ki+1)^2 (ki+i+1)[(ki+1) \cdot h(i, k) + i]}.$$

[1]) Ueber das Weierstrass-Cantor'sche Condensationsverfahren, Öfversigt af K. Vet.-Akad. Förhandlingar, Stockholm 1896, p. 583 ff.

[2]) Das Wort »halbconvergent» wird bisweilen statt »bedingt convergent» benutzt; natürlich handelt es sich hier um die andere, schon von LEGENDRE angegebene Bedeutung.

Denn die Wahrscheinlichkeit, dass $a_1 = i$ und $a_2 = k$ ist, wird (wie leicht ersichtlich, vgl. die Ausdrücke für $S_{0,1}$ und $S_{0,2}$ p. 251) gleich dem inversen Werthe von

$$i(i+1)(ki+1)(ki+i+1);$$

und bei der Voraussetzung dieser (a_1, a_2)-Werthe ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Ungleichheit (16) *nicht* besteht, gleich

$$\cfrac{1}{i+\cfrac{1}{k+\cfrac{1}{h(i,k)}}} - \cfrac{1}{i+\cfrac{1}{k}} = \frac{1}{(ki+1)[(ki+1)\cdot h(i,k)+i]}.$$

Mit Sicherheit ist also immer

$$w_2 < 1 - \frac{1}{24(p+1)},$$

wo im Summenausdrucke nur die Combination $i = k = 1$ berücksichtigt ist. Die Wahrscheinlichkeit w_3 für das Bestehen der beiden Ungleichheiten $u_1 < u_2 < u_3$ ist selbstverständlich kleiner als w_2, u. s. w.: $w_2 < w_3 < w_4 < \ldots w_n$. Je länger die Reihe eine fallende bleiben soll, desto kleiner wird die zugehörige Wahrscheinlichkeit (obgleich diese bei wachsendem n sich sehr langsam vermindern kann). Wenn man ferner verlangt, dass die Reihe nicht nur fallen, sondern auch mit einem bestimmten (etwa für practische Zwecke nothwendigen) Grade von Schnelligkeit fallen soll, so werden die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten natürlich kleiner als die vorher betrachteten; namentlich kann man die Ungleichheiten $u_{i+1} < u_i$ durch $u_{i+1} < \theta u_i$, wo θ eine für $i \leqq n$ von i unabhängigen Grösse zwischen 0 und 1 bedeutet. Andererseits kann man die Sache so modificiren, dass die Reihe nicht vom Anfang an, sondern von einem gewissen Gliede $u_{\varrho+1}$ an bis zum Gliede $u_{\varrho+n}$ fallen soll (etwa nach einem vorgeschriebenen Gesetze), während das Verhalten der vorangehenden Glieder unberücksichtigt bleibt. Aus leicht ersichtlichen Gründen kann man annehmen, dass die Wahrscheinlichkeit $w_{\varrho,n}$ hierfür, unter sonst gleichen Umständen, grösser als w_n $(= w_{0,n})$ ist: Bei constantem n nimmt $w_{\varrho,n}$ mit ϱ zu, während bei festem

ϱ die Vergrösserung von n eine Verminderung von $w_{\varrho, n}$ bewirkt. Bei gegebenem n kann man natürlich auch ϱ gewissermassen unbestimmt lassen (obgleich eine nicht allzu grosse obere Grenze festgestellt werden muss, wenn es sich um practische Anwendbarkeit der Reihe handelt).

Hier entsteht jetzt eine eigenthümliche Frage, welche uns wieder in das Gebiet der »theoretischen Convergenz» versetzt. Es habe ϱ einen bestimmten Werth, und man vermehre n *in infinitum*. Wie verhält sich dann

$$\lim_{n=\infty} w_{\varrho, n}$$

namentlich unter der Voraussetzung, dass für alle n

$$u_{\varrho+n+1} < \theta \cdot u_{\varrho+n}$$

ist (θ eine bestimmte Zahl zwischen 0 und 1)? Und wie gross ist also die Wahrscheinlichkeit, dass die Reihe (15) vom Gliede $u_{\varrho+1}$ an schneller als eine geometrische Reihe mit dem Quotienten θ convergirt? *A priori* liegen zwei Möglichkeiten vor. Jede Wahrscheinlichkeit $w_{\varrho, n}$ ist gleich dem Verhältnisse zwischen der Gesammtlänge günstiger Strecken und der Länge 1 des ganzen μ-Gebietes $0 \ldots 1$. Beim Uebergange zu $w_{\varrho, n+1}$ werden die ungünstigen Strecken als solche beibehalten, aber zugleich neue ungünstige Strecken aus den im vorangehenden Falle günstigen herausgeschnitten. Und der Natur der Sache nach gilt es, wie man sehr leicht findet, dass jedes beliebige Intervall für hinreichend grosse n ungünstige Theilstrecken enthält. Im Grenzfalle $n = \infty$ können somit die günstigen Stellen (die Convergenzstellen der fraglichen Art) in keinem Intervalle condensirt sein. Nichts destoweniger ist es *a priori* denkbar, dass die Menge dieser Convergenzstellen einen *von Null verschiedenen »Inhalt»* hat (sehe Art. 2). Hinsichtlich den Werth, welche die Wahrscheinlichkeit unter dieser Voraussetzung annehmen würde, weisen wir auf Art. 2 hin. Andererseits ist es auch denkbar, dass die günstigen Stellen eine Menge vom *Inhalt Null* bilden; dann wird die Wahrscheinlichkeit gleich Null (Art. 2), ganz unabhängig

davon, ob man von der einen oder von der anderen der in Art. 2 genannten Hauptvoraussetzungen ausgeht. — Inwieweit der eine oder der andere der beiden erwähnten Fälle wirklich eintrifft oder eintreffen kann, will ich hier nicht entscheiden.

Es würde uns jetzt auch zu weit führen, auf die nähere Bestimmung der Wahrscheinlichkeit einer practisch anwendbaren Halbconvergenz einzugehen. Unter Hinweisung auf die obige Darstellung stellen wir nur Folgendes fest. Für die Wahrscheinlichkeit von practischer Anwendbarkeit [1]) der Reihe (15) muss eine obere Grenze angebbar sein, oder was dasselbe ist, eine untere Grenze für die Wahrscheinlichkeit, dass die Reihe unbrauchbar ist. Es ist freilich nicht zu verneinen, dass diese letztgenannte Wahrscheinlichkeit sehr klein sein kann, besonders wenn ε klein ist (vgl. oben). Aber andererseits lässt es sich nicht ohne Weiteres behaupten, dass die Unbrauchbarkeit der Reihe so unwahrscheinlich ist, dass man diese Möglichkeit gar nicht zu berücksichtigen braucht. Und wie man auch die Begriffe Convergenz und Divergenz auffasst, lässt sich schwerlich GYLDÉN's Behauptung festhalten, dass die Wahrscheinlichkeit von Divergenz kleiner ist als jeder beliebige angebbare Werth (l. c. p. 83). Dass jedenfalls der hierfür vorgebrachte Beweis (p. 86, 87) nicht ausreichend ist, lässt sich leicht erkennen. Was wirklich bewiesen wird, ist nur das Folgende. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Reihe (15), als wirklich unendlich gedacht, nicht nur divergirt, sondern auch vom Anfang an dem auf p. 86 angegebenem Gesetze befolgt, hat einen wirklichen Sinn und ist in der That gleich Null; und schon die Wahrscheinlichkeit, dass etwa die 5 ersten Glieder jenem Gesetze folgen ist so ausserordentlich klein, dass dieselbe ganz vernachlässigt werden kann. Dieses Gesetz giebt aber nur einen sehr speciellen Fall von Divergenz (sei es, dass man den Begriff Di-

[1]) Es dürfte überflüssig sein hervorzuheben, dass der Begriff »Anwendbarkeit» hier rein *formal* aufgefasst wird: der Zusammenhang zwischen der Reihe und derjenigen Grösse, für welche man eine Darstellung wünscht, wird ja eine Sache für sich.

vergenz als Gegensatz zur »theoretischen» oder zur »practischen» Convergenz auffasst). Man vergleiche mit der oben bemerkten Thatsache, dass die beständige Abnahme der Glieder vom Anfang an bis zu u_n eine Wahrscheinlichkeit giebt, welche schon für $n = 2$ wenigstens kleiner als

$$1 - \frac{1}{24(p+1)}$$

ist; hiernach wird z. B. für $\varepsilon = \frac{1}{4}$, also $p = 2$, die Wahrscheinlichkeit, dass die n ersten Glieder *nicht* durchgehends fallen, jedenfalls grösser als die verhältnissmässig grosse Zahl $\frac{1}{72}$, und sie wächst unaufhörlich mit n.

Auch bei den anderen von GYLDÉN betrachteten Reihen gilt ähnliches.

Wir fügen die nahezu überflüssige Bemerkung hinzu, dass wenn die Zahl μ auch *rational* sein kann, sich alles ähnlich gestaltet, nur mit dem Unterschiede, dass die wirkliche Fortsetzung der Reihen ins Unendliche bei rat. μ nicht in Frage kommen kann.

Endlich sei noch bemerkt, dass die Ergebnisse der Art. 3—7 nur in sehr beschränktem Masse bei der reihentheoretischen Untersuchung zur Anwendung gekommen sind.

In *astronomischer* Hinsicht hat es bekanntlich ein grosses theoretisches Interesse, dass ähnliche Reihen, wie die oben betrachtete, in jedem μ-Intervalle sowohl Divergenz- als Convergenzstellen haben. Die oben gegebene einfache Herleitung dieser Divergenz bez. Convergenz aus dem CAUCHY'schen Criterium ist vielleicht nicht ganz ohne Interesse. Andererseits konnte es möglicherweise nicht ganz überflüssig sein, die ziemlich selbstklare Thatsache ausdrücklich zu constatiren, dass wenn GYLDÉN's Behauptung, die Wahrscheinlichkeit für Divergenz sei verschwindend klein, wirklich im strengsten Sinne gefasst werden soll, dieselbe kaum mit der Überalldichtheit der Divergenzstellen vereinbar ist (sehe oben). Es kann hinzugefügt werden, dass sowohl Divergenz- als Convergenzstellen »nicht-abzählbare» Mengen bilden (vgl. einen von mir dargestellten Beweisgang, Math. Ann.

Bd. 51, p. 301—303); bei der obigen Auffassung der Wahrscheinlichkeitsverhältnisse hat doch dies keine Bedeutung. — Gewisse vergleichende Bemerkungen hinsichtlich der von POINCARÉ, Méth. nouv. de la méc. cél. T. III p. 151—163, behandelte Wahrscheinlichkeitsfrage lassen wir diesmal bei Seite.

Nähere Untersuchungen über specielle Arten von Convergenz oder Divergenz der fraglichen Reihe (vgl. oben), könnten wohl — astronomisch gesehen — höchstens in practischer Hinsicht einiges Interesse darbieten.

Note. Ueber die Herleitung der in Art. 3 benutzten Ausdrücke für $S_{1,k}$ sei Folgendes angedeutet.

Es ist

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(ki+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^{n+1}}{k^n} \cdot \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^{n+1}} \right\}.$$

Dies ist die angewandte Dignitätsreihe in $1:k$.[1])

Andererseits setze man

$$F(x) = \frac{x}{1\cdot 2} + \frac{x^2}{2\cdot 3} + \frac{x^3}{3\cdot 4} + \dots,$$

also für $|x| \leqq 1$ (x reell oder imag.)

$$F(x) = 1 + \frac{1-x}{x} \log(1-x),$$

wo der Logarithmus seinen »Hauptwerth» hat. Für

$$S_{1,k} = \frac{1}{1(k+1)} + \frac{1}{2(2k+1)} + \frac{1}{3(3k+1)} + \dots$$

wird $S_{1,1} = F(1) = 1$, und bei k-Werthen > 1

$$S_{1,k} = 1 + \sum_{n=1}^{k-1} F\left(e^{\frac{2n\pi}{k} i}\right),$$

1) Die numerische Berechnung der Coëfficienten von $1:k^n$ erfolgt bei ungeraden n nach allbekannten Sätzen. Für die Fälle mit geradem n s. z. B. SCHLÖMILCH, Compendium der höheren Analysis, 3:e Aufl., Braunschweig 1879, Bd. II, p. 236 ff.

also für ungerade k

$$S_{1,k} = 1 + \sum_{n=1}^{\frac{1}{2}(k-1)} \left\{ F\left(e^{\frac{2n\pi}{k}i}\right) + F\left(e^{-\frac{2n\pi}{k}i}\right) \right\}$$

aber für gerade $k > 2$

$$S_{1,k} = 1 + F(-1) + \sum_{n=1}^{\frac{1}{2}(k-2)} \left\{ F\left(e^{\frac{2n\pi}{k}i}\right) + F\left(e^{-\frac{2n\pi}{k}i}\right) \right\}$$

(für $k = 2$ fällt die Summe einfach aus). Nun ist aber

$$F(-1) = 1 - 2 \log 2,$$

und ferner für alle reellen θ

$$F(e^{\theta i}) + F(e^{-\theta i}) = 2 + \frac{1 - e^{\theta i}}{e^{\theta i}} \log(1 - e^{\theta i}) + \frac{1 - e^{-\theta i}}{e^{-\theta i}} \log(1 - e^{-\theta i}).$$

Dieser letzte Ausdruck ist auf reelle Form zu bringen, wobei man die für $0 < \theta < \pi$ geltende, leicht gefundene Relation

$$\log(1 - e^{\pm \theta i}) = \log 2 + \log \sin \frac{\theta}{2} \mp \tfrac{1}{2}(\pi - \theta)i$$

zu berücksichtigen hat. Es wird

$$F(e^{\theta i}) + F(e^{-\theta i}) = 2 - 4 \sin^2 \frac{\theta}{2} \cdot \log\left(2 \sin \frac{\theta}{2}\right) - (\pi - \theta) \sin \theta.$$

Wenn man hier $\frac{2n\pi}{k}$ statt θ einführt, so gehen die beiden im Texte angeführten analytischen Ausdrücke für $S_{1,k}$ hervor.

Nachträgliche Bemerkung. Die obige Reihe (15) fällt nicht ganz mit der von GYLDÉN behandelten zusammen: die Nenner der μ-Convergenten sind gegen die Zähler ausgetauscht. Diese Verschiedenheit ist jedoch, wie unmittelbar ersichtlich, ohne jede wesentliche Bedeutung.

vi.v. k. v

ÖFVERSIGT AF K. SV. VET.-AKAD. FÖRHANDL. 1900. N:o 2.

MEDDELANDEN

FRÅN

LUNDS ASTRONOMISKA OBSERVATORIUM

N:o 12.

EINIGE FÄLLE VON LIBRATIONSBEWEGUNGEN IN DEM PLANETENSYSTEM. I.

VON

C. V. L. CHARLIER

MITGETEILT AM 14 FEBRUAR 1900

STOCKHOLM
KUNGL. BOKTRYCKERIET. P. A. NORSTEDT & SÖNER
1900

ÖFVERSIGT AF K. SV. VET.-AKAD. FÖRHANDL. 1900. N:o 2.

MEDDELANDEN

FRÅN

LUNDS ASTRONOMISKA OBSERVATORIUM

N:o 12.

EINIGE FÄLLE VON LIBRATIONSBEWEGUNGEN IN DEM PLANETENSYSTEM. I.

VON

C. V. L. CHARLIER

MITGETEILT AM 14 FEBRUAR 1900

STOCKHOLM
KUNGL. BOKTRYCKERIET. P. A. NORSTEDT & SÖNER
1900

Der Begriff der *Libration*, ursprünglich an der Rotationsbewegung des Mondes benutzt, ist von LAPLACE in die Theorie des Problems der n-Körper eingeführt, indem er mit diesem Namen ein bestimmtes Störungsglied in der Theorie der Jupitersatelliten bezeichnet, das mit der von LAPLACE entdeckten Kommensurabilität in den mittleren Bewegungen der 3 inneren Jupitersatelliten in Verbindung steht. Seitdem hat man öfters unter Libration eine Kommensurabilität in den mittleren Bewegungen zweier oder mehrerer Himmelskörper verstanden. Wenn man von einer von GAUSS vermutheten Libration zwischen den mittleren Bewegungen von Pallas und Jupiter, die aber bis jetzt nicht bestätigt worden ist, absieht, so ist es noch nicht gelungen einige Fälle von derartigen Librationsbewegungen in dem Planetensystem zu entdecken.

Eine Libration in ganz ähnlichem Sinne kann indessen zwischen den mittleren Geschwindigkeiten des Perihels oder des Knotens zweier oder mehrerer Planetenbanen vorkommen, indem die Lage des Perihels oder des Knotens für den einen Planeten von der Lage der entsprechenden Bahnelemente des anderen Planeten abhängig ist. STOCKWELL hat in seinen Untersuchungen

über die sekularen Veränderungen der grossen Planeten zwei solche Librationsfälle gefunden. Er hat nämlich gezeigt, dass die mittlere Geschwindigkeit des Perihels von Jupiter genau gleich der mittleren Bewegung des Perihels von Uranus ist und dass die mittleren Längen dieser Perihelien genau um 180° verschieden sind. Er hat weiter gefunden, dass die mittlere Bewegung des Knotens von Jupiter auf der unveränderlichen Ebene genau gleich derjenigen von Saturnus ist, und dass die mittleren Längen dieser Knoten genau um 180° von einander abweichen. Zweck der vorliegenden Untersuchung ist derartige Librationsfälle in den Bewegungen der kleinen Planeten aufzusuchen.

Die gewöhnliche Theorie der sekularen Störungen wird wohl für die meisten Fälle für eine derartige Untersuchung genügend sein, obgleich bei sehr grossen Excentricitäten und Neigungen eine mehr eingehende Untersuchung nothwendig wird.

Die sekularen Störungen der kleinen Planeten sind durch verschiedene interessante Eigenthümlichkeiten ausgezeichnet, von welchen die folgenden die wichtigsten sind:

1) Die mittlere Bewegung des *Perihels* eines kleinen Planeten ist — von gewissen Fällen abgesehen — zu ihrem Werth nahe gleich und zum Zeichen entgegengesetzt der mittleren Bewegung des *Knotens* desselben Planeten. Die letztere ist negativ, die vorige positiv.

2) Die mittlere Bewegung des Perihels (bez. Knotens) eines kleinen Planeten ist viel grösser als die bei den grossen Planeten vorkommenden Perihel- oder Knotenbewegungen. Für den mittleren Abstand der kleinen Planeten von der Sonne ($a = 2.8$) beträgt dieselbe in der That jährlich ungefähr eine Bogenminute.

3) Die Grösse der Perihel- und Knotenbewegung wächst mit dem Abstand von der Sonne. Dieselbe beträgt jährlich für (433) *Eros* 13″.5,[1]) für (434) *Hungaria* 25″.6 und wächst dann mit dem Abstande von der Sonne, so dass für den Planeten 1893 X die mittlere Perihelbewegung 364″ beträgt und für den äussersten (279) *Thule* einen Werth von 470″ erreicht.

[1]) Diese Werthe sind nicht als definitiv zu betrachten.

4) Die in 1), 2) und 3) erwähnten Sätze haben auf die *durchschnittlichen* Verhältnisse in dem Planetensystem ihre Gültigkeit. Es giebt aber Ausnahmefälle, in denen die Perihel- und die Knotenbewegung — die eine oder beide — einen anderen, und zwar geringeren, Werth haben, als man es nach den allgemeinen Verhältnissen bei den kleinen Planeten erwarten könnte. Es kommen hier zwei verschiedene Bewegungszustände vor:

a) Die Geschwindigkeit der Perihel- oder Knotenbewegung fällt mit der Bewegung des entsprechenden Elementes bei Jupiter oder Saturn zusammen. Dies ist der *Librationsfall.* Es zeigt sich hierbei einen karakteristischen Unterschied zwischen der von Jupiter und derjenigen von Saturn herrührenden Librationsbewegung. Bei der letzteren ist nämlich das Perihel des kleinen Planeten immer weniger als 90° von der mittleren Lage des Saturn *Aphels* entfernt, wogegen, wenn eine Libration mit Jupiter statt findet, das Perihel des kleinen Planeten immer um das *Perihel* von Jupiter seine Oscillationen ausführen muss. Es ist übrigens bemerkenswerth, dass Saturn nicht durch seine direkten Störungen auf die kleinen Planeten eine Libration hervorbringen kann, sondern dies nur durch die *indirekten* Wirkungen des Saturns auf Jupiter zu Stande gebracht wird.

b) Die Geschwindigkeit des Perihels oder des Knotens fällt nicht mit der Geschwindigkeit des entsprechenden Elementes von Jupiter oder Saturn zusammen, wird aber auch nicht nach den in 2) und 3) erwähnten Sätzen berechnet.

Dieser letzgenannte Bewegungszustand, den ich eine *zusammengesetzte Libration* nenne, ist derselbe, der nach STOCKWELL in der Perihelbewegung von der Venus und der Erde vorkommt und ebenfalls nach demselben Verfasser in der Knotenbewegung von denselben Planeten und von Mars. Dieser Fall wird von STOCKWELL so charakterisirt, dass die genannten Planeten *keine* mittlere Bewegung der betreffenden Elemente besitzen. Es ist indessen von GYLDÉN [1]) wahrscheinlich gemacht worden, dass auch in diesem

[1]) »Traité analytique des orbites absolues de huit planètes principales» par HUGO GYLDÉN. I. s. 123.

Fall ein mit der Zeit wachsendes Glied in der Perihel- oder Knotenlänge vorhanden ist, obgleich dasselbe sich nicht so unmittelbar wie in den übrigen Fällen ergiebt.

Die sekularen Störungen der 40 ersten Planeten sind von NEWCOMB in einer Abhandlung vom Jahre 1860 [1]) berechnet worden. Unter diesen Planeten kommen zwei Fälle mit »zusammengesetzten Libration» (4. *b*) vor, nämlich bei (27) Euterpe (in der Knotenlänge) und bei (40) Harmonia (in der Perihellänge). NEWCOMB hat verschiedene Tafeln gegeben, die bei der Berechnung der sekularen Störungen von grossem Nutzen sind, und welche im Folgenden eine häufige Anwendung gefunden haben.

2. Es bedeute:

e die Excentricität des kleinen Planeten,

π die Perihellänge » » » ,

und mit e' und π' bezeichne ich die entsprechenden Grössen für den störenden Planeten.

Mit e_0, π_0, e'_0, π'_0 bezeichne ich diejenigen Zahlwerthe der betreffenden Grössen, die für eine bestimmte Zeit ($t = 0$) gelten.

Ich setze nun

$$r = e \cos \pi\,; \qquad r' = e' \cos \pi'\,,$$
$$s = e \sin \pi\,; \qquad s' = e' \sin \pi'\,,$$

und man hat dann zur Bestimmung der Werthe von r und s, wenn nur die sekularen Werthe die Grössen in Betracht genommen werden, die folgenden Differentialgleichungen:

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = -\varkappa_1 s + \varkappa_2 s' \\ \dfrac{ds}{dt} = \quad \varkappa_1 r - \varkappa_2 r'\,. \end{cases}$$

Die Koefficienten $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ sind mit der störenden Masse (m') multiplicirt und können bei der Behandlung der Störungen

[1]) »On the secular variations and mutual relations of the orbits of the asteroids» (Memoirs of the American Academy. New Series. Vol. V).

der kleinen Planeten mit Vortheil unter folgender Form geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \varkappa_1 &= m'n'P_1(\alpha) \\ \varkappa_2 &= m'n'P_2(\alpha)\,, \end{aligned} \tag{2}$$

wo m' die Masse und n' die mittlere Bewegung des *störenden* Planeten bezeichnet, und $P_1(\alpha)$ und $P_2(\alpha)$ nur von dem Verhältniss α zwischen der halben grossen Achse (a) des kleinen Planeten und derjenigen des störenden Planeten (a') abhängig sind. Die Formeln zur Berechnung von P_1 und P_2 werde ich unten angeben.

Als Einheit für die Zeit nehme ich im Folgenden ein Julianisches Jahr, und es ist dann, wenn *Jupiter* der störende Planet ist,

$$m'n' = 104.2\,; \tag{3}$$

und, wenn die Störungen von *Saturn* in Betracht kommen,

$$m'n' = 12.6 \tag{4}$$

Durch die Untersuchungen von STOCKWELL ist es bekannt, dass die Excentricität der Jupitersbahn zwischen den Grenzen 0.0255 und 0.0608 schwankt und dass die Perihellänge eine *mittlere* Bewegung gleich + 3''.717 in einem Jahre besitzt. Die vollständigen Ausdrücke für r' und s' sind die folgenden

$$\begin{aligned} r' = e'\cos\pi' = &- 0.000009\cos[\;5''.464\,t + \;\;88^\circ.01] \\ &+ 0.000011\cos[\;7.\,248\,t + \;\;20\,.84] \\ &- 0.000001\cos[17\,.014\,t + 335\,.19] \\ &+ 0.000001\cos[17\,.784\,t + 137\,.11] \\ &+ 0.000064\cos[\;0\,.617\,t + \;\;67\,.94] \\ &+ 0.001944\cos[\;2\,.728\,t + 105\,.06] \\ &+ 0.043160\cos[\;3\,.717\,t + \;\;28\,.15] \\ &+ 0.015638\cos[22\,.461\,t + 307\,.95]\,; \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} s' = e'\sin\pi' = &- 0.000009\sin[5''.464\,t + 88^\circ.01] \\ &+ 0.000011\sin[7\,.248\,t + 20\,.84] \\ &- \text{etc.} \end{aligned}$$

Durch des Auftreten von s. g. kleinen Divisoren kann das letzte Glied in den obigen Ausdrücken unter Umständen eine Hauptrolle in den Störungsausdrücken eines kleinen Planeten spielen. Ich werde diesen Fall besonders betrachten. Auch das dritte und das vierte Glied — obgleich in der Jupiterstheorie ohne Bedeutung — könnten für Planeten, die auf einem bestimmten Abstand um die Sonne herumlaufen, zu merklichen Störungsgliedern Veranlassung geben. Unter den bis jetzt bekannten Asteroiden findet sich aber kein solcher Planet. Der interessante Planet (433) Eros liegt diesem kritischen Abstand am nächsten ohne indessen demselben so nahe zu liegen, dass die fraglichen Glieder von Bedeutung werden können.

Bei der Behandlung der Frage von den sekularen Störungen der kleinen Planeten kann man sich also mit der Betrachtung der drei (oder höchstens vier) letzten Gliedern in den Ausdrücken für r und s begnügen.

Nimmt man die Einwirkung aller Planeten auf die sekularen Störungen der kleinen Planeten in Betracht, so werden die Gleichungen für r und s von genau derselben Form wie in dem Falle, dass nur die Jupiterstörungen berücksichtigt wurden. Die Gleichungen (1) bekommen nämlich die Form:

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= -bs + \sum_{i=1}^{8} E_i \sin(g_i t + \beta_i) \\ \frac{ds}{dt} &= \quad bs - \sum_{i=1}^{8} E_i \cos(g_i t + \beta_i)\,, \end{aligned}\right.$$

wo b und E_i nur von dem mittleren Abstand (a) des kleinen Planeten von der Sonne abhängig sind, und die g_i nach STOCKWELL folgende Werthe haben:

$$\begin{aligned} g_1 &= + \;\; 5''.464 & \qquad g_5 &= + \;\; 0''.617 \\ g_2 &= + \;\; 7\;.248 & g_6 &= + \;\; 2\;.728 \\ g_3 &= + 17\;.014 & g_7 &= + \;\; 3\;.717 \\ g_4 &= + 17\;.984 & g_8 &= + 22\;.461\,. \end{aligned}$$

Es würde keine allzu grosse Mühe geben, die Werthe der Koefficienten E_i und b für verschiedene Werthe von a zu tabuliren. Augenblicklich habe ich aber nicht den Zweck die allgemeinen Ausdrücke für die sekularen Störungen zu finden, sondern will nur diejenigen Planeten aufsuchen, für welche eine Libration in der Perihellänge stattfindet, und dann kann man schneller zum Ziel kommen.

Die Integration von (6) giebt

$$\left.\begin{aligned} r &= A\cos(bt + B) + \sum_{i=1}^{8} \frac{E_i}{b - g_i}\cos(g_i t + \beta_i) \\ s &= A\sin(bt + B) + \sum_{i=1}^{8} \frac{E_i}{b - g_i}\sin(g_i t + \beta_i), \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

wo A und B die Integrationskonstanten sind.

Aus diesen Ausdrücken werde ich zuerst einige allgemeine Schlüsse ziehen.

Die Konstante A ist durchschnittlich von derselben Grössenordnung wie die Excentricität des gestörten Planeten. Da nun die Excentricität der Bahnen der kleinen Planeten im Allgemeinen gross ist, so wird das erste Glied in (7) *im Allgemeinen* viel grösser als die anderen sein. Wenn nun A so gross ist, dass

$$A > \sum_{i=1}^{8} \left| \frac{E_i}{b - g_i} \right|, \quad (8)$$

so lässt sich bekanntlich beweisen, dass das Perihelium eine mittlere Bewegung besitzt, die genau gleich b ist.

Nun ist die Gleichung (8) bei mehr als 95 % von den kleinen Planeten erfüllt, und man kann also behaupten, dass die kleinen Planeten durchschnittlich eine mittlere Perihelbewegung gleich b besitzen.

Die Grösse b ist von Newcomb in der oben citirten Abhandlung für eine Reihe von Werthen für den Abstand von der Sonne berechnet. Ich habe aus seinen Werthen die folgende kleine Tafel entworfen, die es erlaubt die b-Werthe mit einfacher Interpolation zu erhalten.

Tab. I.

Mittlere Perihelbewegung der kleinen Planeten.

a	b	Δ	a	b	Δ	a	b	Δ	a	b	Δ
2.20	+32″.815	0.327	2.45	+42″.184	0.482	2.70	+54″.619	0.577	2.95	+71″.450	0.791
2.21	33 .142	0.331	2.46	42 .616	0.437	2.71	55 .196	0.584	2.96	72 .241	0.803
2.22	33 .473	0.335	2.47	43 .053	0.442	2.72	55 .780	0.592	2.97	73 .044	0.814
2.23	33 .808	0.338	2.48	43 .495	0.447	2.73	56 .372	0.599	2.98	73 .858	0.826
2.24	34 .146	0.342	2.49	43 .942	0.452	2.74	56 .971	0.606	2.99	74 .684	0.835
2.25	34 .488	0.346	2.50	44 .394	0.457	2.75	57 .577	0.613	3.00	75 .519	0.846
2.26	34 .834	0.350	2.51	44 .851	0.462	2.76	58 .190	0.621	3.01	76 .365	0.859
2.27	35 .184	0.354	2.52	45 .313	0.468	2.77	58 .811	0.629	3.02	77 .224	0.871
2.28	35 .538	0.358	2.53	45 .781	0.473	2.78	59 .440	0.637	3.03	78 .095	0.884
2.29	35 .896	0.360	2.54	46 .254	0.478	2.79	60 .077	0.647	3.04	78 .979	0.896
2.30	36 .256	0.365	2.55	46 .732	0.484	2.80	60 .724	0.653	3.05	79 .875	0.906
2.31	36 .621	0.369	2.56	47 .216	0.490	2.81	61 .377	0.662	3.06	80 .781	0.920
2.32	36 .990	0.373	2.57	47 .706	0.496	2.82	62 .039	0.670	3.07	81 .701	0.933
2.33	37 .363	0.378	2.58	48 .202	0.501	2.83	62 .709	0.679	3.08	82 .634	0.947
2.34	37 .741	0.382	2.59	48 .703	0.506	2.84	63 .388	0.686	3.09	83 .581	0.962
2.35	38 .123	0.386	2.60	49 .209	0.512	2.85	64 .074	0.694	3.10	84 .543	0.972
2.36	38 .509	0.390	2.61	49 .721	0.518	2.86	64 .768	0.704	3.11	85 .515	0.987
2.37	38 .899	0.395	2.62	50 .239	0.525	2.87	65 .472	0.713	3.12	86 .502	1.002
2.38	39 .294	0.399	2.63	50 .764	0.531	2.88	66 .185	0.723	3.13	87 .504	1.017
2.39	39 .693	0.404	2.64	51 .295	0.538	2.89	66 .908	0.733	3.14	88 .521	1.034
2.40	40 .097	0.408	2.65	51 .833	0.543	2.90	67 .641	0.741	3.15	89 .555	1.045
2.41	40 .505	0.413	2.66	52 .376	0.550	2.91	68 .382	0.751	3.16	90 .600	1.061
2.42	40 .918	0.418	2.67	52 .926	0.557	2.92	69 .133	0.762	3.17	91. 661	1.077
2.43	41 .336	0.422	2.68	53 .483	0.564	2.93	69 .895	0.772	3.18	92 .738	1.093
2.44	41 .758	0.426	2.69	54 .047	0.572	2.94	70 .667	0.783	3.19	93 .881	1.111
2.45	42 .184		2.70	54 .619		2.95	71 .450		3.20	94 .942	

Zu der Zeit, als NEWCOMB seine Abhandlung über die sekularen Störungen der kleinen Planeten schrieb (1860), waren die Bahnen nur für 40 von den kleineren Planeten genauer bekannt, und die obigen Grenzen für a waren dann genügend um dieselben alle einzuschliessen. Nach dem letzten Berichte des Berliner Recheninstituts (im Sonderausdruck aus der Berliner Astronomischen Jahrbuch für 1902) beträgt nun die Zahl der kleinen Planeten, für welche Bahnelemente vorliegen, 463; und von diesen haben 26 einen grösseren mittleren Abstand von der Sonne als 3.20 und 13 einen solchen, der kleiner ist als 2.20. Für die grosse Mehrzahl der Planeten sind also die Tafel noch brauchbar.

Für die übrigen kann man die folgende Tafel benutzen, welche den von Jupiter herrührenden Theil der sekularen Perihelstörungen enthält. Da durchschnittlich 98 % des Betrages der sekularen Störungen der kleinen Planeten von Jupiter herrührt, so erhält man in dieser Weise eine gute Annäherung an den wahren Werth der Perihelbewegung, wie man unmittelbar finden kann, wenn man die Tafeln I und II mit einander vergleicht.

Um diesen Vergleich zu erleichtern habe ich den Werth von a sowohl wie von α angeführt, wo α gleich dem Verhältniss zwischen der halben grosser Achse der Bahn des kleinen Planeten und derjenigen des Jupiters ist.

Tab. II.

Tafel von $\varkappa_1$.

α	$\varkappa_1$	a	α	$\varkappa_1$	a	α	$\varkappa_1$	a
0.28	+ 13″.517	1.457	0.35	+ 20″.707	1.821	0.42	+ 30″.680	2.185
0.29	14 .411	1.509	0.36	21 .934	1.873	0.43	32 .412	2.237
0.30	15 .346	1.561	0.37	23 .221	1.925	0.44	34 .236	2.289
0.31	16 .324	1.613	0.38	24 .570	1.977	0.45	36 .161	2.341
0.32	17 .347	1.664	0.39	25 .985	2.029	0.46	38 .194	2.393
0.33	18. 417	1.717	0.40	27 .473	2.081	0.47	40 .342	2.445
0.34	19 .536	1.769	0.41	29 .035	2.133	0.48	42 .615	2.497
0.35	20 .707	1.821	0.42	30 .680	2.185	0.49	45 .023	2.549

Tab. II. (Forts.)

Tafel von $\varkappa_1$.

α	$\varkappa_1$	a	α	$\varkappa_1$	a	α	$\varkappa_1$	a
0.49	+ 45″.023	2.549	0.60	+ 84″.556	3.122	0.71	+177″.392	3.694
0.50	47 .577	2.601	0.61	89 .894	3.173	0.72	191 .639	3.746
0.51	50 .288	2.654	0.62	95. 659	3.225	0.73	207 .503	3.798
0.52	53 .169	2.706	0.63	101 .898	3.277	0.74	225 .236	3.850
0.53	56 .237	2.758	0.64	108 .663	3.330	0.75	245 .148	3.902
0.54	59 .508	2.810	0.65	116 .020	3.382	0.76	267 .547	3.954
0.55	62 .998	2.862	0.66	124 .038	3.434	0.77	292 .753	4.006
0.56	66 .729	2.914	0.67	132 .795	3.486	0.78	321 .098	4.058
0.57	70 .723	2.966	0.68	142 .893	3.538	0.79	352 .926	4.110
0.58	75 .006	3.018	0.69	152 .932	3.590	0.80	388 .593	4.162
0.59	79 .606	3.070	0.70	164 .550	3.642	0.81	428 .267	4.214
0.60	84 .556	3.122	0.71	177 .392	3.694	0.82	472 .528	4.296

Aus dieser Tafel erhält man folgende $\varkappa$-Werthe für diejenigen Planeten, die einen mittleren Abstand von der Sonne kleiner als 2.2 haben. Es sind diese diejenigen Planeten, welche den kleinsten Werth für die sekularen Perihelstörungen haben.

Tab. III.

Planeten mit der kleinsten mittleren Perihelbewegung.

	n	α	a	$\varkappa_1$
433 Eros	2015″	0.2803	1.458	+ 13″.540
434 Hungaria	1306	0.3742	1.946	23 .788
1893 C.	1183	0.3997	2.080	27 .433
330 Adalberta	1175	0.4016	2.089	27 .723
323 Brucia	1120	0.4148	2.158	29 .824
244 Sita	1107	0.4179	2.174	30 .335
149 Medusa	1106	0.4181	2.175	30 .368
1894 BD	1105	0.4184	2.176	30 .415
281 Lukretia	1098	0.4201	2.185	30 .697
352 Gisela	1091	0.4218	2.194	30 .992
254 Augusta.	1091	0.4219	2.195	31 .009
270 Anahita.	1089	0.4225	2.198	31 .111
341 California	1088	0.4227	2.199	31 .148

Unter n habe ich den Werth der *täglichen* mittleren Bewegung der Planeten angegeben.

Es bedeutet hier $\varkappa_1$, mit der oben angegebenen Annäherung, der Werth der *jährlichen* mittleren Perihelbewegung der Planeten, vorausgesetzt, dass keine Libration statt findet; eine Frage, die später untersucht werden wird. Unter allen den kleineren Planeten ist es also ein einziger — 433 *Eros* — der eine mittlere Perihelbewegung hat, der kleiner ist als die *grösste* sekulare Perihelbewegung unter den grossen Planeten, die bekanntlich für Saturn statt findet und nach STOCKWELL 22″.461 beträgt.

Der Einfluss der Integrationsdivisoren in Formel (7) spielt für diese Planeten eine ziemlich grosse Rolle, wodurch die Untersuchung über eine etwaige Libration bei diesen Planeten etwas umständlicher als für die anderen wird.

Die Planeten mit einem mittleren Abstand von der Sonne grösser als 3.2 sind die folgenden.

Tab. IV.

Planeten mit der grössten mittleren Perihelbewegung.

	n	α	a	$\varkappa_1$
279 Thule.	403″	0.8195	4.263	+ 470″.315
1893 X.	423	0.7930	4.126	363 .626
361	450	0.7616	3.962	271 .580
153 Hilda.	450	0.7616	3.962	271 .580
334 Chicago.	460	0.7507	3.905	246 .716
414	538	0.6762	3.518	138 .746
107 Camilla.	544	0.6708	3.489	133 .467
87 Sylvia	545	0.6699	3.485	133 .707
1893 Y.	550	0.6662	3.465	129 .467
260 Huberta.	555	0.6623	3.445	126 .052
121 Hermione	555	0.6623	3.445	126 .052
45 Cybele	556	0.6610	3.440	124 .914
229 Adelinda	561	0.6577	3.422	123 .960
76 Freia.	562	0.6562	3.414	120 .991

Tab. IV. (Forts.)

Planeten mit der grössten mittleren Perihelbewegung.

	n	α	a	$\varkappa_1$
420 Bertholda	563″	0.6561	3.414	+ 120″.911
225 Henrietta	567	0.6580	3.397	118 .425
319 Leona.	567	0.6580	3.397	118 .425
168 Sibylla	572	0.6492	3.378	115 .431
401 Ottilia	584	0.6398	3.329	108 .528
175 Andromache	612	0.6201	3.226	101 .836
122 Gerda.	614	0.6190	3.220	95 .082
323 Heidelberga	617	0.6172	3.211	94 .045
300 Geraldina	617	0.6169	3.209	93 .872
108 Hecuba	617	0.6165	3.207	93 .641
318 Magdalena.	618	0.6163	3.206	93 .526
381	620	0.6152	3.200	92 .892

Unter diesen Planeten kommt kein Fall von Libration vor, wie unten gezeigt wird. Der Werth von $\varkappa_1$ fällt also mit der mittleren Perihelbewegung dieser Planeten zusammen, insofern nämlich dieselbe von der Einwirkung von Jupiter herrührt, und diese überwiegt für diese Planeten, die dem Jupiter am nächsten liegen, bei Weitem den Einfluss der anderen Planeten.

Die Perihelbewegung dieser kleinen Planeten ist eine sehr grosse. Eine grosse Zahl von denselben — ungefähr die letzte Hälfte der Tabelle, — gehören derjenigen Gruppe der kleinen Planeten, deren mittlere Bewegung nahe der doppelten derjenigen des Jupiters ist, und erleiden aus diesem Grund auch grosse Störungen langer Periode.

Die fünf ersten Planeten in der Tabelle scheinen eine Gruppe für sich zu bilden, bei der die Perihelbewegung eine ausserordentlich grosse ist. Bei (279) Thule wird diese so gross, dass dieselbe jährlich sogar die tägliche mittlere Bewegung in Grösse übertrifft. Das Perihel macht bei diesem Planeten eine Umdrehung in derselben Zeit, die der Planet braucht um 313 Umläufe um die Sonne zu machen, oder in 2760 Jahren.

Obgleich in der Formel (7)

$$\left.\begin{aligned} r &= A\cos(bt+B) + \sum_{i=1}^{8} \frac{E_i}{b-g_i}\cos(g_i t+\beta_i) \\ s &= A\sin(bt+B) + \sum_{i=1}^{8} \frac{E_i}{b-g_i}\sin(g_i t+\beta_i) \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

die Konstante A, wie gesagt, durchschnittlich viel grösser als die Koefficienten der übrigen Glieder ist, und wenn also *im Allgemeinen* das Perihel eines kleinen Planeten die mittlere Bewegung b hat, deren Werth aus der Tafel I ersichtlich ist, so kann sich indessen die Sache anders stellen, wenn für einen Planeten die Integrationskonstante A klein ausfüllt, sei es dass die Excentricität der oskulirenden Bahn klein ist, oder ein von den Grössen g_i sehr nahe gleich b ist.

Gesetzt

$$G_i = \frac{E_i}{b-g_i},$$

so dass

$$\left.\begin{aligned} r &= A\cos(bt+B) + \sum_{i=1}^{8} G_i\cos(g_i t+\beta_i) \\ s &= A\sin(bt+B) + \sum_{i=1}^{8} G_i\sin(g_i t+\beta_i)\,, \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

so nehme ich an, dass es sich zeigen würde, dass ein von den Koefficienten G_i, z. B. G_7, grösser als die anderen sind und zwar so, dass

$$G_7 > A + G_1 + G_2 + G_3 + G_4 + G_5 + G_6 + G_8\,, \qquad (10)$$

wo alle Glieder *positiv* zu nehmen sind.

In bekannter Weise zeigt man denn, dass das Perihel eine mittlere Bewegung gleich g_7 besitzt.

Man multiplicirt zu dem Zweck die erste Gleichung (9) mit $\cos(g_7 t+\beta_7)$, die zweite mit $\sin(g_7 t+\beta_7)$ und addirt, und ebenfalls die erste mit $\sin(g_7 t+\beta_7)$, die zweite mit $\cos(g_7 t+\beta_7)$

und subtrahirt die so erhaltenen Gleichungen von einander. Indem man sich dann erinnert, dass

$$r = e \cos \pi$$
$$s = e \sin \pi ,$$

so bekommt man die beiden Gleichungen

$$(11) \begin{cases} e \cos (\pi - g_7 t - \beta_7) = A \cos [(b - g_7)t + B - \beta_7] + \\ \qquad + \Sigma G_i \cos [(g_i - g_7)t + \beta_i - \beta_7] \\ e \sin (\pi - g_7 t - \beta_7) = A \sin [(b - g_7)t + B - \beta_7] + \\ \qquad + \Sigma G_i \sin [(g_i - g_7)t + \beta_i - \beta_7] . \end{cases}$$

Wenn man diese Gleichungen mit einander dividirt und das mit G_7 multiplicirte Glied von den übrigen abtrennt, so erhält man nun:

$$(12) \qquad tg(\pi - g_7 t - \beta_7) =$$
$$= \frac{A \sin [(b - g_7)t + B - \beta_7] + \Sigma' G_i \sin [(g_i - g_7)t + \beta_i - \beta_7]}{G_7 + A \cos [(b - g_7)t + B - \beta_7] + \Sigma' G_i \cos [(g_i - g_7)t + \beta_i - \beta_7]},$$

wo der Strich oben bei dem Summationszeichen bezeichnet, dass das Glied $i = 7$ ausgeschlossen werden soll.

In Folge der Ungleichheit (10) folgt es nun, dass der Nenner in (12) niemals gleich Null werden kann, dass also $tg(\pi - g_7 t - \beta_7)$ niemals unendlich wird.

Es folgt hieraus, dass der Winkel

$$\psi = \pi - g_7 t - \beta_7$$

nie gleich $\pm 90°$ werden kann; und es muss also ψ um 0° oder 180° herumschwanken und zwar so, dass die Amplitnd dieser Pendelbewegung kleiner als 90° ist.

Hieraus giebt es hervor, dass π die *mittlere Bewegung* g_7 besitzen muss.

Da weiter aus der Formel für $e \cos \psi$ unmittelbar ersichtlich ist, dass diese Grösse immer *positiv* bleibt, wenn G_7 positiv ist, so findet man, dass in diesem Falle ψ um 0° und nicht um 180° schwanken muss.

Die Winkelgrösse

$$g_7 t + \beta_7$$

bezeichnet den mittleren Werth der Perihellänge des Jupiters, und es wird also in diesem Falle das Perihel des kleinen Planeten immer weniger als 90° von der Perihellänge des Jupiters abweichen. Das Perihel des kleinen Planeten wird dann immer dem Perihel des Jupiters folgen, und um dasselbe pendelartig schwanken und zwar so, dass die Differenz der Perihellängen nie grösser als 90° beträgt.

Es findet dann *Libration* zwischen der Perihelbewegung des Planeten und derjenigen des *Jupiters* statt.

Wäre G_8 grösser als die Summe der übrigen Koefficienten in (9), so würde eine Libration mit *Saturn* vorhanden sein. Und ebenfalls wäre es *theoretisch* möglich eine derartige Libration mit Neptun ($g_5 = 0''.617$), mit Mars ($g_4 = 17''.784$) oder Merkur ($g_1 = 5''.464$) bei einem kleinen Planeten zu finden. (Die Venus, und die Erde haben nach STOCKWELL keine mittlere Perihelbewegung, [1]) und diejenige des Uranus' fällt mit der mittleren Perihelbewegung des Jupiters zusammen.)

In den letztgenannten Fällen würde indessen die Libration des Perihels des kleinen Planeten nicht immer um das *Perihel* des genannten grossen Planeten geschehen. Wenn z. B. der Koefficient G_8 der grösste ist, so wird die Libration um das *Aphelium* von Saturnus stattfinden, was eine notwendige Folge davon ist, dass der Koefficient G_8 *negatives* Zeichen hat. [2])

Um die wahre Bewegung der Perihelien der kleinen Planeten zu bestimmen, so muss man natürlich die Differentialgleichungen (6) für jeden Planeten vollständig integriren. Wenn es sich aber nur darum handelt diejenigen Planeten, bei welchen eine *Libration* in der Perihelbewegung stattfindet, aufzusuchen, so kann man viel schneller zum Zweck kommen.

Da die Einwirkung des Jupiters bedeutend die Einwirkung der übrigen Planeten in Grösse übertrifft, so braucht man in der ersten Annäherung nur den Einfluss des *Jupiters* auf die

---

[1]) Wenigstens keine, die mit irgend einem von den Grössen g zusammenfällt. Sieh die Bemerkung in der Einleitung.

[2]) Dies gilt indessen nur für solche Planeten, für welche $a > 1.9$ ist.

sekularen Störungen zu berücksichtigen. Noch weiter kann man das Problem vereinfachen, indem man hierbei die Excentricität (e') und die Perihellänge (π') des Jupiters anfangs als *konstant* annimmt, was eine berechtigte Annäherung ist, indem die Bewegung des Jupitersperihels jährlich nur 3″.717 beträgt und also nach Tafel I sehr klein ist im Verhältniss zu der Bewegung des Perihels der kleinen Planeten.

Die Differentialgleichungen (1) lauten dann:

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = -\varkappa_1 s + \varkappa_2 s' \\ \dfrac{ds}{dt} = \quad \varkappa_1 r - \varkappa_2 r', \end{cases}$$

wo $r' = e' \cos \pi'$ und $s' = e' \sin \pi'$ als Konstanten anzusehen sind

Die Integrale sind also

$$(13) \qquad \begin{cases} r = A \cos(\varkappa_1 t + B) + \dfrac{\varkappa_2}{\varkappa_1} e' \cos \pi' \\ s = A \sin(\varkappa_1 t + B) + \dfrac{\varkappa_2}{\varkappa_1} e' \sin \pi'. \end{cases}$$

Zur Bestimmung von A und B setzt man $t = 0$, und es wird dann

$$A \cos B = r_0 - \frac{\varkappa_2}{\varkappa_1} e' \cos \pi'$$

$$A \sin B = s_0 - \frac{\varkappa_2}{\varkappa_1} e' \sin \pi',$$

oder wenn man die Werthe von r_0 und s_0 einführt:

$$(14) \qquad \begin{aligned} A \cos B &= e_0 \cos \pi_0 - \frac{\varkappa_2}{\varkappa_1} e' \cos \pi' \\ A \sin B &= e_0 \sin \pi_0 - \frac{\varkappa_2}{\varkappa_1} e' \sin \pi', \end{aligned}$$

woraus:

$$(15) \qquad A^2 = e_0^2 + \frac{\varkappa_2^2}{\varkappa_1^2} e'^2 - 2 e_0 \frac{\varkappa_2}{\varkappa_1} e' \cos(\pi_0 - \pi').$$

Die Bedingung für Libration ist, dass A kleiner ist als $\dfrac{\varkappa_2}{\varkappa_1} e'$, d. h. nach dem obigen Ausdruck für A^2

$$e_0^2 - 2e_0 \frac{\varkappa_2}{\varkappa_1} e' \cos(\pi_0' - \pi') < 0 .$$

Setzt man

$$\nu = \frac{e_0}{2 \frac{\varkappa_2}{\varkappa_1} e' \cos(\pi_0 - \pi')}, \tag{16}$$

so sind die Bedingungen für Libration die folgenden:

1) $\cos(\pi_0 - \pi')$ positiv;
2) $\nu < 1$.

Die erste Bedingung erleichtert die Aufsuchung der Librationsfälle bedeutend, indem man nur diejenigen Planeten untersuchen braucht, deren Perihellänge weniger als 90° von dem Perihel des Jupiters abweicht. Nur für diese Planeten braucht man dann das zweite Kriterium in Anwendung bringen.

Aus 2) lässt sich leicht eine obere Grenze für die Excentricität solcher Planeten, die eine Libration mit Jupiter haben, ableiten. Da nämlich $\cos(\pi_0 - \pi')$ immer kleiner als die Einheit ist, so folgt, dass

$$e_0 < 2 \frac{\varkappa_2}{\varkappa_1} e' .$$

Aus einer später mitgetheilten Tabelle für $\varkappa_2 : \varkappa_1$ findet man, dass dieser Quotient immer kleiner als Eins ist. Es muss also die Excentricität des kleinen Planeten, wenn Libration vorkommt, höchstens gleich dem doppelten Werth der Excentricität der Jupitersbahn sein. Die letztere ist (1900) gleich 0.04834, so dass die Bedingung lautet:

$$e_0 < 0.09668 .$$

Der entsprechende Excentricitätswinkel muss also kleiner als 5°.55 sein.

Dem entsprechend habe ich in der folgenden Tafel alle Planeten zusammengestellt, deren Excentricitätswinkel kleiner als 5°.55 sind.

In den ersten Kolumne stehen Nummer und Bezeichnung des Planeten, dann folgt der Werth des Excentricitätswinkel

(φ), der Perihellänge (π_0), der Differenz $\pi_0 - \pi'_0$ und der Werth von $\log a$. Dann folgt der Werth von $\log \varkappa_2/\varkappa_1$ für diejenigen Planeten, welche das erste Kriterium für Libration erfüllen ($|\pi_0 - \pi'_0| < 90°$), und endlich der Werth von ν.

Tab. V.

Nr. und Name.	φ	π_0	$\lvert\pi_0 - \pi'_0\rvert$	$\log a$	$\log \frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}$	ν
1 Ceres.	4°.42	151°.61	138°.89	0.4420		
4 Vesta.	5 .12	251 .71	238 .99	0.3732		
13 Egeria	5 .00	120 .17	107 .45	0.4110		
26 Proserpina . .	5 .01	236 .42	223 .70	0.4242		
29 Amphitrite . .	4 .26	56 .38	43 .66	0.4073	9.774	1.79
32 Pomona. . . .	4 .76	193 .36	180 .64	0.4128		
40 Harmonia . . .	2 .67	0 .90	11 .82	0.3550	9.726	0.92
45 Eugenia. . . .	4 .74	230 .84	218 .12	0.4345		
48 Doris.	3 .51	76 .32	63 .60	0.4934	9.851	2.52
51 Nemausa . . .	3 .86	174 .39	161 .67	0.3740		
58 Concordia . . .	2 .44	189 .17	176 .45	0.4314		
73 Klytia	2 .57	60 .30	47 .58	0.4255	9.790	1.11
83 Beatrix	4 .86	191 .06	178 .34	0.3858		
87 Sylvia	5 .45	340 .70	327 .98	0.5422		
94 Aurora	4 .74	49 .79	37 .07	0.5001	9.857	1.48
103 Hera	4 .51	322 .28	309 .56	0.4320	9.796	2.04
107 Camilla. . . .	3 .94	110 .06	97 .34	0.5428		
110 Lydia.	4 .63	336 .46	323 .74	0.4364	9.707	1.65
113 Amaltheia. . .	5 .02	200 .03	187 .31	0.3759		
117 Lomia	1 .53	38 .19	25 .47	0.4761	9.792	0.45
119 Althæa	4 .71	12 .41	0 .31	0.4118	9.779	1.41
120 Lachesis. . . .	3 .50	221 .14	208 .42	0.4934		
122 Gerda.	2 .76	196 .63	183 .91	0.5072		
124 Alkeste	4 .46	246 .72	234 .00	0.4198		
125 Liberatrix . . .	4 .50	274 .01	261 .29	0.4383		
127 Johanna. . . .	3 .79	122 .19	109 .47	0.4401		
131 Vala	3 .85	222 .36	209 :64	0.3859		
136 Austria	4 .87	316 .69	303 .97	0.3593	9.477	3.06
143 Adria.	4 .14	222 .57	209 .85	0.4411		
146 Lucina	3 .65	225 .27	212 .55	0.4344		
147 Protogeneia . .	2 .03	13 .98	1 .26	0.4964	9.853	0.51

Tab. V. (Forts.)

Nr. und Name.	φ	π_0	$\|\pi_0-\pi'_0\|$	log a	log $\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}$	ν
149 Medusa. . . .	3°.86	48°.08	35°.36	0.3374	9.708	1.68
151 Abundantia . .	2 .15	169 .91	157 .19	0.4134		
152 Atala.	4 .20	83 .89	71 .17	0.4971	9.854	3.29
154 Bertha	4 .65	198 .32	185 .60	0.5041		
158 Koronis. . . .	3 .29	59 .79	47 .07	0.4576	9.819	1.33
160 Una	3 .75	56 .07	43 .35	0.4358	9.800	1.48
165 Loriley	3 .90	286 .55	273 .83	0.4954		
167 Urda.	1 .98	287 .63	274 .91	0.4552	9.816	6.31
168 Sibylla	4 .35	19 .19	4 .47	0.5280	9.880	1.04
170 Maria	3 .71	98 .08	85 .36	0.4074	9.774	13.93
178 Belisana . . .	2 .58	263 .64	250 .92	0.3912		
184 Dejopeia . . .	3 .41	178 .76	166 .04	0.5041		
189 Phthia	2 .12	9 .85	2 .87	0.3893	9.758	0.67
191 Kolga	5 .22	24 .20	11 .48	0.4618	9.823	1.44
195 Eurykleia. . .	2 .42	125 .85	113 .13	0.4590		
196 Philomela. . .	1 .18	311 .22	298 .50	0.4935	9.851	0.64
203 Pompeja . . .	3 .47	42 .40	29 .68	0.4372	9.801	1.14
205 Martha. . . .	1 .91	24 .58	11 .86	0.4439	9.807	0.55
206 Hersilia . . .	2 .33	85 .83	73 .11	0.4377	9.802	2.29
207 Hedda	1 .65	219 .61	206 .89	0.3587		
208 Lacrimosa. . .	0 .92	111 .59	98 .87	0.4613		
209 Dido	3 .78	251 .62	238 .90	0.4973		
214 Aschera . . .	1 .93	110 .65	97 .93	0.4170		
215 Oenone	2 .02	339 .29	326 .57	0.4418	9.806	0.68
224 Oceana	2 .43	270 .45	257 .73	0.4225		
230 Athamanthis. .	3 .55	16 .96	4 .24	0.3770	9.747	1.15
235 Carolina . . .	3 .52	273 .97	261 .25	0.4597		
237 Coelestina. . .	4 .02	281 .01	268 .29	0.4416		
238 Hypatia . . .	4 .96	30 .33	17 .61	0.4636	9.825	1.40
241 Germania . . .	5 .51	343 .72	331 .00	0.4852	9.844	1.63
243 Ida	2 .46	72 .86	60 .14	0.4567	9.818	1.36
248 Lameia. . . .	3 .70	248 .85	236 .13	0.3928		
251 Sophia	5 .47	81 .58	68 .86	0.4908	9.849	3.86
252 Clementina . .	4 .79	355 .19	342 .47	0.4988	9.856	1.26
255 Oppavia . . .	4 .67	163 .37	150 .65	0.4386		
256 Walpurga. . .	3 .36	224 .19	211 .47	0.4770		
261 Prymno . . .	5 .16	159 .46	146 .74	0.3676		

Tab. V. (Forts.)

Nr. und Name.	φ_0	π_0	$\vert\pi_0-\pi'_0\vert$	log a	log $\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}$	ν
263 Dresda	4°.46	12°.43	0°.29	0.4605	9.821	1.22
272 Antonia . . .	1.76	104.07	91.35	0.4436		
276 Adelheid . . .	3.85	124.79	112.07	0.4935		
277 Elvira	4.99	4.64	8.08	0.4599	9.821	1.37
279 Thule	4.72	308.88	296.16	0.6297	9.971	2.06
282 Clorinde . . .	4.71	78.27	65.55	0.3690	9.739	3.74
286 Iclea.	0.84	4.81	7.91	0.5042	9.860	0.21
287 Nephtys . . .	1.31	260.91	248.19	0.3715		
291 Alice.	5.35	130.15	117.43	0.3466		
292 Ludovica . . .	1.66	332.38	319.66	0.4029	9.771	0.67
298 Baptistina. . .	5.52	140.50	127.78	0.3549		
299 Thora	3.48	31.16	18.44	0.3866	9.756	1.16
300 Geraldina. . .	2.42	331.15	318.43	0.5063	9.862	0.80
301 Bavaria. . . .	3.55	262.74	250.02	0.4355		
303 Josephina. . .	3.84	58.79	46.07	0.4925	9.852	1.41
308 Polyxo	2.21	294.04	281.32	0.4392	9.803	3.19
309 Fraternitas . .	5.03	330.13	317.41	0.4200	9.785	2.02
311 Claudia. . . .	0.72	135.04	122.32	0.4616		
317 Roxane. . . .	4.91	335.60	322.88	0.3592	9.730	2.07
318 Magdalena . .	3.97	77.08	64.36	0.5055	9.861	2.28
321 Florentina . .	2.53	71.42	58.70	0.4604	9.821	1.32
327 Columbia. . .	3.68	296.94	284.22	0.4440	9.807	4.22
329 Svea	1.65	218.16	205.44	0.3936		
332 Siri	5.43	324.90	312.18	0.4483	9.806	2.30
334 Chicago . . .	0.32	131.01	118.29	0.5940		
336 Lacadiera. . .	5.34	261.14	248.42	0.3532		
338 Budrosa . . .	1.27	35.64	22.92	0.4646	9.826	0.37
345 Tercidina. . .	3.55	80.61	67.89	0.3664	9.736	3.13
348 May	3.76	93.13	80.41	0.4718	9.833	5.98
349 Dembowska. .	5.16	13.68	0.96	0.4660	9.827	1.38
357 [1893 J]. . .	1.52	10.13	2.59	0.4991	9.856	0.38
362 [1893 R]. . .	2.60	58.10	45.38	0.4111	9.778	1.11
363 [1893 S]. . .	4.00	357.51	344.79	0.4393	9.803	1.18
366 Vincentia. . .	3.84	302.47	289.75	0.4975	9.852	2.89
367 [1893 AA] . .	5.45	136.28	123.56	0.3461		
369 Aëria.	5.53	1.01	11.71	0.4230	9.788	1.66
370 [1893 AC] . .	5.18	357.38	344.66	0.3662	9.736	1.78

Tab. V. (Forts.)

Nr. und Name.	φ_0	π_0	$\lvert\pi_0-\pi'_0\rvert$	log a	$\log\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}$	ν
371 [1893 AD] . .	3°.44	262°.84	250°.12	0.4863		
374 [1893 AK] . .	4 .67	241 .03	228 .31	0.4439		
377 [1893 AN] . .	4 .44	43 .27	30 .55	0.4295	9.794	1.50
388 [1894 BA] . .	3 .71	332 .42	319 .70	0.4764	9.836	1.28
389 [1894 BB] . .	3 .92	186 .63	173 .91	0.4167		
399 [1895 BP] . .	4 .13	175 .71	162 .99	0.4856		
400 [1895 BU] . .	5 .26	198 .14	185 .42	0.4950		
401 Ottilia	2 .35	220 .47	207 .75	0.5223		
407 [1895 CC]. . .	3 .92	14 .81	2 .09	0.4191	0.785	1.16
409 [1895 CE] . .	3 .91	234 .75	222 .03	0.4102		
412 Elisabetha . .	2 .16	197 .67	184 .95	0.4414		
420 Bertholda. . .	2 .76	89 .66	76 .94	0.5331	9.884	2.88
423 [1896 DB] . .	2 .54	273 .76	261 .04	0.4857		
425 [1896 DC] . .	4 .31	179 .04	166 .32	0.4618		
434 Hungaria . . .	4 .24	297 .80	285 .08	0.2893	9.661	6.43
436 [1898 DT] . .	4 .69	18 .69	5 .97	0.5041	9.861	1.17
439 Ohio.	4 .32	75 .40	62 .68	0.4970	9.852	2.39
441 [1898 ED] . .	5 .07	98 .27	85 .45	0.4494	9.811	17.78
442 [1899 EE] . .	4 .17	217 .15	204 .43	0.3705		
[1899 ES] . .	2 .61	31 .58	18 .86	0.4754	9.835	0.73

Die Werthe von $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ sind nach den folgenden Formeln berechnet, die man leicht aus der Theorie der LAPLACE'schen Koefficienten ableiten kann:

$$\varkappa_1 = m'n'P_1(\alpha)$$
$$\varkappa_2 = m'n'P_2(\alpha)\,,$$

$$(16)\qquad \begin{aligned} P_1(\alpha) &= \frac{1}{\pi\sqrt{\sin\theta}}\left[(1 + 3tg^2\theta + 2tg^4\theta)E - (1 + tg^2\theta)K\right] \\ P_2(\alpha) &= \frac{1}{\pi\sqrt{\sin^3\theta}}\left[2(1 + tg^2\theta + tg^4\theta)E - (2 + tg^2\theta)K\right], \end{aligned}$$

wo

$$\alpha = \sin\theta\,,$$

und K und E die elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung sind, deren Werthe ich aus den LEGENDRE'schen Tafeln geholt habe.

Für sehr kleine Werthe von θ empfehlt es sich andere Formeln zu benutzen.

Aus den obigen Formeln habe ich die folgende kleine Tafel für $\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}$ berechnet, die genügend ist um die in der eben angeführten Tafel vorkommenden Werthe von ν zu berechnen.

Tab. VI.

log a	log $\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}$	log a	log $\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}$
0.29	9.662	0.43	9.794
0.30	9.672	0.44	9.804
0.31	9.681	0.45	9.812
0.32	9.691	0.46	9.821
0.33	9.701	0.47	9.831
0.34	9.711	0.48	9.840
0.35	9.721	0.49	9.848
0.36	9.731	0.50	9.857
0.37	9.740	0.51	9.865
0.38	9.750	0,52	9.874
0.39	9.759	0.53	9.882
0.40	9.768	0.54	9.890
0.41	9.777	0.55	9.899
0.42	9.785	0.56	9.907

Aus der Tafel V ist ersichtlich, dass die folgenden Planeten einen Werth von ν kleiner als die Einheit haben, und somit Libration mit Jupiter besitzen.

40 Harmonia	286 Iclea
117 Lomia	292 Ludovica
147 Protogeneia	300 Geraldina
189 Phthia	338 Budrosa
196 Philomela	357 [1893 J]
205 Martha	[1899 ES]
215 Oenone.	

Ob diese Libration von der Form a) oder b) ist, muss durch besondere Untersuchung festgestellt werden. Es wird dabei von Nöthen sein auch diejenigen Planeten, bei denen ν ein wenig grösser als Eins ist, in die Untersuchung mitzunehmen.

ÖFVERSIGT AF K. SV. VET.-AKAD. FÖRHANDL. 1900. N:o 4.

MEDDELANDEN

FRÅN

LUNDS ASTRONOMISKA OBSERVATORIUM

N:o 13.

UEBER MEKANISCHE INTEGRATION UND DEREN VERWENDUNG FÜR NUMERISCHE RECHNUNGEN AUF DEM GEBIETE DES DREI-KÖRPER-PROBLEMES

VON

ELIS STRÖMGREN

MITGETEILT AM 11. APRIL 1900 DURCH C. V. L. CHARLIER

STOCKHOLM
KUNGL. BOKTRYCKERIET. P. A. NORSTEDT & SÖNER
1900

Die Methode, Aufgaben innerhalb des Dreikörperproblemes, welche analytisch nicht zu behandeln waren, durch s. g. mekanische Integration zu lösen, ist von altem Datum, und die Zahl von Bahnberechnungen für Planeten und Kometen, welche durch solche Methoden ausgeführt wurden, ist ja gegenwärtig sehr gross. Bei allen älteren Untersuchungen auf diesem Gebiete ist indessen dies Problem ein derartiges gewesen, dass es von selbst gewisse Vereinfachungen dargeboten, welche ihrerseits bewirkt haben, dass die Aufgabe nicht allgemeiner Natur wurde. So kann ja bei Bahnberechnungen die Masse des einen der drei Körper gleich Null gesetzt werden, und ausserdem hat der eine von den zwei übrigen Körpern eine so überwiegende Masse, dass das ganze Problem auf ein sogenanntes Störungsproblem im engeren Sinne des Wortes reducirt wird.

Aus den zwei letzten Jahrzehnten liegen indessen einige Untersuchungen vor, welche Probleme allgemeinerer Natur behandeln. So hat v. HAERDTL, THIELE, BURRAU und in jüngster Zeit DARWIN in seiner grossen Arbeit über periodische Lösungen auf die Annahme einer überwiegenden Masse verzichtet. Die Masse des dritten Körpers ist indessen gleich Null angenommen worden, weshalb die Aufgabe, falls wir nur die rein

numerische Rechnung ins Auge fassen, sich auf die Berechnung der Bahn dieses Körpers reducirt, während die zwei übrigen sich nach den bekannten Gesetzen des Zweikörperproblemes bewegen.

SEELIGER hat in seinen Untersuchungen über das Sternsystem ζ Cancri analoge Vereinfachungen machen können.

Verf. hat sich die Aufgabe gestellt, die Möglichkeit der Anwendung der mekanischen Integration für Fälle zu untersuchen, wo man alle Vereinfachungen in Bezug auf die Distanzen und Massen der drei Körper aufgeben will, d. h. wenn man sämmtliche Distanzen resp. Massen von derselben Grössenordnung sein lässt. Dass die Rechnung sehr Komplizirterer Natur wird, ist selbstverständlich, da wir hier die Bahnberechnung nicht für *einen* sondern für *zwei* Körper gleichzeitig Schritt für Schritt zu berechnen haben, vorausgesetzt dass wir die Bewegungen auf einen der dreien beziehen. Und es ist ebenfalls klar, dass, wenn wir z. B. mit rechtwinkligen Koordinaten rechnen, wir nichts gewinnen können, wenn wir das Problem als Störungsproblem behandeln, weil die Koordinatenstörungen in kurzer Zeit zu Beträge derselben Grössenordnung wie die Koordinaten selbst steigen müssen.

Um eine Vorstellung von der bei einer direkten numerischen Integration der *Koordinaten* zu gewinnenden Genauigkeit zu erhalten, habe ich die Rechnung vorläufig für einen bekannten Fall, das Zweikörperproblem, ausgeführt und mit den exakten Formeln verglichen.

Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass der Körper N um den Körper M in cirkulärer Bahn bewegt, und bezeichnen mit x und y die Koordinaten des Körpers N in Bezug auf M. Die Bewegungsgleichungen lauten dann:

$$(\alpha) \quad \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -k^2(1+m)\frac{x}{r^3} \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -k^2(1+m)\frac{y}{r^3} \end{aligned}$$

wo k^2 die Gravitationskonstante und m das Verhältniss zwischen den zwei Massen N und M bezeichnet.

Wenn wir den Radius der Bahn, a, gleich 1 setzen und die Zeiteinheit so wählen, dass die ganze Umlaufszeit, T, gleich 100 wird, so bekommen wir aus der Gleichung

$$k^2(1+m)T^2 = 4\pi^2 a^3 :$$

$$K = k(1+m) = \frac{2\pi}{100} = 0.062\,8318\,53$$

und wenn wir $\frac{360°}{100} = 3°,6 = \varphi$ setzen, so erhalten wir für die exakte Lösung:

$$x = \cos\varphi t \qquad y = \sin\varphi t$$

$$\frac{dx}{dt} = -K\sin\varphi t \qquad \frac{dy}{dt} = K\cos\varphi t\,.$$

Wenn wir jetzt die mekanische Integration mit Hülfe der Formeln (α) ausführen und als Anfangspunkt den Augenblick wählen, wo der Körper N sich rechts auf der x-Axe in aufwärts gehender Bewegung befindet, so bekommen wir für die Integrationskonstanten folgende Werthe:

$$x_0 = 1 \qquad y_0 = 0$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = 0 \qquad \left(\frac{dy}{dt}\right)_0 = K.$$

Die mekanische Integration ist für den ersten Kvadranten durchgeführt. Wenn wir die erhaltenen Werthe mit den exakten Formeln vergleichen, so bekommen wir für $t = \frac{T}{4} = 25$:

Durch die mek. Integr.: $\begin{cases} x = -0.000\,0001\,16 \\ \frac{dx}{dt} = -0.062\,8318\,56 \end{cases}$

Aus den exakten Formeln: $\begin{cases} x = 0.000\,0000\,00 \\ \frac{dx}{dt} = -0.062\,8318\,53\,. \end{cases}$

Für die numerische Integration sind die Kräfte bis auf die neunte Decimale berechnet. Der Vergleich zeigt, dass die Integration eine grosse Anzahl Umläufe hätte fortgesetzt werden

können, ohne dass das Resultat z. B. in der fünften Decimale gefährdet würde, eine Genauigkeit, welche für den Zweck derartiger Rechnungen weit über das nöthige hinausgeht.

* * *

Bei der Ausführung der numerischen Rechnung ist ein Umstand in Betracht zu ziehen, welcher bewirkt, dass das Problem sich in einem bestimmten Punkte von der bei astronomisch-mekanischen Rechnungen üblichen Form der mekanischen Integration unterscheidet. Den am nächsten liegenden Vergleich bietet die ENCKESCHE Störungsmethode, welche sich auf die Berechnung rechtwinkliger Koordinaten bezieht. Der Unterschied liegt darin, dass wir in unsrem Falle die *Koordinaten* direkt zu berechnen haben, während bei der ENCKESCHEN Methode die mekanische Integration die *Störungen* der Koordinaten liefert. Da man bei Verwendung der ENCKESCHEN Methode immer von einer oskulirenden Bahn ausgeht, so haben wir beim Anfange der Rechnung die Koordinatenstörungen und deren ersten Derivirten gleich Null zu setzen, eine Vereinfachung, zu welcher sich bei der direkten Berechnung der Koordinaten keine Analogie findet, und hieraus folgt nothwendigerweise eine gewisse Modificirung der gewöhnlichen Formeln für die Berechnung der Integrationskonstanten.

Wenn wir z. B. dem Gange in WATSONS Lehrbuch [1]) folgen und seine Bezeichnungen verwenden, so lautet die Ausgangsformel:

$$
\begin{aligned}
(1)\quad \int f(a+nw)dn = C &+ nf(a) + \\
&+ \tfrac{1}{2}n^2\{f'(a) - \tfrac{1}{6}f'''(a) + \tfrac{1}{30}f^{\mathrm{V}}(a)\ldots\} \\
&+ \tfrac{1}{6}n^3\{f''(a) - \tfrac{1}{12}f^{\mathrm{IV}}(a) + \ldots\} \\
&+ \tfrac{1}{24}n^4\{f^{\mathrm{IV}}(a)\ldots\} + \ldots
\end{aligned}
$$

[1]) Theoretical Astronomy, pagg. 435—443.

und hieraus bekommt man für das Integral zwischen den Grenzen $(-\frac{1}{2})$ und $(i+\frac{1}{2})$:

$$(2)\quad \int_{a-{}^1\!/_2 w}^{a+(i+{}^1\!/_2)w} f(x)dx = w\int_{-{}^1\!/_2}^{i+{}^1\!/_2} f(a+nw)dn =$$

$$= w\,\{'f[a+(i+\tfrac{1}{2})w] + \tfrac{1}{24}f'[a+(i+\tfrac{1}{2})w] -$$

$$- \tfrac{17}{5760}f'''[a+(i+\tfrac{1}{2})w]\ldots\}$$

$$- w\,\{'f(a-\tfrac{1}{2}w) + \tfrac{1}{24}f'(a-\tfrac{1}{2}w) -$$

$$- \tfrac{17}{5760}f'''(a-\tfrac{1}{2}w)\ldots\}.$$

Wenn wir die zweite Parenthese gleich Null setzen, wird das Integral in Tafelwerthen mit nur der oberen Grenze als Argument ausgedrückt. Das heisst, wir bekommen, unter Voraussetzung dass der Werth des Integrals für $n = -\frac{1}{2}$ gleich Null sein soll:

$$(3)\quad w\int^{i+{}^1\!/_2} f(a+nw)dn = w\{'f[a+(i+\tfrac{1}{2}w)] + \tfrac{1}{24}f'[a+(i+\tfrac{1}{2}w)] -$$

$$- \tfrac{17}{5760}f'''[a+(i+\tfrac{1}{2})w]\ldots\}$$

und die Integrationskonstante wird durch

$$(4)\quad 'f(a-\tfrac{1}{2}w) = -\tfrac{1}{24}f'(a-\tfrac{1}{2}w) + \tfrac{17}{5760}f'''(a-\tfrac{1}{2}w)\ldots$$

bestimmt.

Nach derselben Methode wird, unter Annahme desselben Konstantenwerthes:

$$(5)\quad \int_{-{}^1\!/_2}^{i} f(a+nw)dn = 'f(a+iw) - \tfrac{1}{2}f'(a+iw) + \tfrac{11}{720}f'''(a+iw)\ldots$$

Ferner erhalten wir, unter Berücksichtigung von (4), für das Doppelintegral:

$$(6)\quad w^2\iint_{-{}^1\!/_2}^{i+{}^1\!/_2} f(a+nw)dn^2 = w^2\{''f[a+(i+\tfrac{1}{2})w] - \tfrac{1}{24}f[a+(i+\tfrac{1}{2})w] +$$

$$+ \tfrac{17}{1920}f''[a+(i+\tfrac{1}{2})w]\ldots\}$$

$$- w^2\{''f(a-\tfrac{1}{2}w) - \tfrac{1}{24}f(a) +$$

$$+ \tfrac{17}{5760}[2f''(a) + f''(a-w)]\ldots\}.$$

Wenn wir auch hier die zweite Parenthese gleich Null setzen, wird das Doppelintegral ausgedrückt in Werthen mit nur der oberen Grenze als Argument:

$$(7)\quad w^2 \iint\limits^{i+1/2} f(a + nw)dn^2 = w^2\{''f[a + (i + \tfrac{1}{2})w] - \tfrac{1}{24}f[a + (i + \tfrac{1}{2})w] + \\ + \tfrac{17}{1920} f''[a + (i + \tfrac{1}{2})w] \ldots\}.$$

Die Konstante wird bestimmt durch:

$$(8)\quad ''f(a - w) = \tfrac{1}{24}f(a) - \tfrac{17}{1920}\{2f''(a) + f''(a - w)\} \ldots,$$

alles unter der Voraussetzung dass

$$\iint\limits^{-1/2} f(a + nw)dn^2$$

gleich Null gesetzt werden soll.

Wie gestalten sich die Gleichungen (4) und (8), wenn das erste und zweite Integral für $n = -\frac{1}{2}$ nicht gleich Null sein sollen?

In den mir zugänglichen Lehrbüchern, OPPOLZER, TISSERAND, VALENTINER und WATSON, wird dieser Fall nur an einer einzigen Stelle berücksichtigt. WATSON sagt [Theoretical Astronomy, pag. 442]: »If, for $n = -\frac{1}{2}$, neither the single nor the double integral is to be taken eqval to zero, it is only necessary to add the given value of the single integral for this argument to the value of $'f(a - \frac{1}{2}w)$ given by eqvation (4), and to add the given value of the double integral for the same argument to the value of $''f(a - w)$ given by (8).»

Von diesen zwei Behauptungen ist die erste richtig, die andere aber nicht.

Wir nehmen an, dass das erste Integral $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \text{ resp.}\right)$ für $n = -\frac{1}{2}$ den Werth A haben soll, das zweite Integral (x, y resp.) den Werth B.

Aus der Gleichung (2) geht unmittelbar hervor, dass, wenn wir

$$w\{'f(a - \tfrac{1}{2}w) + \tfrac{1}{24}f'(a - \tfrac{1}{2}w) - \tfrac{17}{5760}f'''(a - \tfrac{1}{2}w)\ldots\} = A$$

setzen, d. i.

$$(a) \qquad {}'f(a - \tfrac{1}{2}w) = \frac{A}{w} - \tfrac{1}{24}f'(a - \tfrac{1}{2}w) + \tfrac{17}{5760}f'''(a - \tfrac{1}{2}w)\ldots$$

die Gleichung (3) fortwährend den richtigen Ausdruck für $\int^{i+1/2} f(a + nw)dn$ giebt.

Was dagegen die Gleichung (6) betrifft, so ist sie hergeleitet unter Voraussetzung dass die Gleichung (4) gültig ist; sie ist also, in dieser Form, für den vorliegenden Fall nicht brauchbar. Die vollständigen Ausdrücke können in folgender Weise hergeleitet werden.

Die Konstante C der Gleichung (1) wird bestimmt durch die Bedingung dass

$$w\int^{-1/2} f(a + nw)dn = A\,.$$

Aus (1) erhält man:

$$\int^{0} f(a + nw)dn = C$$

und also

$$\int_{-1/2}^{0} f(a + nw)dn = C - \frac{A}{w}$$

d. i.

$$C = \frac{A}{w} + \int_{-1/2}^{0} f(a + nw)dn\,,$$

wonach (1) folgendes Aussehen bekommt:

$$(1)' \quad \int f(a + nw)dn = \frac{A}{w} + \int_{-1/2}^{0} f(a + nw)dn + nf(a) + \tfrac{1}{2}n^2\{f'(a)\ldots\}\ldots$$

Für die Berechnung des Integrals im rechten Membrum ist die Gleichung (5) bei der jetzt gemachten Annahme in Bezug auf die Integrationskonstante nicht die richtige. Der Vollständige Ausdruck lautet:

$$\int_{-1/2}^{i} f(a + nw)dn = {}'f(a + iw) - \tfrac{1}{12}f'(a + iw) + \tfrac{11}{720}f'''(a + iw)\ldots$$
$$- \{{}'f(a - \tfrac{1}{2}w) + \tfrac{1}{24}f'(a - \tfrac{1}{2}w) - \tfrac{17}{5760}f'''(a - \tfrac{1}{2}w)\ldots\}\,.$$

Im vorliegenden Falle also:

$$\int_{-1/2}^{0} f(a+nw)dn = -\frac{A}{w} + {}'f(a) - \tfrac{1}{12}f'(a) + \tfrac{11}{720}f'''(a)\ldots$$

Durch Einsetzen in (1) bekommt diese Gleichung genau dasselbe Aussehen wie in dem von WATSON behandelten Falle, wo nähmlich $A = 0$.

Setzen wir indessen die Herleitung des Doppelintegrales nach dem WATSON'schen Schema fort, so kommen wir zu folgender Schlussformel:

(9) $$w^2 \int\int_{-1/2}^{i+1/2} f(a+nw)dn^2 =$$

$$= w^2\{''f[a+(i+\tfrac{1}{2})w] - \tfrac{1}{24}f[a+(i+\tfrac{1}{2})w] + \tfrac{17}{1920}f''[a+(i+\tfrac{1}{2})w]\ldots\}$$
$$-\tfrac{1}{2}w^2\{'f(a-\tfrac{1}{2}w) + \tfrac{1}{24}f'(a-\tfrac{1}{2}w) - \tfrac{17}{5760}f'''(a-\tfrac{1}{2}w)\ldots\}$$
$$-w^2\{''f(a-w) - \tfrac{1}{24}f(a) + \tfrac{17}{5760}[2f''(a)+f''(a-w)]\ldots\},$$

welche Gleichung mit (6) nur für den Fall übereinstimmt, dass die zweite Parenthese gleich Null ist, d. h. nur wenn $A = 0$. In dem allgemeinen Falle erhalten wir aus (9):

(9)' $$w^2 \int\int_{-1/2}^{i+1/2} f(a+nw)dn^2 =$$

$$= -\tfrac{1}{2}Aw + w^2\{''f[a+(i+\tfrac{1}{2})w] - \tfrac{1}{24}f[a+(i+\tfrac{1}{2})w] +$$
$$+ \tfrac{17}{1920}f''[a+(i+\tfrac{1}{2})w]\ldots\}$$
$$-w^2\{''f(a-w) - \tfrac{1}{24}f(a) + \tfrac{17}{5760}[2f''(a)+f''(a-w)]\ldots\}.$$

Damit nun das Doppelintegral in (9)' in Werthen mit nur der oberen Grenze als Argument ausgedrückt werden soll und das Integral für $n = -\frac{1}{2}$ den Werth B erhalten soll, müssen wir setzen:

$$\tfrac{1}{2}Aw + w^2\{''f(a-w) - \tfrac{1}{24}f(a) + \tfrac{17}{5760}[2f''(a)+f''(a-w)]\ldots\} = B$$

d. i.

(b) $$''f(a-w) = \left(\frac{B}{w^2} - \frac{1}{2}\frac{A}{w}\right) + \tfrac{1}{24}f(a) -$$
$$-\tfrac{17}{5760}[2f''(a)+f''(a-w)]\ldots$$

Wenn wir der Einfachheit halber $w=1$ annehmen, erhalten die Gleichungen für die Integrationskonstanten folgende einfache Form:

$$(a)' \qquad {}'f(a-\tfrac{1}{2}) = A - \tfrac{1}{24} f'(a-\tfrac{1}{2}) + \tfrac{17}{5760} f'''(a-\tfrac{1}{2}) \ldots$$

$$(b)' \qquad {}''f(a-1) = B - \frac{A}{2} + \tfrac{1}{24} f(a) - \tfrac{17}{5760} [2f''(a) + f''(a-1)] \ldots$$

Handelte es sich um die Berechnung eines definiten Integrals, wo die Funktionswerthe nur vom Argumente (n) abhängig sind, würde die Nichtberücksichtigung der ersten Glieder in $(a)'$ und $(b)'$ die Rechnung nicht gefährden, da man zu den berechneten Integralwerthen für ein bestimmtes Argument i nur zu addiren hatte, für das erste Integral: A, für das zweite Integral: $B + A(i + \tfrac{1}{2})$.

Sind dagegen die zu integrierenden Funktionen wie in unsrem Probleme von den Integralen selbst abhängig, so würde ein Fehler in der Berechnung der Integrationskonstanten die ganze folgende Rechnung verderben, und es ist deshalb nothwendig, anstatt der in den Lehrbüchern gegebenen Formeln, die modificirten (a) und (b) zu gebrauchen.

* * *

Wir gehen jetzt zum Dreikörperprobleme über und nehmen der Einfachheit halber an, dass die Bewegungen in einer Ebene stattfinden.

Bezeichnen wir die drei Körper mit A, C, B, ihre Massen mit m_1, m_0, m_2, und ihre Koordinaten in einem fixen Koordinatensysteme mit ξ_1, η_1, ξ_0, η_0, ξ_2, η_2, so lauten die Bewegungsgleichungen:

$$m_1 \frac{d^2\xi_1}{dt^2} = \frac{\partial\Omega}{\partial\xi_1} \qquad m_0 \frac{d^2\xi_0}{dt^2} = \frac{\partial\Omega}{\partial\xi_0} \qquad m_2 \frac{d^2\xi_2}{dt^2} = \frac{\partial\Omega}{\partial\xi_2}$$

$$m_1 \frac{d^2\eta_1}{dt^2} = \frac{\partial\Omega}{\partial\eta_1} \qquad m_0 \frac{d^2\eta_0}{dt^2} = \frac{\partial\Omega}{\partial\eta_0} \qquad m_2 \frac{d^2\eta_2}{dt^2} = \frac{\partial\Omega}{\partial\eta_2},$$

wo

$$\Omega = k^2\left(\frac{m_1m_2}{\varrho_{12}} + \frac{m_0m_1}{\varrho_{01}} + \frac{m_0m_2}{\varrho_{02}}\right).$$

Die Gleichung der lebendigen Kraft lautet:

$$(m) \qquad m_1 V_1^2 + m_0 V_0^2 + m_2 V_2^2 = 2\Omega + C.$$

Die numerische Rechnung wird dadurch vereinfacht, dass man auf gewöhnliche Weise die Bewegungen af den Schwerpunkt des einen Körpers bezieht, in welchem Falle wir natürlich nur die Bewegungen der zwei anderen Körper zu berechnen haben.

Legen wir also das Koordinatensystem durch den Körper C und bezeichnen wir die Koordinaten der zwei anderen Körper mit x_1, y_1, x_2, y_2 resp., die radii vectores mit r_1, r_2 resp. und die gegenseitige Distanz mit ϱ. Die Bewegungsgleichungen werden:

$$(n) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2x_1}{dt^2} &= -k^2(m_0 + m_1)\frac{x_1}{r_1^3} + k^2m_2\frac{x_2 - x_1}{\varrho^3} - k^2m_2\frac{x_2}{r_2^3} \\ \frac{d^2y_1}{dt^2} &= -k^2(m_0 + m_1)\frac{y_1}{r_1^3} + k^2m_2\frac{y_2 - y_1}{\varrho^3} - k^2m_2\frac{y^2}{r_2^3} \\ \frac{d^2x_2}{dt^2} &= -k^2(m_0 + m_2)\frac{x_2}{r_2^3} - k^2m_1\frac{x_2 - x_1}{\varrho^3} - k^2m_1\frac{x_1}{r_1^3} \\ \frac{d^2y_2}{dt^2} &= -k^2(m_0 + m_2)\frac{y_2}{r_2^3} - k^2m_1\frac{y_2 - y_1}{\varrho^3} - k^2m_1\frac{y_1}{r_1^3}. \end{aligned} \right.$$

Diese Formeln gestatten die numerische Integration in einer Weise, welche durchaus analog ist mit der gewöhnlichen Methode, wenn es sich darum handelt nur einen Körper zu verfolgen.

Wir müssen für die beiden Körper, A und B, gesondert Differenztafeln führen. Sind die Werthe einer jeden der vier Funktionen $\left(\frac{d^2x_1}{dt^2}, \frac{d^2y_1}{dt^2}, \frac{d^2x_2}{dt^2}, \frac{d^2y_2}{dt^2}\right)$ für das Argument i berechnet worden, können wir auf gewöhnliche Weise für das Argument $i + 1$ Werthe von den Integralen (x_1, y_1, x_2, y_2) approximiren. Durch Einsetzen in (n) erhalten wir für $i + 1$ neue Funktionswerthe; worauf die Integrale für das Argument $i + 2$ approximirt werden u. s. w.

Auch der Anfang der Rechnung lässt sich in durchaus gleicher Weise wie bei dem Probleme *einer* relativen Bahn anordnen. Die Konstanten der Integration werden bestimmt durch die Annahmen, welche bezüglich des Anfangsstadiums der

Bewegung gemacht wurden und mit Hülfe der Gleichungen (a) und (b). Die ganze Frage hängt davon ab ob die numerische Rechnung genügende Genauigkeit erreichen kann, ohne dass die Funktionswerthe (die Accelerationen) einer Umrechnung bis ins Unausführbare bedürfen.

Was die Genauigkeit betrifft so giebt uns die Gleichung der lebendigen Kraft immer eine zuverlässige Kontrolle, und bezüglich der Weitläufigkeit der Rechnung giebt der von mir ausgeführte Specialfall klaren Bescheid.

Ich bin von der Annahme ausgegangen, dass die drei Körper beim Beginn der Bewegung auf einer Geraden liegen, welche zur x-Achse genommen wird. Für den Körper A wird gesetzt: $x = -7$, für B: $x = +10$. C liegt wie voraus bestimmt wurde in Origo. Für die Massen der drei Körper habe ich gesetzt: $k^2 m_0 = 2$, $k^2 m_1 = k^2 m_2 = 1$; und für ihre Bewegungen habe ich angenommen, dass A sich abwärts, B aufwärts bewegt und zwar mit solchen Geschwindigkeiten (h_1 und h_2 resp.), dass jeder eine Kreisbahn um C beschreiben würde, falls der andere Körper nicht existirte.

Dann erhalten wir: $h_1 = \sqrt{\frac{3}{7}}$, $h_2 = \sqrt{\frac{3}{10}}$. Die ungestörten Umlaufszeiten wären: $T_1 = 67.18 \ldots$ und $T_2 = 114.71 \ldots$ Für den Beginn der Bewegung wird $\Omega = \frac{324}{595}$, und daraus, mit Hülfe von der Gleichung (m), wo wir natürlich die absoluten und nicht die relativen Geschwindigkeiten einzusetzen haben:

$$C = -0{,}363\,3628.$$

Eine vollständige Darlegung der Rechnungsresultate soll in einem folgenden Aufsatze mitgeteilt werden. Bei dieser Gelegenheit war es nur meine Aufgabe zu zeigen, dass die numerische Integration für das Dreikörperproblem angewandt werden kann auch in dem allgemeinen Falle, wo, um mit SEELIGER zu reden, »die Grösse und gegenseitige Lage der Massen so beschaffen ist, dass alle gegenseitige Anziehungen durch Grössen gegeben sind, die als von derselben Ordnung angesehen werden müssen». Und in diesem Punkte hat die numerische Rechnung eine völlig bejahende Antwort gegeben.

Die Kräfte in dem Formelsysteme (n) sind mit acht Decimalen der Einheit berechnet worden. In keinem einzigen Falle, abgesehen von den vier Anfangswerthen, ist eine Umrechnung nöthig gewesen, und die Kontrolle mit der Gleichung der lebendigen Kraft gestaltet sich für die ersten 40 Intervalle in folgender Weise:

	0	10	20	30	40
$\Sigma m V^2$	0.725 718	0.668 496	0.565 381	0.530 545	0.644 869
2Ω	1.089 076	1.026 859	0.928 744	0.898 910	1.008 231
$2\Omega - \Sigma m V^2$	0.363 368	0.363 363	0.363 363	0.368 365	0.363 362

Das Resultat erweist, dass die Genauigkeit in keiner Beziehung hinter dem, was mit der ENCKESCHEN Methode für den einfacheren Fall zu erreichen ist, zurücksteht, und, was besonders ins Gewicht fällt, es leidet nicht den geringsten Zweifel, dass die Methode auch auf Fälle ausgedehnt werden kann, wo es sich nicht nur um drei sondern um vier oder noch mehrere Körper handelt, ein Resultat, das für die Theorie der mehrfachen Sternsysteme nicht ohne Bedeutung sein dürfte.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1900. N:o 8.
Stockholm.

Meddelanden från Lunds Astronomiska Observatorium. N:o 14.

Bemerkungen zu einem Satz von Leverrier die sekularen Störungen der kleinen Planeten betreffend.

Von ALVAR IDMAN.

[Mitgeteilt am 10. October 1900 durch C. V. L. CHARLIER.]

Im Bande II der Pariser Annalen, Addition III, hat LEVERRIER die saecularen Bewegungen der Jupiter-, Saturn- und Uranusbahn untersucht und hat dabei zwei Formeln abgeleitet, aus welchen es möglich ist die Grenzen der gegenseitigen Neigungen der Bahnen auf einfache Weise zu berechnen. Aus den gefundenen Formeln hat er weiter den Schluss gezogen, dass es zwischen der Sonne und Jupiter eine Stelle giebt von der Art, dass ein äusserst kleiner Planetoid, der sich dort befände, durch die Anziehung von Jupiter und Saturn eine sehr grosse Bahnneigung bekommen könnte. Die Herleitung der LEVERRIERschen Formeln ist kurz angedeutet folgende.

Es mögen die Massen der drei Planeten mit m_1, m_2, m_3 und die halben grossen Axen der Bahnen mit a_1, a_2, a_3 bezeichnet werden; Ω_1, Ω_2, Ω_3 und i_1, i_2, i_3 seien die Knoten und die Neigungen gegen die Ekliptik. Es lassen sich bekanntlich die saecularen Änderungen dieser letzten Elemente, wenn man in dem saecularen Theil der Störungsfunction nur Glieder incl. zweiter Ordnung mitnimmt, aus Differentialgleichungen von folgender Form bestimmen:

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{dp_1}{dt} + \{(a_1a_2) + (a_1a_3)\}q_1 - (a_1a_2)q_2 - (a_1a_3)q_3 = 0 \\ \dfrac{dq_1}{dt} - \{(a_1a_2) + (a_1a_3)\}p_1 + (a_1a_2)p_2 + (a_1a_3)p_3 = 0\,. \end{cases}$$

Durch eine cyclische Vertauschung der Indices 1, 2, 3 erhält man vier analoge Differentialgleichungen und man hat also in allem ein System von sechs homogenen linearen Differentialgleichungen zu integrieren. Die Variabelen p und q sind wie gewöhnlich so eingeführt, dass allgemein $p_\lambda = \operatorname{tg} i_\lambda \,.\, \sin \Omega_\lambda$ und $q_\lambda = \operatorname{tg} i_\lambda \cos \Omega_\lambda$. Die Koefficienten $(a_\mu a_\nu)$, welche den Massen m_ν proportional sind, hängen nur von diesen und den grossen Halbaxen ab und können folglich bei der Integration konstant angenommen werden. Die vollständigen Integrale sind bekanntlich von folgender Form:

$$(2)\quad \begin{cases} p_\lambda = N^{(\lambda)} \sin \beta + N_1^{(\lambda)} \sin (g_1 t + \beta_1) + N_2^{(\lambda)} \sin (g_2 t + \beta_2) \\ q_\lambda = N^{(\lambda)} \cos \beta + N_1^{(\lambda)} \cos (g_1 t + \beta_1) + N_2^{(\lambda)} \cos (g_2 t + \beta_2). \end{cases}$$

Zwischen den Koefficienten bestehen bekanntlich die Relationen:

$$(3)\quad \begin{cases} \{g + (a_1 a_2) + (a_1 a_3)\} N^{(1)} - (a_1 a_2) N^{(2)} - (a_1 a_3) N^{(3)} = 0 \\ -(a_2 a_1) N^{(1)} + \{g + (a_2 a_3) + (a_2 a_1)\} N^{(2)} - (a_2 a_3) N^{(3)} = 0 \\ -(a_3 a_1) N^{(1)} - (a_3 a_2) N^{(2)} + \{g + (a_3 a_1) + (a_3 a_2)\} N^{(3)} = 0, \end{cases}$$

und aus diesen folgt, dass

$$(4)\quad \Delta = \begin{vmatrix} \{g + (a_1 a_2) + (a_1 a_3)\}, & -(a_1 a_2), & -(a_1 a_3) \\ -(a_2 a_1), & \{g + (a_2 a_3) + (a_2 a_1)\}, & -(a_2 a_3) \\ -(a_3 a_1), & -(a_3 a_2), & \{g + (a_3 a_1) + (a_3 a_2)\} \end{vmatrix} = 0.$$

Man sieht gleich, dass eine Wurzel der kubischen Gleichung (4) Null ist. Die drei Wurzeln geben in die Gleichungen (3) eingesetzt die Verhältnisse

$$\frac{N^{(2)}}{N^{(1)}},\ \frac{N^{(3)}}{N^{(1)}},\ \frac{N_1^{(2)}}{N_1^{(1)}},\ \frac{N_1^{(3)}}{N_1^{(1)}},\ \frac{N_2^{(2)}}{N_2^{(1)}},\ \frac{N_2^{(3)}}{N_2^{(1)}}.$$

Setzt man der Kürze wegen mit LEVERRIER

$$\begin{cases} N^{(2)} - N^{(1)} = x \\ N_1^{(2)} - N_1^{(1)} = x_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} N^{(3)} - N^{(1)} = y \\ N_1^{(3)} - N_1^{(1)} = y_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k = (a_3 a_1) - (a_3 a_2) \\ k' = (a_1 a_2) - (a_3 a_2) \\ k'' = (a_2 a_3) - (a_1 a_3), \end{cases}$$

so findet man leicht aus den Gleichungen (3), dass folgende Gleichungen bestehen:

$$(5) \quad \begin{cases} k'x^2 + k''y^2 - (-k + k' + k'')xy = 0 \\ k'x_1^2 + k''y_1^2 - (-k + k' + k'')x_1y_1 = 0 \,. \end{cases}$$

Die willkürlichen Konstanten $N^{(1)}$, $N_1^{(1)}$, $N_2^{(1)}$ und β, β_1, β_2 lassen sich aus dem Anfangszustand berechnen. LEVERRIER nimmt nun an, dass für $t = 0$ β_1 gleich β_2 ist, d. h. dass für diese Zeit die Schnittlinien der drei Planetenbahnen zusammenfallen.

Bezeichnet man mit Φ' und Φ'' die gegenseitigen Neigungen der Bahnebenen der zwei Planeten mit den Massen m_2 und m_3 gegen die des Planeten mit der Masse m_1, so ist bekanntlich näherungsweise

$$(6) \quad \begin{cases} \operatorname{tg}^2 \Phi' = (p_2 - p_1)^2 + (q_2 - q_1)^2 = \\ \qquad = x^2 + x_1^2 + 2xx_1 \cos((g_2 - g_1)t + \beta_2 - \beta_1) \\ \operatorname{tg}^2 \Phi'' = (p_3 - p_1)^2 + (q_3 - q_1)^2 = \\ \qquad = y^2 + y_1^2 + 2yy_1 \cos((g_2 - g_1)t + \beta_2 - \beta_1) \end{cases}$$

und für $t = 0$

$$(7) \quad \begin{cases} \operatorname{tg}^2 \Phi_0' = x^2 + x_1^2 + 2xx_1 \\ \operatorname{tg}^2 \Phi_0'' = y^2 + y_1^2 + 2yy_1 \,. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen (6) und (7) sieht man, dass

$$\begin{cases} \lim \operatorname{tg}^2 \Phi' = \operatorname{tg}^2 \Phi_0' + |4xx_1| \\ \lim \operatorname{tg}^2 \Phi'' = \operatorname{tg}^2 \Phi_0'' + |4yy_1| \,. \end{cases}$$

Die Ausdrücke für $4xx_1$ und $4yy_1$ hat LEVERRIER aus den Gleichungen (5) und (7) abgeleitet und dadurch gefunden

$$(8) \quad \begin{cases} \lim \operatorname{tg} \Phi' = \dfrac{(-k + k' + k'')\operatorname{tg} \Phi_0' + 2k'' \operatorname{tg} \Phi_0''}{\sqrt{(-k + k' + k'')^2 - 4k'k''}} \,, \\ \lim \operatorname{tg} \Phi'' = \dfrac{(-k + k' + k'')\operatorname{tg} \Phi_0'' + 2k' \operatorname{tg} \Phi_0'}{\sqrt{(-k + k' + k'')^2 - 4k'k''}} \,. \end{cases}$$

Seien jetzt die mit Indices 2 und 3 bezeichneten Elemente die von Jupiter und Saturn und die mit 1 bezeichneten diejenigen eines fingirten Planetoiden, dessen grosse Halbaxe eine Wurzel der Gleichung $k' = k''$ ist. Es gelte also

$$(a_1 a_2) - (a_3 a_2) = (a_2 a_3) - (a_1 a_3). \tag{9}$$

Die Gleichungen (8) gehen dann über in

$$\left\{\begin{aligned} \lim \operatorname{tg} \Phi' &= \frac{2k'(\operatorname{tg} \Phi_0' + \operatorname{tg} \Phi_0'') - k \operatorname{tg} \Phi_0'}{\sqrt{k}\sqrt{k - 4k'}}, \\ \lim \operatorname{tg} \Phi'' &= \frac{2k'(\operatorname{tg} \Phi_0' + \operatorname{tg} \Phi_0') - k \operatorname{tg} \Phi_0''}{\sqrt{k}\sqrt{k - 4k'}}. \end{aligned}\right. \tag{10}$$

Die Grösse $k = (a_3 a_1) - (a_2 a_1)$ ist der Masse m_1 proportional und man sieht also aus den Formeln (10), dass für $m_1 = 0$ $\lim \operatorname{tg} \Phi'$ und $\lim \operatorname{tg} \Phi''$ unendlich werden. Von dieser Thatsache aus ist LEVERRIER zu seinem oft citirten Satz erlangt: »Il existe entre Jupiter et le Soleil une position telle, que si l'on y plaçait une petite masse, dans une orbite d'abord peu inclinée a celle de Jupiter, cette petite masse pourrait sortir de son orbite primitive, et atteindre de grandes inclinaisons sur le plan de l'orbite de Jupiter, par l'action de cette planète et de Saturne». Die numerischen Werthe für a_1 hat LEVERRIER aus der Gleichung (9) gefunden $a_1 = 1{,}977\ldots$

Indessen nehmen die Integrale der linearen Differentialgleichungen in diesem speciellen Falle nicht mehr die durch die Gleichungen (2) angegebenen Formen an. Durch Auflösung der kubischen Gleichung $\Delta = 0$ findet man, dass zwei Wurzeln gleich sind. Man bekommt nämlich, in dem man $(a_2 a_1)$ und $(a_3 a_1)$ null setzt und die Relation (9) berücksichtigt, für die Wurzeln folgende Werthe:

$$\left\{\begin{aligned} g_1 &= 0 \\ g_2 &= g_3 = -(a_1 a_2) - (a_1 a_3) = -(a_2 a_3) - (a_3 a_2). \end{aligned}\right.$$

Die Bestimmung der Koefficienten aus den Gleichungen (3) wird aber jetzt nicht mehr möglich. Man bekäme in der That aus den Gleichungen (3) ein widersinniges Resultat.

Die richtigen Integrale der Differentialgleichungen bekommt man einfach so, dass man die vier Differentialgleichungen, die durch cyclische Vertauschung der Indices aus den Gleichungen (1) entstehen, erst integriert, nachdem man $(a_2 a_1)$ und $(a_3 a_1)$ gleich null gesetzt hat, und nachher die gefundenen Integrale in die Differentialgleichungen (1) einsetzt und integriert. Man findet in dieser Weise:

$$(11)\quad \begin{cases} p_2 = N^{(2)} \sin\beta + N_1^{(2)} \sin(gt + \beta_1) \\ q_2 = N^{(2)} \cos\beta + N_1^{(2)} \cos(gt + \beta_1) \\ p_3 = N^{(2)} \sin\beta + N_1^{(3)} \sin(gt + \beta_1) \\ q_3 = N^{(2)} \cos\beta + N_1^{(3)} \cos(gt + \beta_1). \end{cases}$$

Die Differentialgleichungen (1) schreiben sich jetzt so:

$$(12)\quad \begin{cases} \frac{dp_1}{dt} - gq_1 + gN^{(2)} \cos\beta - \\ \qquad - \left\{(a_1 a_2) N_1^{(2)} + (a_1 a_3) N_1^{(3)}\right\} \cos(gt + \beta_1) = 0 \\ \frac{dq_1}{dt} + gp_1 - gN^{(2)} \sin\beta + \\ \qquad + \left\{(a_1 a_2) N_1^{(2)} + (a_1 a_3) N_1^{(3)}\right\} \sin(gt + \beta_1) = 0 \end{cases}$$

und aus diesen erhält man die Integrale:

$$(13)\quad \begin{cases} p_1 = N^{(2)} \sin\beta + N_1^{(1)}\, t \cos(gt + \beta_1) + N_2^{(1)} \sin(gt + \beta_2) \\ q_1 = N^{(2)} \cos\beta - N_1^{(1)}\, t \sin(gt + \beta_1) + N_2^{(1)} \cos(gt + \beta_2) \end{cases}$$

wo $g = -(a_1 a_2) - (a_1 a_3)$ und $N_1^{(1)} = (a_1 a_2) N_1^{(2)} + (a_1 a_3) N_1^{(3)}$ sind. $N_2^{(1)}$ und β_2 sind die Integrationskonstanten.

Wenn man also in dem saecularen Theil der Störungsfunktion nur Glieder incl. zweiter Ordnung mitnimmt, so können, wie man aus den Gleichungen (13) sieht, durch Auftreten eines saecularen Glieds die p und q und folglich auch die Neigung der Planetoidenbahn beliebig grosse Werthe erreichen.

Beiläufig ist zu bemerken, dass die Integrale, wenn die Determinantengleichung $\Delta = 0$ zwei gleiche Wurzeln hat in

allgemeinen gar nicht die durch (13) ausgedrückten Formen annehmen. Wäre es nämlich möglich dass $\Delta = 0$ zwei gleiche Wurzeln hätte, *ohne dass eine Masse null wäre*, so könnte man bekanntlich die Determinante in einer symmetrischen Form, die JACOBI eingeführt hat, darstellen. Von Herrn Prof. SEELIGER bin ich aufmerksam gemacht worden, dass CLEBSCH in Crelles Journalen gezeigt hat, dass auch in diesem Falle die vollständigen Integrale lauter periodische Glieder enthalten. Ein solcher Fall ist aber, wenigstens wenn es sich um drei Planetenbahnen handelt, nicht möglich, wie Herr SEELIGER in Astronomische Nachrichten N:o 2231 gezeigt hat.

In der Teorie der saecularen Änderungen der Excentricitäten und Periheli-längen kommt man, wenn man in dem saecularen Theil der Störungsfunktion nur Glieder incl. zweiter Ordnung mitnimmt, zu analogen Differentialgleichungen und zu ähnlichen Schlüssen wie denjenigen von LEVERRIER betreffend die Neigungsglieder. Man findet für die halbe grosse Achse dieser Bahn a_1 ungefähr gleich 1.86. Man könnte also über die *Excentricität* in Analogie mit dem LEVERRIER'schen Satz den weiteren Satz aussprechen: Es giebt zwischen Jupiter und Saturn eine Stelle von der Art, dass ein kleiner Planetoid, der sich dort bewegte, durch die Anziehung von Jupiter und Saturn sehr grosse Werthe der Bahnexcentricitäten bekommen würde. Im Grunde genommen kann man indessen in beiden singularen Fällen noch gar Nichts über die Maximalwerthe der Neigungen und der Excentricitäten sagen, ehe man die Glieder höherer Ordnung mitnimmt. Sonst bewegte man sich bei diesen Betrachtungen offenbar in einem Kreise. Die Aufgabe aber Glieder höherer Ordnung mitzunehmen würde in diesem Falle, wenn auch nicht unmöglich, doch sehr schwierig.

Zusatz. Der obige kleine Aufsatz ist von einem jungen finländischen Astronomen verfasst, der im Jahre 1896 in München starb, wo er sich zur Zeit, um die Vorlesungen von SEELIGER zu hören, verweilte. Seine Verwandten haben mir den

Aufsatz zur Veröffentlichung übergeben. Die vom Verfasser erwähnten Glieder dritter Ordnung sind von TISSERAND [1]) und vom Unterzeichneten (Bulletin astronomique 1900) berücksichtigt worden.

[1]) Annales de l'Observatoire de Paris T. XVI.

C. V. L. CHARLIER.

Skänker till K. Vetenskaps-Akademiens Bibliotek.

(Forts. från sid. 976.)

Lawrence. *Kansas University.*
Kansas University quarterly. Vol. 9: N:o 1. 1900. 8:o.
Leiden. *Nederlandsche botanische Vereeniging.*
Nederlandsch kruidkundig archief. (3) D. 2: St. 1. 1900. 8:o.
Leipzig. *K. Sächsische Gesellschaft der Wissenschaften.*
Berichte. Philol.-hist. Cl. Bd 52 (1900): 4. 8:o.
Liége. *Société géologique.*
Annales. T. 27: Livr. 3. 1900. 8:o.
Lisboa. *Direcção dos trabalhos geologicos de Portugal.*
DELGADO, J. F. N., & CHOFFAT, P., Carta geologica de Portugal. 1899. 2 blad. Fol.
London. *Geologists' association.*
Proceedings. Vol. 16 (1900): P. 9. 8:o.
— *Chemical Society.*
Journal. Vol. 77—78 (1900): 10. 8:o.
— *The Royal Society.*
Proceedings. Vol. 67 (1900): N:o 435. 8:o.
London, Ontario. *Entomological society of Ontario.*
The Canadian Entomologist. Vol. 32 (1900): N:o 9. 8:o.
Madras. *Observatory.*
Report. 1899/1900. Fol.
Manchester. *Geological society.*
Transactions. Vol. 26 (1899/1900): P. 17—19. 8:o.
Mexico. *Observatorio meteorológico central.*
Boletín mensual. 1899: 1—12; 1900: 1. Fol.
Milano. *R. Istituto Lombardo di scienze e lettere.*
Memorie. Cl. di scienze mat. e nat. Vol. 18: Fasc. 7—10. 1899—1900. 4:o.
Rendiconti. (2) Vol. 32. 1899. 8:o.
Atti della fondazione scientifica Cagnola. Vol. 17. 1900. 8:o.
Montevideo. *Museo nacional.*
Anales. T. 3: Fasc. 14. 1900. 4:o.
Napoli. *Accademia delle scienze fisiche e matematiche.*
Rendiconto. (3) Vol. 6 (1900): Fasc. 5—7. 8:o.
Palermo. *Circolo matematico.*
Rendiconti. T. 14 (1900): Fasc. 5. 8:o.
Paris. *Bureau Central météorologique.*
Bulletin mensuel. Année 1899: N:o 5. 4:o.
— *Société astronomique de France.*
Bulletin. Année 1900: 10. 8:o.
— *Société d'études scientifiques.*
La feuille des jeunes naturalistes. (3) Année 30 (1900): N:o 360. 8:o.
— *Société de géographie.*
La Géographie. Année 1900: N:o 9. 8:o.
— *Société géologique de France.*
Bulletin. (3) T. 28 (1900): N:o 3—5. 8:o.

(Forts. å sid. 1012.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1900. N:o 9.
Stockholm.

Meddelanden från Lunds Astronomiska Observatorium. N:o 15.

Zur Theorie der sekularen Störungen.

Von C. V. L. Charlier.

Mitgeteilt am 14 November 1900.

Die mittlere Bewegung des Perihels und des Knotens eines grossen Planeten hängt wie bekanntlich von einer gewissen algebraischen Gleichung ab, deren Grad gleich der Zahl der betrachtenden Planeten ist. In Bezug auf diese Gleichung hat Laplace zuerst bewiesen, dass sämmtliche Wurzeln derselben reell sind, vorausgesetzt dass alle Planeten sich in derselben Richtung um die Sonne bewegen.

Laplace meinte auch beweisen zu können, dass die betreffende Gleichung niemals gleiche Wurzeln haben könnte, und vermuthete, dass, wenn solche auftreten würden, die Zeit ausserhalb der Cosinus- und Sinus-Zeichen erscheinen würde und die Stabilität somit gefährdet sein.

Bekanntlich beruht dies auf ein Irrthum. Mehrere Verfasser, so viel ich weiss zuerst Weierstrass, haben auf diese Lücke in der Beweisführung aufmerksam gemacht, und den Beweis von Laplace vervollständigt. Die nämliche Gleichung kommt nicht nur bei die Behandlung der sekularen Störungen vor, sondern auch bei dem allgemeineren Problem von den unendlich kleinen Schwingungen, und von diesem allgemeineren Gesichtspunkte aus ist das Problem von den Matematikern behandelt worden. Hierdurch sind indessen verschiedene für das *astronomische* Problem eigenthümliche Schwierigkeiten unberücksichtigt geblieben, und

wahrscheinlich hat man hier die Veranlassung zu suchen, dass diese Frage auch in den besten und vollständigsten Darstellungen von der Mechanik des Himmels nicht behandelt worden ist.

Verfasser glaubt deswegen eine Lücke zu füllen, indem er die Frage von Doppeltwurzeln in der Gleichung für die mittlere Bewegung des Perihels und des Knotens eines Planeten zur Untersuchung aufnimmt.

2. Zuerst stelle ich einige Sätze aus der Determinantentheorie zusammen.

Es sei $\varDelta$ eine Determinante aus n^2 Elementen a_{ij}

$$\varDelta = |a_{ij}|.$$

Dann hat man immer

(1) $$\frac{\partial^2 \varDelta}{\partial a_{il} \partial a_{kj}} = -\frac{\partial^2 \varDelta}{\partial a_{ij} \partial a_{kl}}.$$

Weiter ist

$$\varDelta \frac{\partial^2 \varDelta}{\partial a_{ij} \partial a_{kl}} = \frac{\partial \varDelta}{\partial a_{ij}} \frac{\partial \varDelta}{\partial a_{kl}} - \frac{\partial \varDelta}{\partial a_{il}} \frac{\partial \varDelta}{\partial a_{kj}},$$

aus welcher Gleichung *für* $\varDelta = 0$ folgt:

(2) $$\frac{\partial \varDelta}{\partial a_{ij}} \frac{\partial \varDelta}{\partial a_{kl}} = \frac{\partial \varDelta}{\partial a_{il}} \frac{\partial \varDelta}{\partial a_{kj}},$$

welche Gleichungen im Folgenden eine häufige Anwendung finden.

Ist ein System von homogenen linearen Gleichungen gegeben:

(3) $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0, \end{cases}$$

so ist seine Lösung, wenn

1) $\varDelta = 0$, die Unterdeterminanten erster Ordnung aber nicht alle gleich Null sind, also z. B.

$$\frac{\partial \varDelta}{\partial a_{11}} \neq 0,$$

durch folgende Gleichungen gegeben:

(4) $$\frac{\overline{\partial \varDelta}}{\partial a_{11}} \cdot x_i = \frac{\partial \varDelta}{\partial a_{1i}} x_1 .$$

2) Wenn $\varDelta = 0$ und $\frac{\partial \varDelta}{\partial a_{ij}} = 0$ $\left({i \atop j} = 1, 2, \ldots, n\right)$ die Unterdeterminanten zweiter Ordnung aber nicht alle gleich Null sind, also z. B.

$$\frac{\partial^2 \varDelta}{\partial a_{11} \partial a_{22}} \neq 0 ,$$

so ist die Lösung die folgende:

(5) $$\frac{\partial^2 \varDelta}{\partial a_{11} \partial a_{22}} x_i = \frac{\partial^2 \varDelta}{\partial a_{1i} \partial a_{22}} x_1 + \frac{\partial^2 \varDelta}{\partial a_{11} \partial a_{2i}} x_2$$

$$(i = 3, 4, \ldots, n) .$$

3) Wenn auch alle Unterdeterminanten *zweiter* Ordnung verschwinden, so erhält man:

(6) $$\frac{\partial^3 \varDelta}{\partial a_{11} \partial a_{22} \partial a_{33}} x_i = \frac{\partial^3 \varDelta}{\partial a_{1i} \partial a_{22} \partial a_{33}} x_1 + \frac{\partial^3 \varDelta}{\partial a_{11} \partial a_{2i} \partial a_{33}} x_2 + \frac{\partial^3 \varDelta}{\partial a_{11} \partial a_{22} \partial a_{3i}} x_3$$

u. s. w.

3. Wenn man die folgende Bezeichnung einführt:

(7) $$\begin{cases} B_1(\varLambda_i, \varLambda_j) = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\varLambda_i^2 \varLambda_j^2 \cos \omega d\omega}{\left[\varLambda_i^4 + \varLambda_j^4 - 2\varLambda_i^2 \varLambda_j^2 \cos \omega\right]^{3/2}} \\ B_2(\varLambda_i, \varLambda_j) = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\varLambda_i^2 \varLambda_j^2 \cos 2\omega d\omega}{\left[\varLambda_i^4 + \varLambda_j^4 - 2\varLambda_i^2 \varLambda_j^2 \cos \omega\right]^{3/2}} \end{cases}$$

und die folgenden kanonischen Elemente benutzt:

(8) $$\begin{cases} \varLambda_i = m_i \sqrt{a_i}; \;\; \lambda_i = l_i + \pi_i \\ \xi_i = \sqrt{2\varLambda_i(1 - \sqrt{1 - e_i^2})} \cos \pi_i \\ \eta_i = -\sqrt{2\varLambda_i(1 - \sqrt{1 - e_i^2})} \sin \pi_i \\ p_i = \sqrt{2\varLambda_i \sqrt{1 - e_i^2}(1 - \cos J)} \cos \Omega_i \\ q_i = -\sqrt{2\varLambda_i \sqrt{1 - e_i^2}(1 - \cos J)} \sin \Omega_i , \end{cases}$$

wo rechter Seite die elliptischen Elemente die gewöhnliche Bedeutung haben, so sind bei n-Planeten die Differentialgleichungen der sekularen Störungen der Elemente die Folgenden:

$$(9)\quad \begin{cases} \dfrac{d\xi_i}{dt} = \dfrac{\partial[F]}{d\eta_i}; \quad \dfrac{d\eta_i}{dt} = -\dfrac{\partial[F]}{\partial\xi_i} (i = 1, 2, \ldots n) \\ \dfrac{dp_i}{dt} = \dfrac{\partial[F]}{\partial q_i}; \quad \dfrac{dq_i}{dt} = -\dfrac{\partial[F]}{\partial p_i} (i = 1, 2, \ldots n). \end{cases}$$

Der sekulare Theil $[F]$ der Störungsfunktion hat hier folgende Bedeutung, wenn man wie gewöhnlich sich auf die zweite Potenz der Excentricitäten und Neigungen beschränkt:

$$(10)\quad [F] = \tfrac{1}{2}\Sigma[i, j](\xi_i\xi_j + \eta_i\eta_j) - \tfrac{1}{2}\Sigma|i, j|(p_ip_j + q_iq_j).$$

Und hier ist:

für $i \neq j$

$$(11)\quad \begin{aligned} [i, j] &= -\tfrac{1}{4}\frac{m_im_j}{\sqrt{A_iA_j}} B_2(A_i, A_j), \\ |i, j| &= -\tfrac{1}{4}\frac{m_im_j}{\sqrt{A_iA_j}} B_1(A_i, A_j); \end{aligned}$$

wogegen

$$(12)\quad [i, i] = |i, i| = (i, 1) + (i, 2) + \ldots + (i, n),$$

und hier ist:

$$(13)\quad (i, j) = \tfrac{1}{4}\frac{m_im_j}{A_i} B_1(A_i, A_j).$$

In den obigen Formeln nehmen die ganzen Zahlen i und j alle Werthe von 1 bis n an.

Ich werde mich hier zu den Störungen der Excentricitäten und Neigungen beschränken.

Die Behandlung besteht bekanntlich darin, dass man durch eine ortogonale Substitution, welche die kanonische Form der Differentialgleichungen bewahrt, den Ausdruck für $[F]$ in eine Summe von nur Quadraten umwandelt.

Diese Substitution sei die folgende:

$$(14)\qquad \begin{cases} \xi_1 = \gamma_{11}\Xi_1 + \gamma_{12}\Xi_2 + \ldots + \gamma_{1n}\Xi_n \\ \xi_2 = \gamma_{21}\Xi_1 + \gamma_{22}\Xi_2 + \ldots + \gamma_{2n}\Xi_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \xi_n = \gamma_{n1}\Xi_1 + \gamma_{n2}\Xi_2 + \ldots + \gamma_{nn}\Xi_n , \end{cases}$$

wo zwischen den Koefficienten, weil die Substitution ortogonal ist, folgende Relationen bestehen:

$$(15)\qquad \begin{gathered} \sum_{i=1}^{n} \gamma_{i\mu}\gamma_{i\nu} = 0 = \sum_{i=1}^{n} \gamma_{\mu i}\gamma_{\nu i} \quad (\mu \neq \nu) \\ \sum_{i=1}^{n} \gamma_{i\mu}^2 = 1 = \sum_{i=1}^{n} \gamma_{\mu i}^2 . \end{gathered}$$

Die Elemente η_i werden durch eine Substitution, mit denselben Koefficienten γ in die neuen Elemente Υ_i überführt, und wenn man nun die Koefficienten γ_{ij} geeignet bestimmt, so geht der von ξ und η abhängige Theil der Störungsfunktion in eine Summe von nur Quadraten über, so dass

$$(16)\qquad \sum [i,\, j](\xi_i\xi_j + \eta_i\eta_j) = \sum_{i=1}^{n} s_i(\Xi_i^2 + \Upsilon_i^2) .$$

Die Zahlen s_i, die bekanntlich sämmtlich *positiv* sind (was eine nothwendige Folge davon ist, dass $B_1 > B_2$), sind die Wurzeln der folgenden *Fundamentalgleichung* n:ten Grades:

$$(17)\qquad 0 = D = \begin{vmatrix} [1,\, 1] - s, & [1,\, 2], & \ldots, & [1,\, n] \\ [2,\, 1], & [2,\, 2] - s, & \ldots, & [2,\, n] \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ [n,\, 1], & [n,\, 2], & \ldots, & [n,\, n] - s \end{vmatrix} .$$

Diese Wurzeln sind, wie LAGRANGE zuerst bewiesen hat, sämmtlich reell und positiv; dieselben sind aber nicht nothwendigerweise sämmtlich von einander verschieden.

4. Es sei s_ν eine von den Wurzeln der Fundamentalgleichung, dann erhält man zur Bestimmung der *entsprechenden* $\gamma_{i\nu}$ die folgenden Gleichungen:

$$
(18) \quad
\begin{array}{l}
([1,\,1]-s_\nu)\gamma_{1\nu}+[1,\,2]\gamma_{2\nu}+\ldots+[1,\,n]\gamma_{n\nu}=0\\
[2,\,1]\gamma_{1\nu}+([2,\,2]-s_\nu)\gamma_{2\nu}+\ldots+[2,\,n]\gamma_{n\nu}=0\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
[n,\,1]\gamma_{1\nu}+[n,\,2]\gamma_{2\nu}+\ldots+([n,\,n]-s_\nu)\gamma_{n\nu}=0,
\end{array}
$$

zu welchen Gleichungen noch die folgende kommt:

$$\sum \gamma_{i\nu}^2 = 1 .$$

Sind sämmtliche s_ν von einander verschieden, erhält man n Systeme von der Form (18). Einer vielfachen Wurzel entspricht aber nur ein einziges solches System.

Eine wichtige Rolle in dieser Untersuchung spielt die symmetrische Form der Determinante D. Es ist nämlich, der Definition zufolge,

$$(19) \qquad [i,\,j]=[j,\,i].$$

Nun ist offenbar:

$$(20) \qquad D'(s) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial D}{\partial [i,\,i]},$$

und also, wenn man diese Gleichung mit $\frac{\partial D}{\partial [r,\,r]}$ multiplicirt:

$$\frac{\partial D}{\partial [r,\,r]} D'(s) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial D}{\partial [i,\,i]} \frac{\partial D}{\partial [r,\,r]},$$

wo r einen beliebigen Werth hat.

Da nun $D=0$, so ist nach (2)

$$\frac{\partial D}{\partial [i,\,i]} \times \frac{\partial D}{\partial [r,\,r]} = \frac{\partial D}{\partial [i,\,r]} \frac{\partial D}{\partial [r,\,i]} = \left(\frac{\partial D}{\partial [i,\,r]}\right)^2,$$

der symmetrischen Form zufolge.

Und mithin

$$\frac{\partial D}{\partial [r\,,\,r]} D'(s) = -\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial D}{\partial [i\,,\,r]} \right)^2 . \tag{21}$$

Aus dieser Gleichung kann man nun einen wichtigen Schluss ziehen. Ist nämlich s_ν eine zweifache Wurzel, so müssen die Gleichungen

$$D(s_\nu) = 0$$
$$D'(s_\nu) = 0$$

gleichzeitig bestehen. Aus (21) folgt nun unmittelbar, dass bei einer zweifachen Wurzel

$$\frac{\partial D}{\partial [i\,,\,r]} = 0$$

und zwar für alle Werthe von i und r. Es sind also *bei einer zweifachen Wurzel sämmtliche Unterdeterminanten erster Ordnung gleich Null.*

Umgekehrt folgt, dass, *wenn die Wurzel eine einfache Wurzel ist, so können nicht sämmtliche Unterdeterminanten erster Ordnung verschwinden.*

Aus (20) folgt nämlich, dass nicht sämmtliche Unterdeterminanten von der Form

$$\frac{\partial D}{\partial [i,\, i]}$$

gleichzeitig verschwinden können, wenn $D'(s) \neq 0$.

Aus der Formel

$$D''(s) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 D}{\partial [i,\, i]\, \partial [j,\, j]}$$

folgt ebenfalls, dass bei einer zweifachen Wurzel (bei welcher also $D''(s) \neq 0$) nicht sämmtliche Unterdeterminanten *zweiter* Ordnung verschwinden können u. s. w.

5. Sind sämmtliche Wurzeln einfach, so können also nicht alle Determinanten von der Form

$$\frac{\partial D}{\partial [i, i]}$$

verschwinden. Angenommen also, dass

$$\frac{\partial D}{\partial [1, 1]} \neq 0,$$

so folgt aus (18) die folgende Lösung:

$$\frac{\gamma_{1\nu}}{\frac{\partial D(s_\nu)}{\partial [1, 1]}} = \frac{\gamma_{2\nu}}{\frac{\partial D(s_\nu)}{\partial [1, 2]}} = \ldots = \frac{\gamma_{n\nu}}{\frac{\partial D(s_\nu)}{\partial [1, n]}} = \frac{1}{\sqrt{\sum \left(\frac{\partial D}{\partial [1, i]}\right)^2}}$$

$$\nu = 1, 2, \ldots n.$$

Die Summe unter der Quadratwurzel kann man einfacher schreiben. Es ist nämlich nach (2), weil $D = 0$ (und die Determinante symmetrisch ist),

$$\left(\frac{\partial D}{\partial [1, i]}\right)^2 = \frac{\partial D}{\partial [1, 1]} \frac{\partial D}{\partial [i, i]}. \tag{22}$$

Mithin ist

$$\sum \left(\frac{\partial D}{\partial [1, i]}\right)^2 = \frac{\partial D}{\partial [1, 1]} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial D}{\partial [i, i]} = -\frac{\partial D}{\partial [1, 1]} D'(s).$$

Das vollständige System von Werthen von den Koefficienten γ_{ij}, wenn sämmtliche Wurzeln der Fundmentalgleichungen verschieden sind, ist also das folgende:

$$\frac{\gamma_{11}}{\frac{\partial D(s_1)}{\partial [1, 1]}} = \frac{\gamma_{21}}{\frac{\partial D(s_1)}{\partial [2, 1]}} = \ldots = \frac{\gamma_{n1}}{\frac{\partial D(s_1)}{\partial [n, 1]}} = \frac{1}{\sqrt{-\frac{\partial D(s_1)}{\partial [1, 1]} D'(s_1)}}$$

$$\frac{\gamma_{12}}{\frac{\partial D(s_2)}{\partial [1, 1]}} = \frac{\gamma_{22}}{\frac{\partial D(s_2)}{\partial [2, 1]}} = \ldots = \frac{\gamma_{n2}}{\frac{\partial D(s_2)}{\partial [n, 2]}} = \frac{1}{\sqrt{-\frac{\partial D(s_2)}{\partial [1, 1]} D'(s_2)}}$$

. . . .

$$\frac{\gamma_{1n}}{\frac{\partial D(s_n)}{\partial [1, 1]}} = \frac{\gamma_{2n}}{\frac{\partial (Ds_n)}{\partial [2, 1]}} = \ldots = \frac{\gamma_{nn}}{\frac{\partial D(s_n)}{\partial [n, 2]}} = \frac{1}{\sqrt{-\frac{\partial D(s_n)}{\partial [1, 1]} D'(s_n)}}.$$

Wenn man sich von der Formel (2) bedient, kann man eine interessante Form für die Quadrate der Koefficienten $\gamma_{i\nu}$ erhalten. Mit Hülfe der betreffenden Formel bekommt man nämlich:

$$D'(s_\nu)\gamma_{i\nu}^2 = -\frac{\partial D(s_\nu)}{\partial[i,\ i]}. \tag{23}$$

In dem Falle, dass man die Zeichen der γ-Koefficienten kennt, giebt diese Formel eine bequeme Methode diese Koefficienten zu berechnen unter Anwendung von *nur* symmetrischen Determinantformen.

Aus (23) folgt, dass die Determinanten

$$\frac{\partial D(s_\nu)}{\partial[i,\ i]} (i = 1\,,\ 2\,,\ \ldots\,,\ n)$$

gleichzeitig entweder positiv oder negativ sein müssen.

Allgemeiner ausgedrückt lautet dieser Satz so, dass, *wenn eine symmetrische Determinante mit reellen Elementen von der Form*

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} - s\,, & a_{12}\,, & \ldots\,, & a_{1n} \\ a_{21}\,, & a_{22} - s\,, & \ldots\,, & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}\,, & a_{n2}\,, & \ldots\,, & a_{nn} - s \end{vmatrix}$$

gegeben ist und s_ν einen solchen Werth bezeichnet, für welchen diese Determinante verschwindet, so sind alle Unterdeterminanten von der ersten Ordnung, welche die Form

$$\frac{\partial D(s_\nu)}{\partial a_{ii}}$$

besitzen, sämmtlich von demselben Zeichen.

6. Bezeichnet man mit s_1 eine zweifache Wurzel, so können nach § 4 nicht sämmtliche Unterdeterminanten von der Form

$$\frac{\partial^2 D(s_1)}{\partial[i,\ i]\,\partial[j,\ j]}$$

verschwinden. Angenommen also, dass

$$\frac{\partial^2 D(s_1)}{\partial[1,\ 1]\,\partial[2,\ 2]} \neq 0\,,$$

so hat man nach (5)

$$(24)\quad \frac{\partial^2 D(s_1)}{\partial[1,1]\,\partial[2,2]}\gamma_{i1} = \frac{\partial^2 D(s_1)}{\partial[1,i]\,\partial[2,2]}\gamma_{11} + \frac{\partial^2 D(s_1)}{\partial[1,1]\,\partial[2,i]}\gamma_{21},$$

welche Formel auch für $i = 1$ und $i = 2$ ihre Gültigkeit behält.

Setzt man nun aus dieser Gleichung die Werthe von γ_{i1} in die Gleichung:

$$\sum \gamma_{i1}^2 = 1$$

hinein, so wird

$$(25)\quad \left(\frac{\partial^2 D(s_1)}{\partial[1,1]\,\partial[2,2]}\right)^2 = \gamma_{11}^2 \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 D(s_1)}{\partial[1,i]\,\partial[2,2]}\right)^2 +$$

$$+ \gamma_{21}^2 \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 D(s_1)}{\partial[1,1]\,\partial[2,i]}\right)^2 +$$

$$+ 2\gamma_{11}\gamma_{21} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 D(s_1)}{\partial[1,i]\,\partial[2,2]} \frac{\partial^2 D(s_1)}{\partial[1,1]\,\partial[2,i]}.$$

Ist γ_{11} bestimmt, so erhält man aus dieser Gleichung den Werth von γ_{21}. Einer zweifachen Wurzel entspricht also eine unendliche Schaar von γ-Koefficienten. In diesem Umstande ist die Erklärung zu suchen, warum bei einer zweifachen Wurzel doch *zwei* willkürliche Integrationskonstanten auftreten müssen. Weil nun sämmtliche Unterdeterminanten erster Ordnung verschwinden, so kann man die Relation (2) für die Determinanten zweiter Ordnung benutzen, und es ist also:

$$\left(\frac{\partial^2 D(s_1)}{\partial[1,i]\,\partial[2,2]}\right)^2 = \left(\frac{\partial \frac{\partial D}{\partial[2,2]}}{\partial[1,i]}\right)^2 =$$

$$= \frac{\partial \frac{\partial D}{\partial[2,2]}}{\partial[1,i]} \cdot \frac{\partial \frac{\partial D}{\partial[2,2]}}{\partial[i,1]} = \frac{\partial \frac{\partial D}{\partial[2,2]}}{\partial[1,1]} \frac{\partial \frac{\partial D}{\partial[2,2]}}{\partial[i,i]}$$

$$= \frac{\partial^2 D}{\partial[1,1]\,\partial[2,2]} \cdot \frac{\partial^2 D}{\partial[2,2]\,\partial[i,i]},$$

und ebenfalls

$$\left(\frac{\partial^2 D}{\partial[1,\,1]\,\partial[2.\,i]}\right)^2 = \frac{\partial^2 D}{\partial[1,\,1]\,\partial[2,\,2]}\,\frac{\partial^2 D}{\partial[1,\,1]\,\partial[i,\,i]}.$$

Die letzte Summe in (25) lässt sich in folgender Weise transformiren:

Es ist

$$\frac{\partial^2 D}{\partial[1,\,i]\,\partial[2,\,2]} = -\frac{\partial^2 D}{\partial[1,\,2]\,\partial[2,\,i]} \quad \text{(nach (1))}$$

$$\frac{\partial^2 D}{\partial[1,\,1]\,\partial[2,\,i]} = \frac{\partial^2 D}{\partial[1,\,1]\,\partial[i,\,2]} = -\frac{\partial^2 D}{\partial[1,\,2]\,\partial[i,\,1]}$$

$\therefore$

$$\frac{\partial^2 D}{\partial[1,\,i]\,\partial[2,\,2]}\cdot\frac{\partial^2 D}{\partial[1,\,1]\,\partial[2,\,i]} = \frac{\partial^2 D}{\partial[1,\,2]\,\partial[2,\,i]}\cdot\frac{\partial^2 D}{\partial[1,\,2]\,\partial[i,\,1]}$$

$$= \frac{\partial\frac{\partial D}{\partial[1,\,2]}}{\partial[2,\,i]}\cdot\frac{\partial\frac{\partial D}{\partial[1,\,2]}}{\partial[i,\,1]} = \frac{\partial\frac{\partial D}{\partial[1,\,2]}}{\partial[2,\,1]}\cdot\frac{\partial\frac{\partial D}{\partial[1,\,2]}}{\partial[i,\,i]} \quad \text{nach (2)},$$

$$= \frac{\partial^2 D}{\partial[1,2]\,\partial[2,1]}\cdot\frac{\partial^2 D}{\partial[1,2]\,\partial[i,i]} = -\frac{\partial^2 D}{\partial[1,1]\,\partial[2,2]}\,\frac{\partial^2 D}{\partial[1,2]\,\partial[i,i]}.$$

$\because$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 D}{\partial[1,\,i]\,\partial[2,\,2]}\,\frac{\partial^2 D}{\partial[1,\,1]\,\partial[2,\,i]} = -\frac{\partial^2 D}{\partial[1,\,1]\,\partial[2,\,2]}\sum_{i=1}^{w}\frac{\partial^2 D}{\partial[1,\,2]\,\partial[i,\,i]}. \tag{26}$$

Der Koefficient $\frac{\partial^2 D}{\partial[1,\,1]\,\partial[2,\,2]}$ ist nach der Voraussetzung von Null verschieden und man kann denselben also überall wegdividiren. Die Relation (25) lautet somit:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 D}{\partial[1,\,1]\,\partial[2,\,2]} = \gamma_{11}^2 &\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 D}{\partial[2,\,2]\,\partial[i,\,i]} + \\ + \gamma_{21}^2 &\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 D}{\partial[1,\,1]\,\partial[i,\,i]} - \\ - 2\gamma_{11}\gamma_{21} &\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 D}{\partial[1,\,2]\,\partial[i,\,i]}.\end{aligned} \tag{27}$$

Da nun

$$\frac{\partial D}{\partial s} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial D}{\partial [i, i]},$$

so kann man diese Formel (27) auch in folgender Weise schreiben:

$$(28) \quad \begin{aligned} 0 = \frac{\partial^2 D}{\partial [1, 1] \partial [2, 2]} &+ \gamma_{11}^2 \frac{\partial^2 D}{\partial [2, 2] \partial s} - \\ &+ \gamma_{21}^2 \frac{\partial^2 D}{\partial [1, 1] \partial s} - \\ &- 2\gamma_{11}\gamma_{21} \frac{\partial^2 D}{\partial [1, 2] \partial s}. \end{aligned}$$

7. Aus (28) leitet man folgende *Normalformen* für die Koefficienten γ_{i1} ab.

$$(29) \qquad \alpha) \begin{cases} \gamma_{21} = 0 \\ \gamma_{11}^2 = -\dfrac{\partial^2 D(s)}{\partial [1, 1] \partial [2, 2]} : \dfrac{\partial^2 D(s)}{\partial [2, 2] \partial s}. \end{cases}$$

Die übrigen Koefficienten sind dann durch die Formel (24) gegeben, welche Formel nun lautet:

$$(30) \qquad \frac{\partial^2 D(s)}{\partial [1, 1] \partial [2, 2]} \gamma_{i1} = \frac{\partial^2 D(s)}{\partial [1, i] \partial [2, 2]} \gamma_{11}.$$

β) Die zweite Form werde ich von der ersten durch einen Strich oben unterscheiden:

$$(31) \qquad \begin{cases} \gamma'_{11} = 0 \\ \gamma'^2_{21} = -\dfrac{\partial^2 D(s)}{\partial [1, 1] \partial [2, 2]} : \dfrac{\partial^2 D(s)}{\partial [1, 1] \partial s}. \end{cases}$$

Und die übrigen γ' sind von der folgenden Gleichung bestimmt:

$$(32) \qquad \frac{\partial^2 D(s)}{\partial [1, 1] \partial [2, 2]} \gamma'_{i1} = \frac{\partial^2 D(s)}{\partial [1, 1] \partial [2, i]} \gamma'_{21}.$$

Die Formen α) und β), die ich kurzweg Normalformen nenne, bilden zusammen die vollständige Lösung des vorliegenden Problems, wenn es sich um eine zweifache Wurzel handelt. Die entsprechenden Integrale der Differentialgleichungen bilden zu-

sammen mit den für andere Wurzeln geltenden eine Fundamentalsystem von Integralen, wie ich gleich beweisen will.

Zuerst mache ich auf eine andere Form der Gleichungen (30) und (32) aufmerksam.

Man bekommt nämlich für die Quadrate der γ-Koefficienten folgende symmetrische Formen:

Fall α):

$$\frac{\gamma_{i1}^2}{\frac{\partial^2 D(s)}{\partial[2,\,2]\,\partial[i,\,i]}} = -\frac{1}{\frac{\partial^2 D(s)}{\partial[2,\,2]\,\partial s}} \quad (i = 1\,,\,2\,,\,\ldots\,,\,n)\,. \tag{33}$$

Und für den Fall β):

$$\frac{\gamma_{i1}'^2}{\frac{\partial^2 D(s)}{\partial[1,\,1]\,\partial[i,\,i]}} = -\frac{1}{\frac{\partial^2 D(s)}{\partial[1,\,1]\,\partial s}} \quad (i = 1\,,\,2\,,\,\ldots\,,\,n)\,. \tag{34}$$

Durch die ortogonale Substitution (14) wird die kanonische Form der Differentialgleichungen beibehalten. Man hat somit statt (9)

$$\frac{d\Xi_i}{dt} = \frac{\partial[F]}{\partial\Upsilon_i}\,;\quad \frac{d\Upsilon_i}{dt} = -\frac{\partial[F]}{\partial\Xi_i} \tag{35}$$

d. h. da

$$2[F] = \sum s_i\left(\Xi_i^2 + \Upsilon_i^2\right)$$

$$\frac{d\Xi_i}{dt} = s_i\Upsilon_i\,;\quad \frac{d\Upsilon_i}{dt} = -s_i\Xi_i \tag{35*}$$

und hieraus

$$\Xi_i = M_i \sin(s_i t + \beta_i)$$
$$\Upsilon_i = M_i \cos(s_i t + \beta_i)\,,$$

wo M_i und β_i die Integrationskonstanten bedeuten.

Die Gleichungen (14) lauten nun:

$$\tag{36} \left\{\begin{aligned}
\xi_1 &= \gamma_{11}M_1 \sin(s_1 t + \beta_1) + \quad * \quad + \\
&\quad + \gamma_{13}M_3 \sin(s_3 t + \beta_3) + \ldots + \gamma_{1n}M_n \sin(s_n t + \beta_n) \\
\xi_2 &= \quad * \quad + \gamma_{22}M_2 \sin(s_1 t + \beta_2) + \\
&\quad + \gamma_{23}M_3 \sin(s_3 t + \beta_3) + \ldots + \gamma_{2n}M_n \sin(s_n t + \beta_n) \\
\xi_3 &= \gamma_{31}M_1 \sin(s_1 t + \beta_1) + \gamma_{32}M_2 \sin(s_1 t + \beta_2) + \\
&\quad + \gamma_{33}M_3 \sin(s_3 t + \beta_3) + \ldots + \gamma_{3n}M_n \sin(s_n t + \beta_n) \\
&\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\xi_n &= \gamma_{n1}M_1 \sin(s_1 t + \beta_1) + \gamma_{n2}M_2 \sin(s_1 t + \beta_2) + \\
&\quad + \gamma_{n3}M_3 \sin(s_3 t + \beta_3) + \ldots + \gamma_{nn}M \;\sin(s\;t + \beta_n)
\end{aligned}\right.$$

wo nach (29) und (31)

$$\frac{\partial^2 D}{\partial[2,2]\,\partial s}\gamma_{11}^2 = -\frac{\partial^2 D}{\partial[1,1]\,\partial[2,2]}$$
$$\frac{\partial^2 D}{\partial[1,1]\,\partial s}\gamma_{22}^2 = -\frac{\partial^2 D}{\partial[1,1]\,\partial[2,2]}.$$

Es seien nun

$$\begin{matrix} g_{11}, & g_{12}, & \ldots, & g_{1n} \\ g_{21}, & g_{22}, & \ldots, & g_{2n} \\ . & . & . & . \\ g_{n1}, & g_{n2}, & \ldots, & g_{nn} \end{matrix}$$

irgend ein anderes System von Koefficienten, welche die Gleichungen (18) befriedigen, so dass

$$(37) \qquad \begin{cases} (\xi_1) = \Sigma g_{1i}\Xi_i \\ (\xi_2) = \Sigma g_{2i}\Xi_i \end{cases}$$
etc.

auch eine Lösung von den Differentialgleichungen sind. Dann hat man in Folge der Relationen (30), (32) und (24):

$$(38) \qquad \begin{cases} g_{i1} = \dfrac{\gamma_{i1}}{\gamma_{11}} g_{11} + \dfrac{\gamma_{i2}}{\gamma_{22}} g_{21} \\ g_{i2} = \dfrac{\gamma_{i1}}{\gamma_{11}} g_{12} + \dfrac{\gamma_{i2}}{\gamma_{22}} g_{22}. \end{cases}$$

Die Gleichungen (37) können also in folgender Form geschrieben werden:

$$(\xi_1) = g_{11}(M_1)\sin(s_1 t + (\beta_1)) + g_{12}(M_2)\sin(s_1 t + (\beta_2)) + \\ + \sum_{j=3}^{n} g_{1j}\Xi_j$$

$$(\xi_2) = g_{21}(M_1)\sin(s_1 t + (\beta_1)) + g_{22}(M_2)\sin(s_1 t + (\beta_2)) + \\ + \sum g_{2j}\Xi_j$$

. . . .

$$(\xi_i) = \left(\frac{\gamma_{i1}}{\gamma_{11}} g_{11} + \frac{\gamma_{i2}}{\gamma_{22}} g_{21}\right)(M_1)\sin(s_1 t + (\beta_1)) + \\ + \left(\frac{\gamma_{i1}}{\gamma_{11}} g_{12} + \frac{\gamma_{i2}}{\gamma_{22}} g_{22}\right)(M_2)\sin(s_1 t + (\beta_2)) + \sum_{j=3}^{n} g_{ij}\Xi_j.$$

Wenn nun die Integrationskonstanten M_1, M_2, β_1 und β_2 in (36) so bestimmt werden, dass

$$g_{11}(M_1)\sin(s_1t+(\beta_1))+g_{12}(M_2)\sin(s_1t+(\beta_2))=\gamma_{11}M_1\sin(s_1t+\beta_1)$$
$$g_{21}(M_1)\sin(s_1t+(\beta_1))+g_{22}(M_2)\sin(s_1t+(\beta_2))=\gamma_{22}M_2\sin(s_1t+\beta_2),$$

was immer möglich ist, so bekommt man offenbar

$$(\xi_i)=\xi_i,$$

und hieraus folgt, dass die Integrale (36) ein Fundamentalsystem von Integralen bilden.

Die obigen Auseinandersetzungen beruhen wesentlich darauf, dass die Determinante D eine symmetrische Form bekommt. Wenn eine von den Massen verschwindend ist, so ist dies nicht mehr der Fall, und es ist deswegen möglich, dass bei den *kleinen* Planeten, die so gelegen sind, dass mehrfache Wurzeln von der Gleichung (17) auftreten, die Zeit ausserhalb der trigonometrischen Funktionen zum Vorschein kommen kann.

Skänker till Vetenskaps-Akademiens Bibliotek.

(Forts. fr. sid. 1024.)

Graz. *Naturwissenschaftlicher Verein für Steiermark.*
Mittheilungen. Jahrg. 1899. 8:o.
Greifswald. *K. Universitäts-Bibliothek.*
Akademische Schriften. 112 st. 1899/1900.
Göttingen. *K. Gesellschaft der Wissenschaften.*
Abhandlungen. Math.-phys. Kl. N. F. Bd 1: N:r 4. 1900. 4:o.
» Philol.-hist. Kl. N. F. Bd 4: N:r 1. 1900. 4:o.
Nachrichten. Math.-phys. Kl. 1900: H. 2. 8:o.
» Philol.-hist. Kl. 1900: H. 2. 8:o.
GAUSS, C. F., Werke. Bd 8. 1900. 4:o.
Halle. *Naturwissenschaftlicher Verein für Sachsen und Thüringen.*
Zeitschrift für Naturwissenschaften. Bd 73 (1900/1901): H. 1—2. 8:o.
Harlem. *Société Hollandaise des sciences.*
Archives Néerlandaises. (2) T. 4: Livr. 1. 1900. 8:o.
Heidelberg. *Universitäts-bibliothek.*
Akademische Schriften. 126 st. 1899/1900.
Helsingfors. *Société Finno-Ougrienne.*
Journal 18. 1900. 8:o.
— *Societas pro fauna et flora Fennica.*
Acta. Vol. 16 (1897/1900)). 8:o.
Meddelanden. H. 25 (1898/99). 8:o.
Ithaca. *Sibley college, Cornell university.*
Regular report. 16 (1899/1900). 8:o.
Jena. *Medizinisch-naturwissenschaftliche Gesellschaft.*
Jenaische Zeitschrift f. Naturwissenschaft. Bd 34: H. 2—3. 1900. 8:o.
Kiel. *Kommission zur wissenschaftlichen Untersuchung der deutschen Meere.*
Wissenschaftliche Meeresuntersuchungen. N. F. Bd. 3: Abt. Helgoland: H. 2; Bd 4: H. 1. 1900. 4:o.
Kjöbenhavn. *Dansk meteorologisk Institut.*
Meteorologisk Aarbog. 1897: D. 2; 1899: D. 1. Fol.
Krakau. *Académie des sciences.*
Materyały do klimatografii Galicyi. Rok 1899. 8:o.
Kristiania. *Meteorologisk Institut.*
Klima-Tabeller for Norge. 13. 1900. 8:o.
Oversigt over Luftens Temperatur og Nedbören i Norge. Aar 1899. 8:o.
Lausanne. *Société Vaudoise des sciences naturelles.*
Bulletin. (4) Vol. 36 (1900): N:o 137. 8:o.
Leipzig. *K. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften.*
Berichte. Philol.-histor. Cl. Bd 52 (1900): 5—7. 8:o.

(Forts. å sid. 1104.)

ÖFVERSIGT AF K. SV. VET.-AKAD. FÖRHANDL. 1900. N:o 8.

MEDDELANDEN

FRÅN

LUNDS ASTRONOMISKA OBSERVATORIUM

N:o 16.

ELEMENTE DER GROSSEN UND DER KLEINEN PLANETEN IN BEZUG AUF DIE UNVERÄNDERLICHE EBENE

VON

A. A. PSILANDER

MITGETEILT AM 10. OCTOBER 1900 DURCH C. V. L. CHARLIER

STOCKHOLM
KUNGL. BOKTRYCKERIET. P. A. NORSTEDT & SÖNER
1901

ÖFVERSIGT AF K. SV. VET.-AKAD. FÖRHANDL. 1900. N:o 8.

MEDDELANDEN

FRÅN

LUNDS ASTRONOMISKA OBSERVATORIUM

N:o 16.

ELEMENTE DER GROSSEN UND DER KLEINEN PLANETEN IN BEZUG AUF DIE UNVERÄNDERLICHE EBENE

VON

A. A. PSILANDER

MITGETEILT AM 10. OCTOBER 1900 DURCH C. V. L. CHARLIER

STOCKHOLM
KUNGL. BOKTRYCKERIET. P. A. NORSTEDT & SÖNER
1901

Die Ekliptik zur Fundamentalebene bei Untersuchungen in der Himmelsmechanik zu wählen ist allerdings das gewöhnliche, nicht aber immer das beqvemste und einfachste. — Herr Professor CHARLIER hat auch dem Verfasser vorgeschlagen Elemente zu berechnen in Bezug auf die »Unveränderliche Ebene», wie diese von STOCKWELL in »Memoir on the secular variations of the elements of the orbits of the eight principal planets» bestimmt worden ist. Die Einführung solcher Elemente würde einerseits die Untersuchungen nicht unbedeutend vereinfachen, anderseits gewähre sie die besonderen Eigentümlichkeiten des Sonnensystems leichter zu erkennen, vorausgesetzt dass die Lage jener Unveränderlichen Ebene mit genügender Genauigkeit bestimmt worden sei. Da jedoch keineswegs die Massen der grossen Planeten sicher festgestellt sind und eine Einwirkung der Massen der kleiner Planeten auf die Lage der Unveränderlichen Ebene nicht ausgeschlossen ist, mag die STOCKWELL'sche Ebene nur wie eine angenäherte Unveränderliche Ebene angesehen werden.

Gegenwärtig lässt sich aber keine bessere angeben und da sie angenähert dieselben Vortheile als die wirkliche Unveränderliche Ebene bereitet, ist sie als Grundebene angenommen worden, und die Ekliptikelemente der Planeten zu ihr transformiert worden,

wobei die Elemente der grossen Planeten, Berl. Jahrb. 1900, jene aber der kleinen Planeten Berl. Jahr 1902 entnommen, nötigenfalls auf das mittlere Aeqvinoctium 1900,0 reducirt worden sind. Diese Reduction ist der Kontrolle wegen doppelt ausgeführt und die angewandten Formeln für die Präcessionsrechnungen sind dem OPPOLZER'schen Lehrbuche der Bahnbestimmungen Bd. I, pag. 209. (26) entnommen, da die Konstanten darin praktisch mit denen von der Pariserconferenze 1896 angenommenen zusammenfallen.

Die STOCKWELL'sche Werthe der Elemente der Unveränderlichen Ebene für die Ekliptik und das Aeqvinoctium 1850,0:

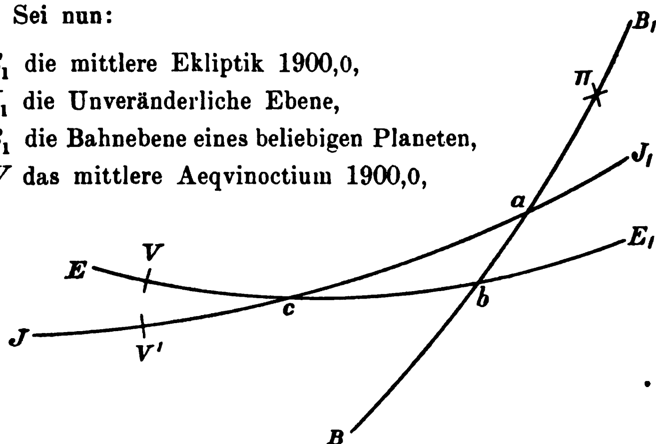
Länge des aufsteigenden Knotens . . . . $(\Pi) = 106° \, 14' \, 6'',00$
und Neigung gegen die Eliptik . . . . $(\gamma) = 1° \, 35' \, 19'',379$

geben gleichfalls auf 1900,0 reducirt:

$$\Pi = 106° \, 42' \, 43'',34$$
$$\gamma = 1° \, 35' \, 9'',918.$$

Sei nun:

EE_1 die mittlere Ekliptik 1900,0,
JJ_1 die Unveränderliche Ebene,
BB_1 die Bahnebene eines beliebigen Planeten,
V das mittlere Aeqvinoctium 1900,0,



Ω die Länge des aufsteigenden Knotens des Planeten,
i die Neigung des Planeten,
ω der Abstand des Perihels π vom Knoten des Planeten.

Dann sind:

$$Vc = \Pi; \quad Vb = \Omega; \quad \pi b = \omega; \quad J_1 c E_1 = \gamma; \quad B_1 b E_1 = i.$$

Sei weiter:
$cV' = cV = \Pi$; und werden ac, aV', πa, $B_1 a J_1$ mit Γ, Ω_0, ω_0, i_0 bezeichnet, endlich ab mit σ, so hat man im sphärischen Dreiecke abc: $bc = \Omega - \Pi$; $\wedge\ acb = \gamma$; $\wedge\ abc = 180 - i$; $\wedge\ bac = i_0$; $ab = \omega - \omega_0 = \sigma$; $ac = \Omega_0 - \Pi = \Gamma$;
wo i_0 also die Neigung der Planetenbahn gegen die Unv. Ebene, und ω_0 der Abstand des Perihels vom aufst. Knoten auf die Unv. Ebene,
und Ω_0 gleichwerthig mit der Länge des aufsteigenden Knotens auf die Unv. Ebene.

Dann wurden diese Elemente ω_0, Ω_0, i_0 sammt Γ aus den Formeln:

$$\sin i_0 \sin \Gamma = \sin i \sin (\Omega - \Pi)$$
$$\sin i_0 \cos \Gamma = - \cos i \sin \gamma + \sin i \cos \gamma \cos (\Omega - \Pi)$$

und

$$\sin i_0 \sin \sigma = \sin \gamma \sin (\Omega - \Pi)$$
$$\sin i_0 \cos \sigma = \cos \gamma \sin i - \sin \gamma \cos i \cos (\Omega - \Pi)$$
$$\Omega_0 = \Gamma + \Pi; \quad \omega_0 = \omega - \sigma; \text{ berechnet.}$$

Diese Rechnung ist siebenstellig durchgeführt worden und eine völlige Übereinstimmung der beiden Logarithmen $\sin i_0$ giebt eine genügende Kontrolle, da die eingehenden Gegebenen γ, Π, i, Ω und ω vorher sorgfältig kontrolliert sind.

In die folgenden Tafeln ist nebst ω_0, Ω_0 und i_0 auch Γ aufgeführt worden, wobei Γ und Ω_0 in Bezug auf den Schnittpunkt der Unv. Ebene mit der mittleren Ekl. 1900,0, beziehentlich das Aeqvinoctium 1900,0 gelten.

Werden die Elementen Π und γ der Korrektionen $d\Pi$ und $d\gamma$ bedürfen, so folgen daraus für die Elementen i_0, Ω_0 und ω_0 aus den gewöhnlichen Differenzialformeln die Korrektionen:

$$di_0 = - \cos \Gamma d\gamma - \sin \gamma \sin \Gamma d\Pi;$$
$$\operatorname{tg} i_0\, d\Omega_0 = \sin \Gamma d\gamma - \sin \gamma \cos \Gamma d\Pi;$$
$$\sin i_0\, d\omega_0 = - \sin \Gamma d\gamma + \sin \gamma \cos \Gamma d\Pi;$$

wo nur in der Formel für $d\Omega_0$, $d\Omega_0 = d\Gamma + \cos \gamma d\Pi$ statt $= d\Gamma + d\Pi$ gesetzt worden ist.

	ω_0	Γ	Ω_0	i_0
Mercur	41° 3′ 59″,9	288° 7′ 25″,0	34° 50′ 8″,3	6° 20′ 57″,5
Venus	76 1 35 ,8	307 26 14 ,6	54 8 57 ,9	2 11 15 ,1
Erde	174 7 35 ,9	180 13 17 ,0	286 56 0 ,3	1 35 19 ,4
Mars	338 8 33 ,7	249 9 47 ,2	355 52 30 ,5	1 40 43 ,3
Jupiter	55 37 40 ,0	210 16 35 ,6	316 59 19 ,0	0 19 54 ,4
Saturn	327 17 21 ,8	16 48 30 ,6	123 31 14 ,0	0 55 48 ,7
Uranus	220 19 40 ,5	204 18 38 ,2	311 1 21 ,5	1 1 49 ,9
Neptun	210 24 3 ,0	86 52 0 ,2	193 34 43 ,5	0 43 24 ,8
1. Ceres	74° 41′ 23″,0	329° 38′ 43″,7	76° 21′ 27″,1	9° 13′ 25″,8
2. Pallas	306 41 16 ,8	68 15 2 ,5	174 57 45 ,8	34 3 53 ,7
3. Juno	238 5 22 ,5	70 30 10 ,9	177 12 54 ,2	12 24 45 ,3
4. Vesta	149 16 6 ,3	355 54 12 ,1	102 36 55 ,4	5 33 17 ,6
5. Astræa	340 47 50 ,7	47 26 5 ,2	154 8 48 ,6	4 7 59 ,6
6. Hebe	233 20 11 ,6	35 26 35 ,6	142 9 18 ,9	13 28 50 ,3
7. Iris	135 43 5 ,4	159 37 22 ,3	266 20 5 ,6	6 55 33 ,6
8. Flora	281 8 1 ,6	5 47 59 ,3	112 30 42 ,7	4 18 7 ,4
9. Metis	15 10 32 ,6	309 48 12 ,7	56 30 56 ,1	4 27 8 ,1
10. Hygiæa	308 42 13 ,4	179 21 51 ,5	286 4 34 ,8	5 23 59 ,2
11. Parthenope	184 8 22 ,6	27 43 37 ,3	134 26 20 ,7	3 9 44 ,3
12. Victoria	58 35 37 ,1	136 56 42 ,0	243 39 25 ,4	9 28 28 ,7
13. Egeria	82 9 16 ,2	292 12 11 ,4	38 54 54 ,7	15 52 53 ,2
14. Irene	96 5 3 ,2	336 15 16 ,2	82 57 59 ,6	7 35 3 ,2
15. Eunomia	94 54 28 ,9	186 54 37 ,6	293 37 20 ,9	13 18 51 ,7
16. Psyche	196 25 2 ,6	73 25 27 ,7	180 8 11 ,0	2 13 14 ,7
17. Thetis	130 38 13 ,2	25 26 49 ,9	132 9 33 ,2	4 8 12 ,1
18. Melpomene	218 2 29 ,5	50 52 58 ,1	157 35 41 ,5	9 4 26 ,9
19. Fortuna	141 26 16 ,1	142 45 26 ,0	249 28 9 ,3	2 28 53 ,1
20. Massalia	195 24 6 ,9	158 21 1 ,2	265 3 44 ,6	1 50 1 ,0
21. Lutetia	269 15 53 ,5	311 46 40 ,5	58 29 23 ,9	1 47 38 ,2
22. Kalliope	356 39 16 ,2	315 15 31 ,5	61 58 14 ,9	12 33 19 ,9
23. Thalia	62 20 45 ,5	314 51 58 ,9	61 34 42 ,2	9 2 12 ,5
24. Themis	186 8 20 ,7	209 47 24 ,8	316 30 8 ,1	1 31 38 ,9
25. Phocæa	84 48 32 ,3	111 14 45 ,8	217 57 29 ,2	22 8 20 ,6
26. Proserpina	216 40 38 ,0	273 43 28 ,0	20 26 11 ,4	3 7 52 ,0
27. Euterpe	77 10 51 ,6	264 31 16 ,2	11 13 59 ,6	0 20 53 ,0

		ω_0	Γ	Ω_0	i_0
28.	Bellona . . .	331° 37′ 36″,9	44° 49′ 7″,4	151° 31′ 50″,8	8° 10′ 7″,6
29.	Amphitrite . .	72 23 25 ,8	237 46 47 ,2	344 29 30 ,6	6 49 10 ,0
30.	Urania	92 58 33 ,4	192 17 39 ,8	299 0 23 ,1	3 37 20 ,2
31.	Euphrosyne . .	63 52 39 ,8	281 54 57 ,5	28 37 40 ,8	26 5 51 ,9
32.	Pomona . . .	319 21 45 ,5	127 50 51 ,6	234 33 34 ,9	6 18 18 ,5
33.	Polyhymnia . .	10 37 8 ,4	226 0 15 ,0	332 42 58 ,4	2 38 51 ,0
34.	Circe	310 3 36 ,3	94 53 54 ,8	201 36 38 ,1	5 21 43 ,6
35.	Leukothea . .	215 0 27 ,3	239 32 55 ,0	346 15 38 ,3	8 53 8 ,5
36.	Atalante . . .	49 2 52 ,5	248 2 50 ,8	354 45 34 ,1	19 11 52 ,7
37.	Fides	84 0 2 ,7	236 17 10 ,3	342 59 53 ,6	3 41 25 ,2
38.	Leda	167 59 45 ,0	187 58 27 ,2	294 41 10 ,6	8 31 54 ,9
39.	Lætitia . . .	197 58 6 ,2	58 5 31 ,3	164 48 14 ,7	9 26 40 ,3
40.	Harmonia . .	274 41 37 ,5	340 1 32 ,4	86 44 15 ,8	2 44 14 ,4
41.	Daphne . . .	36 17 23 ,8	77 38 53 ,7	184 21 37 ,0	15 30 40 ,9
42.	Isis	239 4 24 ,5	332 49 22 ,7	79 32 6 ,1	7 7 33 ,6
43.	Ariadne . . .	7 7 34 ,2	164 52 35 ,4	271 35 18 ,7	4 58 5 ,6
44.	Nysa	324 16 19 ,8	40 47 6 ,3	147 29 49 ,7	2 21 8 ,5
45.	Eugenia . . .	71 42 3 ,5	52 22 12 ,7	159 4 56 ,0	5 30 2 ,8
46.	Hestia	133 37 10 ,9	113 55 19 ,7	220 38 3 ,0	2 25 10 ,2
47.	Aglaja	326 9 12 ,9	241 16 40 ,6	347 59 24 ,0	5 34 31 ,8
48.	Doris	237 29 0 ,0	92 2 2 ,9	198 44 46 ,2	6 22 8 ,1
49.	Pales	105 18 30 ,8	181 58 19 ,4	288 41 2 ,8	4 43 31 ,1
50.	Virginia . . .	163 5 12 ,9	100 44 48 ,5	207 27 31 ,8	2 37 58 ,9
51.	Nemausa . . .	349 29 38 ,7	78 3 2 ,1	184 45 45 ,5	9 30 20 ,0
52.	Europa . . .	330 1 23 ,6	29 1 28 ,1	135 44 11 ,4	6 0 42 ,3
53.	Kalypso . . .	295 52 32 ,9	51 7 1 ,3	157 49 44 ,6	3 58 42 ,3
54.	Alexandra . .	345 3 59 ,7	204 5 24 ,0	310 48 7 ,3	13 13 23 ,6
55.	Pandora . . .	12 53 26 ,1	252 22 4 ,6	359 4 48 ,0	7 32 38 ,6
56.	Melete	89 49 57 ,3	98 29 7 ,9	205 11 51 ,2	8 8 5 ,0
57.	Mnemosyne . .	204 9 5 ,8	99 5 26 ,6	205 48 9 ,9	15 22 1 ,7
58.	Concordia . .	10 18 12 ,9	72 35 0 ,9	179 17 44 ,3	4 19 7 ,0
59.	Elpis	197 43 47 ,9	74 15 3 ,5	180 57 46 ,8	8 3 0 ,5
60.	Echo	243 20 51 ,8	109 44 53 ,6	216 27 36 ,9	3 47 45 ,8
61.	Danaë	11 59 30 ,2	224 11 38 ,4	330 54 21 ,7	19 21 16 ,6
62.	Erato	236 47 14 ,3	55 45 45 ,6	162 28 29 ,0	0 52 50 ,3
63.	Ausonia . . .	303 17 23 ,4	220 57 7 ,7	327 39 51 ,1	6 53 26 ,6
64.	Angelina . . .	186 47 26 ,6	190 58 45 ,5	297 41 28 ,9	2 50 54 ,2

		ω_0	Γ	Ω_0	i_0
65.	Cybele	71° 18′ 30″,5	78° 37′ 12″,5	185° 19′ 55″,8	2° 47′ 57″,2
66.	Maja	65 30 48 ,9	236 16 39 ,6	342 59 23 ,0	3 40 2 ,7
67.	Asia.	88 57 14 ,3	110 31 9 ,4	217 13 52 ,8	6 21 25 ,0
68.	Leto	312 43 24 ,4	287 6 8 ,4	33 48 51 ,7	7 21 41 ,9
69.	Hesperia . . .	273 55 57 ,5	90 38 57 ,6	197 21 40 ,9	8 22 3 ,2
70.	Panopæa . . .	259 59 37 ,1	294 31 9 ,0	41 13 52 ,3	10 53 31 ,8
71.	Niobe	267 32 10 ,7	207 56 47 ,0	314 39 30 ,3	24 40 17 ,8
72.	Feronia . . .	85 10 54 ,7	116 23 41 ,3	223 6 24 ,6	5 54 52 ,0
73.	Klytia	83 15 4 ,5	230 21 50 ,6	337 4 34 ,0	3 4 56 ,2
74.	Galatea	149 31 39 ,6	112 26 36 ,4	219 9 19 ,8	4 20 8 ,3
75.	Eurydice . . .	351 9 13 ,7	237 44 31 ,8	344 27 15 ,1	5 39 40 ,9
76.	Freja	204 49 25 ,4	137 13 5 ,5	243 55 48 ,9	2 54 13 ,6
77.	Frigga	85 5 43 ,0	227 9 10 ,4	333 51 53 ,7	3 14 41 ,2
78.	Diana	155 44 46 ,5	220 24 48 ,6	327 7 31 ,9	9 50 8 ,5
79.	Eurynome . .	180 27 5 ,1	117 39 4 ,6	224 21 47 ,9	5 7 13 ,8
80.	Sappho	127 47 58 ,3	120 58 0 ,1	227 40 43 ,4	9 19 53 ,9
81.	Terpsichore . .	56 45 58 ,1	245 18 30 ,2	352 1 13 ,5	8 26 53 ,4
82.	Alkmene . . .	138 18 34 ,0	248 39 39 ,6	355 22 22 ,9	3 1 11 ,6
83.	Beatrix . . .	181 46 36 ,5	262 38 24 ,9	9 21 8 ,2	4 56 44 ,5
84.	Klio	18 28 56 ,0	215 15 21 ,9	321 58 5 ,3	10 36 27 ,4
85.	Io	112 48 7 ,9	104 22 34 ,9	211 5 18 ,3	12 11 36 ,1
86.	Semele	309 14 48 ,2	332 23 24 ,8	79 6 8 ,2	3 19 53 ,7
87.	Sylvia	270 34 18 ,5	323 29 50 ,8	70 12 34 ,2	9 34 5 ,1
88.	Thisbe	28 46 12 ,6	173 4 45 ,3	279 47 28 ,6	6 49 9 ,6
89.	Julia	45 3 55 ,0	203 2 0 ,1	309 44 43 ,5	17 39 21 ,8
90.	Antiope . . .	274 58 39 ,3	281 18 3 ,5	28 0 46 ,9	1 20 40 ,8
91.	Aegina	106 16 22 ,6	229 47 26 ,7	336 30 10 ,1	2 47 15 ,7
92.	Undina . . .	222 54 18 ,7	355 30 17 ,6	102 13 0 ,9	8 20 56 ,9
93.	Minerva . . .	280 47 21 ,6	248 25 8 ,2	355 7 51 ,6	9 2 48 ,2
94.	Aurora	55 51 26 ,7	247 19 56 ,4	354 2 39 ,8	8 32 56 ,4
95.	Arethusa . . .	145 47 46 ,0	141 36 18 ,7	248 19 2 ,0	14 7 32 ,7
96.	Aegle	203 42 0 ,8	212 56 26 ,9	319 39 10 ,2	17 20 51 ,5
97.	Klotho	257 47 38 ,0	60 46 38 ,4	167 29 21 ,7	10 54 15 ,6
98.	Ianthe	160 21 41 ,3	242 32 2 ,5	349 14 45 ,9	16 14 4 ,6
99.	Dike	205 3 19	289 22 49	36 5 33	13 17 7
100.	Hekate . . .	170 2 8 ,3	28 21 21 ,0	135 4 4 ,3	4 56 45 ,9
101.	Helena	350 52 35 ,8	230 4 41 ,2	336 47 24 ,5	11 7 13 ,1

		ω_0	Γ	Ω_0	i_0
102.	Miriam . . .	128° 2′ 4″,9	220° 20′ 26″,7	227° 3′ 10″,1	5° 42′ 19″,9
103.	Hera	174 58 8,1	40 33 27,9	147 16 11,3	4 6 22,1
104.	Klymene . .	53 8 57,4	263 16 23,3	9 59 6,7	2 35 54,1
105.	Artemis . . .	50 24 39,1	85 24 44,8	192 7 28,1	21 20 3,3
106.	Dione	340 41 11,7	299 3 54,1	45 46 37,5	3 38 1,3
107.	Camilla . . .	284 51 35,9	78 21 38,0	185 4 21,4	9 25 13,1
108.	Hecuba . . .	191 3 36,7	229 43 55,2	336 26 38,5	5 14 53,0
109.	Felicitas . . .	62 56 34,8	247 24 18,8	354 7 2,1	8 29 28,5
110.	Lydia	292 45 21,2	297 3 11,9	43 45 55,3	5 6 20,0
111.	Ate	168 22 38,6	195 2 19,0	301 45 2,3	6 27 9,8
112.	Iphigenia . .	28 5 24,0	203 26 4,0	310 8 47,3	3 59 47,0
113.	Amalthea . .	69 39 58,1	23 49 45,4	130 32 28,8	3 32 33,5
114.	Kassandra . .	330 28 8,8	76 6 44,2	182 49 27,5	4 16 16,0
115.	Thyra	96 43 47,5	199 51 17,4	306 34 0,7	13 4 19,2
116.	Sirona . . .	112 55 27,2	294 4 16,3	40 46 59,7	2 38 1,0
117.	Lomia . . .	53 51 10,7	237 48 29,1	344 31 12,5	15 43 26,5
118.	Peitho . . .	42 30 33,3	289 52 18,5	36 35 1,8	7 5 31,1
119.	Althæa . . .	153 42 22,9	111 54 42,3	218 37 25,6	6 8 22,7
120.	Lachesis . .	247 0 5,3	226 30 38,0	333 13 21,3	8 0 1,3
121.	Hermione . .	287 31 5,1	322 44 54,4	69 27 37,8	6 15 27,7
122.	Gerda	322 35 11,6	125 27 6,7	232 9 50,0	1 52 42,6
123.	Brunhild . .	126 31 19,9	197 32 19,1	304 15 2,4	7 55 5,1
124.	Alceste . . .	28 2 56,6	111 55 20,9	218 38 4,2	3 7 18,4
125.	Liberatrix . .	85 41 13,2	82 33 29,8	189 16 13,2	4 9 13,7
126.	Velleda . . .	355 31 28,7	246 53 48,0	353 36 31,4	3 10 30,6
127.	Johanna . . .	101 30 44,8	274 4 53,2	20 47 36,6	7 59 45,7
128.	Nemesis . . .	309 49 13,8	320 41 24,2	67 24 7,6	4 56 37,9
129.	Antigone . .	99 20 28,8	35 23 49,9	142 6 33,3	10 50 27,6
130.	Elektra . . .	231 2 53,7	41 56 28,0	148 39 11,3	21 45 55,0
131.	Vala	171 25 57,4	303 19 25,3	50 2 8,7	3 54 40,9
132.	Aethra . . .	250 33 57,4	154 52 28,7	261 35 12,1	24 57 57,5
133.	Cyrene . . .	290 0 23,7	208 35 21,7	315 18 5,1	8 34 57,2
134.	Sophrosyne .	87 46 40,4	233 24 5,5	340 6 48,8	12 28 45,5
135.	Hertha . . .	0 2 29,6	214 29 34,7	321 12 18,0	3 26 1,8
136.	Austria . . .	120 53 9,4	88 57 48,6	195 40 31,9	9 23 40,5
137.	Meliboea . . .	98 54 25,0	103 26 57,6	210 9 40,9	13 38 4,2
138.	Tolosa . . .	287 8 36,0	278 59 59,8	25 42 42,7	2 34 4,3

		ω_0	Γ	Ω_0	i_0
139.	Juewa . . .	169° 56′ 5″,5	248° 3′ 29″,5	354° 46′ 12″,8	11° 24′ 54″,3
140.	Siwa	192 46 52 ,7	0 48 30 ,3	107 31 13 ,7	1 36 21 ,6
141.	Lumen . . .	57 56 16 ,5	209 0 3 ,4	315 42 46 ,7	13 20 22 ,0
142.	Polana . . .	292 8 29 ,1	183 0 55 ,0	289 43 38 ,3	3 49 23 ,3
143.	Adria	254 6 47 ,5	221 51 40 ,2	328 34 23 ,6	12 38 8 ,6
144.	Vibilia . . .	303 41 56 ,1	317 15 22 ,8	63 58 6 ,2	3 31 3 ,7
145.	Adeona . . .	44 27 12 ,2	327 15 44 ,3	73 58 27 ,6	11 19 23 ,7
146.	Lucina . . .	143 57 8 ,7	334 40 14 ,5	81 22 57 ,8	11 38 5 ,3
147.	Protogenia . .	106 42 10 ,1	160 33 8 ,2	267 15 51 ,5	3 19 32 ,1
148.	Gallia	248 33 48 ,6	40 39 41 ,6	147 22 24 ,9	22 13 42 ,8
149.	Medusa . . .	157 29 57 ,0	144 10 26 ,3	250 53 9 ,6	1 15 0 ,3
150.	Nuwa	114 10 6 ,7	133 28 46 ,1	240 11 29 ,4	2 53 43 ,1
151.	Abundantia .	145 4 15 ,5	278 12 33 ,5	24 55 16 ,8	6 3 3 ,2
152.	Atala	49 46 23 ,2	287 33 47 ,4	34 16 30 ,7	11 39 1 ,6
153.	Hilda	45 55 28 ,2	130 24 43 ,0	237 7 26 ,3	8 47 52 ,5
154.	Bertha . . .	165 31 9 ,4	286 39 33 ,1	33 22 16 ,4	20 24 1 ,8
155.	Scylla	45 16 48	290 33 4	37 15 48	13 26 26
156.	Xantippe . .	263 0 49 ,3	146 30 10 ,3	253 12 53 ,6	8 44 52 ,6
157.	Dejanira . . .	49 42 5 ,4	310 22 19 ,7	57 5 3 ,1	10 56 53 ,0
158.	Koronis . . .	135 17 0 ,9	177 47 18 ,7	284 30 2 ,0	2 34 58 ,2
159.	Aemilia . . .	322 44 0 ,7	37 27 27 ,2	144 10 10 ,6	4 44 49 ,6
160.	Una	67 58 55 ,6	241 25 33 ,4	348 8 16 ,7	4 21 13 ,2
161.	Athor	301 50 19 ,1	262 3 33 ,5	8 46 16 ,8	9 8 12 ,1
162.	Laurentia . .	121 4 36 ,1	276 27 45 ,0	23 10 28 ,3	5 41 54 ,8
163.	Erigone . . .	277 9 27 ,4	71 48 58 ,8	178 31 42 ,1	4 2 35 ,5
164.	Eva	283 48 26 ,2	329 5 5 ,6	75 47 48 ,9	23 2 0 ,5
165.	Loreley . . .	344 39 15 ,5	195 13 57 ,8	301 56 41 ,1	12 43 23 ,9
166.	Rhodope . . .	258 7 41 ,8	26 5 36 ,7	132 48 20 ,0	10 35 18 ,2
167.	Urda	76 21 40 ,2	104 31 34 ,6	211 14 18 ,0	1 56 47 ,8
168.	Sibylla . . .	157 2 58 ,9	119 52 39 ,2	226 35 22 ,5	5 10 59 ,9
169.	Zelia	345 45 48 ,6	234 36 18 ,0	341 19 1 ,3	6 16 42 ,4
170.	Maria	157 26 46 ,9	193 15 49 ,5	299 58 32 ,8	15 54 21 ,0
171.	Ophelia . . .	59 41 40 ,7	344 58 52 ,9	91 41 36 ,3	0 59 18 ,8
172.	Baucis . . .	2 37 29 ,5	219 37 25 ,0	326 20 8 ,3	11 12 22 ,4
173.	Ino	219 58 40 ,7	46 35 4 ,3	153 17 47 ,6	13 7 31 ,9
174.	Phaedra . . .	290 57 42 ,1	217 27 48 ,8	324 10 32 ,1	13 19 44 ,7
175.	Andromache .	329 40 48 ,5	250 37 37 ,7	357 20 21 ,0	3 19 48 ,1

		ω_0	Γ	Ω_0	i_0
176.	Idunna . . .	178° 32′ 55″,6	98° 3′ 48″,8	204° 46′ 32″,2	22° 51′ 29″,9
177.	Irma	66 14 3 ,2	209 46 6 ,7	316 28 50 ,1	2 35 28 ,9
178.	Belisana . . .	264 22 4 ,7	252 0 46 ,9	358 43 30 ,2	1 39 32 ,2
179.	Klytæmnestra	95 0 9 ,0	151 56 2 ,7	258 38 46 ,0	9 9 44 ,4
180.	Garumna . .	187 12 12 ,0	189 59 42 ,2	296 42 25 ,5	2 24 44 ,1
181.	Eucharis . .	307 8 43 ,2	41 24 15 ,2	148 6 58 ,6	17 22 21 ,6
182.	Elsa	308 21 40 ,5	359 50 33 ,9	106 33 17 ,3	0 35 1 ,0
183.	Istria	260 14 1 ,0	38 5 12 ,4	144 47 55 ,7	25 10 11 ,3
184.	Dejapeja . .	232 22 32 ,9	200 18 18 ,8	307 1 2 ,1	2 32 28 ,7
185.	Eunike . . .	218 30 42 ,2	50 2 52 ,5	156 45 35 ,8	22 11 27 ,8
186.	Celuta . . .	320 29 32 ,6	261 10 41 ,6	7 53 24 ,9	13 20 12 ,5
187.	Lamberta . .	200 36 51 ,0	257 6 13 ,6	3 48 56 ,9	10 39 9 ,2
188.	Menippe . .	61 35 58 ,6	139 59 2 ,9	246 41 46 ,2	12 54 54 ,5
189.	Phtia	149 31 47 ,0	113 5 13 ,2	219 47 56 ,5	5 33 40 ,1
190.	Ismene . . .	271 21 52 ,5	85 5 34 ,7	191 48 18 ,0	5 47 49 ,7
191.	Kolga	217 26 50 ,7	59 54 43 ,9	166 37 27 ,2	10 36 55 ,0
192.	Nausikaa . .	37 26 11 ,3	227 1 19 ,0	333 44 2 ,3	7 50 34 ,9
193.	Ambrosia . .	86 18 49 ,8	238 16 20 ,4	344 59 3 ,7	12 24 6 ,8
194.	Prokne . . .	156 25 17 ,9	56 37 48 ,4	163 20 31 ,7	17 29 2 ,4
195.	Eurykleia . .	130 20 27 ,2	248 53 23 ,9	355 36 7 ,3	7 24 56 ,0
196.	Philomela . .	246 14 3 ,6	318 19 57 ,3	65 2 40 ,6	6 1 17 ,2
197.	Arete	248 36 39 ,9	330 14 15 ,6	76 56 58 ,9	7 24 37 ,8
198.	Ampella . . .	84 47 52 ,8	164 23 8 ,6	271 5 52 ,0	10 49 59 ,6
199.	Byblis . . .	173 57 47 ,7	341 8 29 ,3	87 51 12 ,6	13 54 29 ,7
200.	Dynamene . .	89 40 25 ,2	211 49 16 ,2	318 31 59 ,5	8 12 32 ,6
201.	Penelope . .	162 9 10 ,1	64 56 48 ,4	171 39 31 ,8	4 52 3 ,0
202.	Chryseïs . .	349 0 37 ,1	37 16 10 ,0	143 58 53 ,3	7 30 39 ,1
203.	Pompeja . . .	73 17 0 ,2	222 26 27 ,5	329 9 10 ,9	4 11 27 ,7
204.	Kallisto . . .	40 50 51 ,3	109 30 15 ,5	216 12 58 .9	8 40 48 ,1
205.	Martha . . .	164 15 51 ,7	113 27 50 ,5	220 10 33 ,8	11 11 56 ,7
206.	Hersilia . . .	278 54 34 ,1	60 10 31 ,8	166 53 15 ,1	2 42 31 ,0
207.	Hedda . . .	214 39 45 ,2	258 16 57 ,1	4 59 40 ,5	3 48 32 ,4
208.	Lacrimosa . .	142 18 49 ,2	222 4 58 ,3	328 47 41 ,6	2 36 46 ,5
209.	Dido	261 0 8 ,3	244 0 15 ,2	350 42 58 ,6	7 47 44 ,4
210.	Isabella . . .	27 42 44 ,7	268 59 7 ,3	15 41 50 ,6	5 5 16 ,8
211.	Isolda . . .	164 31 39 ,0	164 46 31 ,3	271 29 14 ,6	5 22 29 ,1
212.	Medea . . .	108 51 47 ,2	200 50 53 ,0	307 33 36 ,4	5 43 33 ,0

		ω_0	Γ	Ω_0	i_0
213.	Lilæa	153° 53′ 5″,0	20° 25′ 49″,5	127° 8′ 32″,9	5° 15′ 58″,5
214.	Aschera . . .	144 54 17 ,2	219 4 13 ,8	325 46 57 ,2	4 32 36 ,5
215.	Oenone . . .	0 40 19 ,2	232 4 10 ,3	338 46 53 ,7	2 9 30 ,9
216.	Kleopatra . .	169 50 40 ,1	115 28 46 ,4	222 11 29 ,7	13 38 43 ,8
217.	Eudora . . .	142 17 46 ,2	65 25 43 ,4	172 8 26 ,7	9 30 53 ,6
218.	Bianca . . .	53 21 0 ,8	69 49 53 ,6	176 32 36 ,9	14 35 10 ,9
219.	Thusnelda . .	131 45 42 ,7	102 23 1 ,4	209 6 44 ,8	11 1 8 ,1
220.	Stephania . .	70 22 25 ,5	156 43 31 ,5	263 26 14 ,8	9 0 6 ,7
221.	Eos	181 46 39 ,6	41 26 42 ,6	148 9 26 ,0	9 36 53 ,6
222.	Lucia	218 42 56 ,2	290 47 47 ,1	37 30 30 ,5	1 2 4 ,1
223.	Rosa	108 22 51 ,7	252 14 19 ,1	358 57 2 ,5	1 45 43 ,1
224.	Oceana . . .	289 35 59 ,1	234 12 48 ,8	340 55 32 ,1	6 39 30 ,9
225.	Henrietta . .	93 32 55 ,5	98 15 15 ,0	204 57 58 ,4	20 51 31 ,0
226.	Weringia . .	147 4 51 ,2	31 45 33 ,5	138 28 16 ,8	14 27 21 ,6
227.	Philosophia .	260 37 19 ,2	218 16 24 ,8	324 59 8 ,1	10 26 32 ,2
228.	Agathe . . .	26 18 32 ,5	196 38 51 ,9	303 21 35 ,2	4 2 2 ,2
229.	Adelinda . .	343 34 6 ,8	243 8 22 ,4	349 51 5 ,7	2 20 36 ,3
230.	Athamantis .	130 53 7 ,5	139 16 6 ,6	245 58 50 ,0	10 33 57 ,4
231.	Vindobona . .	277 39 59 ,2	231 36 0 ,0	338 18 43 ,3	5 58 13 ,0
232.	Russia . . .	35 21 50 ,7	58 35 56 ,8	165 18 40 ,2	5 5 3 ,9
233.	Asterope . .	112 51 10 ,2	125 27 45 ,1	232 10 28 ,4	8 27 47 ,8
234.	Barbara . . .	186 9 19 ,1	41 24 12 ,8	148 6 56 ,1	13 43 8 ,8
235.	Carolina . . .	214 50 27 ,4	312 29 49 ,8	59 12 33 ,1	7 55 13 ,6
236.	Honoria . . .	158 27 28 ,7	91 54 33 ,2	198 37 16 ,5	7 30 6 ,1
237.	Cœlestina . .	200 31 58 ,5	333 49 1 ,3	80 31 44 ,6	8 18 55 ,0
238.	Hypatia . . .	199 42 46 ,6	84 52 11 ,1	191 34 54 ,4	12 9 3 ,5
239.	Adrastea . .	190 12 56 ,7	89 54 9 ,4	196 36 52 ,8	5 55 2 ,7
240.	Vanadis . . .	274 10 15′,8	31 33 19 ,9	138 16 3 ,3	0 34 28 ,0
241.	Germania . .	69 51 56 ,8	168 32 5 ,8	275 14 49 ,1	7 3 27 ,5
242.	Kriemhild . .	266 47 7 ,0	108 57 7 ,7	215 39 51 ,0	11 41 54 ,8
243.	Ida	127 36 56 ,7	196 27 21 ,8	303 10 5 ,1	2 35 7 ,3
244.	Sita	138 16 1 ,8	128 6 9 ,9	234 48 53 ,2	3 31 1 ,6
245.	Vera	341 41 43 ,1	299 59 46 ,9	46 42 30 ,2	4 12 38 ,3
246.	Asporina . .	88 55 37 ,9	61 1 37 ,2	167 44 20 ,5	14 47 57 ,3
247.	Eukrate . . .	57 4 49 ,4	250 23 11 ,7	357 5 55 ,1	25 33 22 ,2
248.	Lameia . . .	351 16 29 ,2	150 57 18 ,0	257 40 1 ,3	5 19 44 ,3
249.	Ilse	45 34 38 .6	221 53 58 ,8	328 36 42 ,1	10 48 33 .4

		ω_0	Γ	Ω_0	i_0
250.	Bettina . . .	73° 5′ 19″,8	271° 59′ 12″,1	18° 41′ 55″,4	12° 47′ 18″,2
251.	Sophia . . .	280 3 48 ,3	57 27 33 ,2	164 10 16 ,6	9 32 13 ,6
252.	Clementina .	140 19 9 ,5	105 13 9 ,6	211 55 52 ,9	10 19 13 ,1
253.	Mathilda . .	139 53 41 ,4	87 3 30 ,6	193 46 14 ,0	1 21 57 ,5
254.	Augusta . . .	251 4 17 ,6	261 26 8 ,9	8 8 52 ,3	4 29 23 ,9
255.	Oppavia . . .	158 34 20 ,1	258 12 51 ,1	4 55 34 ,5	9 42 30 ,0
256.	Walpurga . .	36 17 29 ,7	83 36 55 ,3	190 19 38 ,6	13 1 53 ,7
257.	Silesia . . .	53 7 24 ,1	263 19 26 ,1	10 2 9 ,4	3 29 53 ,6
258.	Tyche	146 30 1 ,0	107 0 58 ,6	213 43 42 ,0	14 37 52 ,0
259.	Aletheia . . .	159 18 7 ,9	338 44 46 ,4	85 27 29 ,8	9 6 11 ,7
260.	Huberta . . .	149 50 49 ,2	75 15 27 ,5	181 58 10 ,9	5 42 24 ,7
261.	Prymno . . .	70 55 1 ,6	341 50 20 ,3	88 33 3 ,6	2 6 2 ,0
262.	Valda	34 11 32 ,6	280 20 26 ,8	27 3 10 ,2	7 14 46 ,6
263.	Dresda . . .	119 4 21 ,0	149 37 1 ,7	256 19 45 ,0	2 22 9 ,5
264.	Libussa . . .	344 30 21 ,5	295 34 27 ,5	42 17 10 ,9	9 39 52 ,1
265.	Anna	253 43 25 ,3	226 19 46 ,3	333 2 29 ,7	26 47 17 ,4
266.	Aline	143 5 23 ,0	134 28 52 ,0	241 11 35 ,3	14 26 0 ,8
267.	Tirza	204 0 36 ,4	217 2 16 ,0	63 44 59 ,4	4 45 59 ,4
268.	Adorea . . .	34 3 52 ,5	39 53 47 ,8	146 36 31 ,2	0 57 56 ,9
269.	Justitia . . .	99 59 37 ,4	66 14 10 ,0	172 56 53 ,3	4 35 43 ,1
270.	Anahita . . .	65 6 16 ,3	160 39 18 ,3	267 22 1 ,6	3 47 54 ,3
271.	Penthesilea .	65 9 1 ,6	215 29 27 ,2	322 12 10 ,6	4 44 55 ,2
272.	Antonia . . .	86 18 22 ,6	270 17 27 ,7	17 0 11 ,0	4 10 34 ,4
273.	Atropos . . .	114 42 11 ,5	55 48 25 ,8	162 31 9 ,1	19 28 10 ,5
274.	Philagoria . .	125 4 49 ,9	337 30 19 ,9	84 13 3 ,2	2 9 50 ,8
275.	Sapientia . .	18 38 17 ,3	40 39 30 ,9	147 22 14 ,3	3 25 49 ,6
276.	Adelheid . .	269 49 0 ,0	108 36 32 ,0	215 19 15 ,4	22 3 46 ,1
277.	Elvira . . .	101 19 10 ,7	158 3 47 ,7	264 46 31 ,1	2 26 2 ,4
278.	Paulina . . .	144 56 7 ,6	306 28 1 ,1	53 10 44 ,5	6 46 21 ,4
279.	Thule	272 11 31 ,2	289 59 51 ,4	36 42 34 ,8	1 18 30 ,7
280.	Philia	92 43 59 ,0	252 54 48 ,4	359 37 31 ,7	7 46 6 ,5
281.	Lucretia . . .	32 32 49 ,0	267 12 4 ,1	13 54 47 ,4	5 9 47 ,3
282.	Clorinde . .	286 24 18 ,1	45 7 53 ,7	151 50 37 ,0	7 49 43 ,4
283.	Emma . . .	53 10 33 ,5	195 55 47 ,4	302 38 30 ,7	9 33 15 ,8
284.	Amalia . . .	47 29 58 ,7	135 7 35 ,3	241 50 18 ,6	9 6 48 ,3
285.	Regina . . .	14 36 36 ,6	203 26 32 ,8	310 9 16 ,1	18 43 33 ,0
286.	Iclea	233 19 34 ,3	46 23 38 ,7	153 6 22 ,0	16 45 54 ,5

		ω_0	Γ	Ω_0	i_0
287.	Nephtys . . .	111° 30′ 40″,9	41° 19′ 56″,0	148° 2′ 39″,3	8° 46′ 40″,5
288.	Glauke . . .	72 43 59 ,5	22 12 21 ,1	128 55 4 ,4	2 49 20 ,1
289.	Nenetta . . .	171 44 35 ,6	89 36 53 ,4	196 19 36 ,8	6 27 20 ,0
290.	Bruna . . .	107 40 32 ,6	259 54 57 ,2	6 37 40 ,5	22 26 55 ,8
291.	Alice	275 25 7 ,5	108 51 17 ,4	215 34 0 ,8	1 34 56 ,2
292.	Ludovica . .	293 34 1 ,0	290 46 46 ,8	37 29 30 ,1	14 14 6 ,8
293.	Brasilia . . .	86 45 49 ,8	311 15 35 ,4	57 58 18 ,7	14 39 54 ,6
294.	Felicia . . .	170 57 45 ,6	39 36 11 ,7	146 18 55 ,0	4 56 41 ,2
295.	Theresia . . .	140 7 1 ,8	174 13 6 ,8	280 55 50 ,1	4 14 51 ,8
296	Phaëtusa . .	188 20 8 ,1	75 54 22 ,8	182 37 6 ,1	0 26 32 ,2
297.	Cecilia . . .	354 22 23 ,9	219 20 8 ,3	326 2 51 ,7	8 44 10 ,6
298.	Baptistina . .	145 54 40 ,9	247 51 39 ,2	354 34 22 ,5	6 43 15 ,7
299.	Thora	125 52 19 ,2	157 31 56 ,8	264 14 40 ,1	2 56 3 ,1
300.	Geraldina . .	9 1 10 ,7	209 32 51 ,7	316 15 35 ,1	1 26 2 ,5
301.	Bavaria . . .	106 49 36 ,7	50 13 47 ,2	156 56 30 ,6	3 42 30 ,6
302.	Clarissa . . .	75 18 54 ,8	238 8 6 ,6	344 50 50 ,0	3 59 58 ,5
303.	Josephina . .	82 45 7 ,8	228 40 56 ,7	335 23 40 ,0	7 51 31 ,5
304.	Olga	164 55 10 ,0	56 47 17 ,1	163 30 0 ,4	14 51 55 ,5
305.	Gordonia . .	233 25 28 ,1	122 0 36 ,1	228 43 19 ,4	5 2 54 ,7
306.	Unitas . . .	156 38 15 ,9	43 31 5 ,5	150 13 48 ,9	6 1 16 ,1
307.	Nike	322 1 8 ,3	353 10 57 ,2	99 53 40 ,6	4 32 15 ,5
308.	Polyxo . . .	89 52 42 ,9	96 43 1 ,8	203 25 45 ,1	4 13 7 ,0
309.	Fraternitas . .	350 49 33 ,1	232 28 42 ,6	339 11 26 ,0	4 41 33 ,4
310.	Margarita . .	302 23 26 ,2	142 7 54 ,5	248 50 37 ,8	4 11 41 ,6
311.	Claudia . . .	75 23 56 ,3	313 57 5 ,7	60 39 49 ,0	1 57 32 ,3
312.	Pierretta . . .	267 15 39 ,3	251 26 34 ,1	358 9 17 ,4	9 28 27 ,1
313.	Chaldæa . . .	305 24 4 ,9	77 34 1 ,2	184 16 44 ,5	11 8 31 ,6
314.	Rosalia . . .	178 40 7 ,1	71 25 6 ,6	178 7 49 ,9	11 57 56 ,6
315.	Constantia . .	130 25 40 ,7	95 26 30 ,7	202 9 14 ,0	1 58 16 ,3
316.	Goberta . . .	276 13 20 ,2	49 3 45 ,8	155 46 29 ,1	0 56 9 ,2
317.	Roxane . . .	124 27 21 ,2	104 52 41 ,3	211 35 24 ,6	1 15 45 ,0
318.	Magdalena . .	265 43 52 ,8	63 50 56 ,3	170 33 39 ,6	9 44 2 ,1
319.	Leona	207 46 52 ,1	90 43 49 ,5	197 26 32 ,9	10 40 7 ,4
320.	Katharina . .	134 37 32 ,7	122 31 8 ,4	229 13 51 ,7	10 4 45 ,2
321.	Florentina . .	69 30 44 ,5	257 49 16 ,9	4 32 0 ,3	2 27 17 ,8
322.	Phæo	105 36 24 ,4	152 16 5 ,3	258 58 48 ,6	9 21 0 ,8
323.	Brucia . . .	293 9 41	349 38 7	96 20 51	17 47 9

	ω_0	Γ	Ω_0	i_0
324. Bamberga . .	45° 20′ 15″,1	217° 28′ 14″,2	324° 10′ 57″,5	12° 31′ 20″,7
325. Heidelberga .	82 27 28 ,4	230 25 10 ,9	337 7 54 ,2	9 28 57 ,6
326. Tamara . . .	240 48 33 ,7	281 46 22 ,9	28 29 6 ,3	23 25 1 ,3
327. Columbia . .	312 17 6 ,1	238 2 16 ,5	344 44 59 ,8	7 51 54 ,2
328. Gudrun . . .	107 55 58 ,7	241 41 30 ,2	348 24 13 ,6	16 49 48 ,4
329. Svea	34 22 28 ,8	77 4 49 ,8	183 47 33 ,1	15 35 3 ,7
330. Adalberta . .	$\sigma = -4° 18′ 42″$	248 7 49	355 50 33	20 40 0
331. Etheridgea . .	349 7 0 ,0	261 25 56 ,3	8 8 39 ,6	6 9 23 ,8
332. Siri	327 40 39 ,2	253 22 54 .5	0 5 37 ,9	2 53 44 ,5
333. Badenia . . .	33 46 34 ,0	230 7 39 ,1	336 50 22 ,4	4 39 39 ,7
334. Chicago . . .	221 47 27 ,7	40 23 22 ,9	147 6 6 ,2	3 18 40 ,6
335. Roberta . . .	125 35 40 ,1	56 6 56 ,6	162 49 40 ,0	4 2 28 ,8
336. Lacadiera . .	18 4 36 ,0	138 48 19 ,4	245 31 2 ,7	6 44 26 ,4
337. Devosa . . .	105 57 43 ,9	238 58 31 ,7	345 41 15 ,0	8 34 0 ,6
338. Budrosa . . .	106 54 16 ,4	181 25 46 ,5	288 8 29 ,8	7 37 46 ,9
339. Dorothea . .	147 41 48 ,2	76 34 56 ,4	183 17 39 ,8	9 24 19 ,8
340. Eduarda . .	57 57 47 ,1	261 30 50 ,5	8 13 33 ,8	4 40 29 ,3
341. California . .	308 0 46 ,5	266 8 30 ,2	12 51 13 ,6	5 33 7 ,5
342. Endymion . .	213 51 51 ,9	134 58 43 ,8	241 41 27 ,1	8 22 8 ,6
343. Ostera . . .	35 45 26 ,7	263 26 56 ,2	10 9 39 ,5	3 5 5 ,4
344. Desiderata . .	237 46 20 ,4	298 9 6 .2	44 51 49 ,5	17 50 47 ,7
345. Tercidina . .	219 17 43 ,6	114 14 5 ,6	220 56 48 ,9	10 16 57 ,5
346. Hermentaria .	290 13 17 ,2	342 36 22 ,4	89 19 5 ,8	7 13 47 ,0
347. Pariana . . .	86 29 55 ,0	336 8 51 ,2	82 51 34 ,5	10 14 15 ,3
348. May	5 31 53 ,5	340 55 38 ,2	87 38 21 ,6	8 13 31 ,6
349. Dembowska .	351 39 32 ,4	175 25 11 ,7	282 7 55 ,0	7 58 35 ,5
350. Ornamenta . .	331 30 54 ,9	342 56 34 ,1	89 39 17 ,5	23 17 20 ,4
351. Yrsa	29 36 37 ,7	351 30 39 ,5	98 13 22 ,9	7 38 45 ,4
352. Gisela . . .	129 56 1 ,8	152 49 45 ,8	259 32 29 ,1	4 41 52 ,0
353. Ruperto-Carola	319 56 4 ,6	354 57 2 ,1	101 39 45 ,5	3 57 27 ,6
354. Eleonora . .	1 45 47 ,2	36 52 22 ,1	143 35 5 ,4	17 4 39 ,9
355. Gabriella . .	110 38 35 ,0	229 26 24 ,3	336 9 7 ,6	5 12 43 ,5
356. 1893 G. . . .	84 14 35 ,3	239 57 21 ,9	346 40 5 ,3	8 56 49 ,1
357. 1893 J. . . .	228 6 27 ,3	35 12 20 ,2	141 55 3 ,5	12 46 2 ,1
358. 1893 K. . . .	221 38 28 ,0	92 54 56 ,7	199 37 40 ,0	3 14 10 ,1
359. 1893 M. . . .	$\sigma = -17° 0′ 13″$	246 54 8	353 36 51	5 23 59
360. 1893 N. . . .	279 59 39 ,6	30 58 43 ,0	137 41 26 ,4	10 14 52 ,5

		ω_0	Γ	Ω_0	i_0
361.	1893 P. . . .	82° 27′ 39″,2	265° 44′ 23″,3	12° 27′ 6″,6	12° 38′ 6″,5
362.	1893 R. . . .	42 46 40 ,3	269 21 46 ,4	16 4 29 ,7	7 56 31 ,7
363.	1893 S. . . .	305 41 12 ,1	305 54 17 ,0	52 37 0 ,3	4 53 52 ,1
364.	1893 T. . . .	311 25 15 ,8	357 58 1 ,5	104 40 44 ,8	4 24 54 ,0
365.	1893 V. . . .	202 32 50 ,8	86 5 25 ,4	192 48 8 ,7	12 31 11 ,6
366.	Vincentina . .	321 12 8 ,6	234 15 26 ,1	340 58 9 ,4	11 26 24 ,1
367.	1893 AA. . .	76 20 18 ,0	313 14 37 ,3	59 57 20 ,7	1 37 28 ,2
368.	1893 AB. . .	76 23 52 ,5	131 54 19 ,8	238 37 3 ,1	8 46 28 ,5
369.	Aëria	268 48 0 ,8	346 1 16 ,9	92 44 0 ,3	11 11 1 ,3
370.	1893 AC. . .	67 6 0 ,4	183 34 11 ,9	290 16 55 ,2	9 26 34 ,5
371.	Bohemia . . .	339 14 46 ,7	177 52 48 ,5	284 35 31 ,8	8 58 11 ,9
372.	1893 AH. . .	116 13 54 ,0	219 20 22 ,2	326 3 5 ,5	24 52 43 ,1
373.	1893 AJ. . .	354 18 42 ,4	252 16 1 ,9	358 58 45 ,3	15 52 21 ,5
374.	1893 AK. . .	14 15 11 ,9	121 29 42 ,3	228 12 25 ,7	9 41 34 ,8
375.	1893 AL. . .	348 45 26 ,8	226 36 19 ,3	333 19 2 ,6	17 0 17 ,4
376.	1893 AM. . .	317 21 53 ,2	192 1 27 ,1	298 44 10 ,4	6 57 47 ,4
377.	1893 AN. . .	180 18 1 ,9	116 9 58 ,9	222 52 42 ,2	7 12 28 ,5
378.	1893 AP. . .	143 47 57 ,8	135 36 24 ,0	242 19 7 ,4	8 1 21 ,2
379.	1894 AQ. . .	121 36 18 ,6	122 22 1 ,9	229 4 45 ,2	1 44 28 ,2
380.	1894 AR. . .	241 26 20 ,0	344 39 55 ,0	91 22 38 ,3	4 37 50 ,8
381.	1894 AS. . .	142 11 19 ,4	21 11 13 ,2	127 53 56 ,5	10 53 16 ,4
382.	1894 AT. . .	273 19 52 ,6	204 4 30 ,2	310 47 13 ,5	8 50 50 ,7
383.	1894 AU. . .	332 21 25 ,1	328 36 52 ,6	75 19 36 ,0	1 10 22 ,8
384.	Burdigala . .	46 14 38 ,4	285 53 9 ,9	32 35 53 ,3	5 0 17 ,9
385.	Ilmatar . . .	190 34 23 ,2	233 1 44 ,3	339 44 27 ,7	14 36 43 ,3
386.	Siegena . . .	212 34 0 ,5	64 20 11 ,7	171 2 55 ,0	19 30 52 ,2
387.	Aqvitania . .	151 18 19 ,9	23 54 40 ,5	130 37 23 ,8	16 30 15 ,1
388.	1894 BA. . .	348 42 16 ,0	237 5 5 ,6	343 47 48 ,9	7 15 20 ,0
389.	1894 BB. . .	262 10 36 ,6	176 34 50 ,3	283 17 33 ,6	9 42 5 ,1
390.	1894 BC. . .	190 40 44 ,3	196 36 45 ,7	303 19 29 ,0	13 39 34 ,5
391.	Ingeborg . .	141 29 45 ,2	109 28 40 ,5	216 11 23 ,8	23 32 2 ,1
392.	Wilhelmina .	129 32 8 ,8	110 32 13 ,4	217 14 56 ,8	16 40 57 ,9
393.	1894 BG. . .	79 58 28 ,8	113 46 53 ,6	220 29 36 ,9	15 26 42 ,5
394.	1894 BH. . .	276 46 22 ,0	310 25 34 ,3	57 8 17 ,6	5 6 53 ,4
395.	1894 BK. . .	12 24 57 ,6	161 23 29 ,2	268 6 12 ,6	4 59 42 ,7
396.	1894 BL. . .	5 27 4 ,4	157 45 11 ,4	264 27 54 ,7	4 1 46 ,6
397.	1894 BM. . .	130 49 46 ,4	127 28 11 ,3	234 10 54 ,6	13 38 10 ,0

		ω_0	Γ	Ω_0	i_0
398.	1894 BN. .	$\sigma = -0° 10' 46''$	177° 45′ 56″	284° 28′ 39″	21° 45′ 3″
399.	1895 BP. .	186° 33′ 6″,2	235 5 56 ,1	341 48 39 ,5	13 58 59 ,3
400.	1895 BU. .	225 37 57 ,4	216 53 45 ,7	323 36 29 ,0	11 50 25 ,9
401.	Ottilia . .	196 19 14 ,9	277 30 59 ,7	24 13 43 ,0	5 40 48 ,6
402.	1895 BW. .	9 1 10 ,1	26 12 23 ,1	132 55 6 ,4	10 23 31 ,7
403.	1895 BX. .	242 46 38 ,2	144 41 40 ,7	251 24 24 ,0	10 23 6 ,9
404.	1895 BY. .	119 52 33 ,1	344 24 53 ,3	91 7 36 ,7	12 30 6 ,3
405.	1895 BZ. .	301 39 46 ,6	152 44 49 ,5	259 27 32 ,9	13 11 35 ,3
406.	1895 CB. .	41 46 1 ,4	202 20 22 ,9	309 3 6 ,2	5 37 57 ,5
407.	1895 CC. .	81 6 8 ,9	186 59 39 ,3	293 42 22 ,7	9 6 44 ,4
408.	1895 CD. .	102 30 45 ,6	190 54 15 ,1	297 36 58 ,4	10 39 20 ,7
409.	1895 CE. .	345 59 38 ,0	140 55 29 ,4	247 38 9 ,7	12 24 0 ,5
410.	1896 CH. .	145 55 8 ,7	347 41 17 ,8	94 24 1 ,1	7 50 36 ,1
411.	1896 CJ. .	193 58 15 ,7	1 32 25 ,4	108 15 8 ,8	17 51 18 ,9
412.	Elisabetha .	88 31 37 ,0	0 1 9 ,1	106 43 52 ,5	12 12 12 ,0
413.	Edburga . .	249 1 37 ,2	358 13 3 ,7	104 55 47 ,1	17 17 19 ,2
414.	1896 CN. .	300 28 16 ,1	8 5 13 ,0	114 47 56 ,4	8 4 45 ,0
415.	1896 CO. .	288 30 26 ,2	26 30 3 ,6	133 12 46 ,9	6 39 27 ,7
416.	Vaticana . .	201 21 47 ,2	306 14 22 ,0	52 57 5 ,3	11 55 47 ,9
417.	1896 CT. .	330 59 49 ,9	106 36 41 ,5	213 19 24 ,8	6 51 8 ,9
418.	1896 CV. .	116 58 35 ,5	149 12 36 ,3	255 55 19 ,6	8 7 7 ,9
419.	1896 CW. .	23 48 13 ,0	138 47 5 ,1	245 29 48 ,4	5 0 48 ,9
420.	Bertholda .	195 46 59 ,8	147 35 26 ,6	254 18 10 ,0	7 57 0 ,4
421.	Zähringia .	193 34 14 ,2	92 49 48 ,7	199 32 32 ,1	7 46 42 ,4
422.	Berolina . .	350 58 4 ,5	245 19 29 ,5	352 2 12 ,8	5 25 43 ,8
423.	1896 DB. .	204 40 15 ,3	318 16 38 ,5	64 59 21 ,8	9 59 36 ,1
424.	1896 DF. .	332 4 29 ,3	351 8 42 ,7	97 51 26 ,0	6 37 41 ,6
425.	1896 DC. .	138 58 34 ,1	293 25 58 ,9	40 8 42 ,3	3 8 11 ,8
426.	1897 DH. .	223 38 52 ,0	203 29 43 ,9	310 12 27 ,3	21 4 20 ,9
427.	1897 DJ. .	8 47 1 ,0	189 15 23 ,4	295 58 6 ,8	6 41 44 ,8
428.	Monachia .	28 13 20 ,2	256 22 7 ,0	3 4 50 ,3	6 24 19 ,1
429.	1897 DL. .	136 24 58 ,7	121 45 36 ,5	228 28 19 ,9	10 32 54 ,1
430.	1897 DM. .	171 27 40 ,7	146 30 31 ,9	253 13 15 ,2	15 51 11 ,6
431.	1897 DN. .	161 12 8 ,6	58 34 19 ,2	165 17 2 ,6	0 23 6 ,7
432.	1897 DO. .	173 39 30 ,5	339 16 52 ,8	85 59 36 ,2	10 36 53 ,9
433.	Eros . . .	179 47 15 ,6	194 41 59 ,8	301 24 43 ,1	12 21 15 ,4
434.	Hungaria . .	119 14 37 ,5	71 34 48 ,4	178 17 31 ,7	22 0 41 ,0

	ω_0	Γ	Ω_0	i_0
435. 1898 DS. .	14° 12′ 53″,6	232° 55′ 57″,3	339° 38′ 40″,6	2° 17′ 26″,9
436. 1898 DT. .	31 1 54 ,6	241 12 41 ,0	347 55 24 ,3	19 20 37 ,7
437. 1898 DP. .	54 26 15 ,2	160 57 30 ,2	267 40 13 ,5	8 52 26 ,5
438. 1898 DU. .	93 37 40 ,8	289 32 53 ,4	36 15 36 ,7	5 43 21 ,2
439. Ohio . . .	228 12 10 ,7	100 12 50 ,7	206 55 34 ,0	19 26 39 ,8
440. Theodora .	178 57 0 ,9	182 49 30 ,6	289 32 13 ,9	3 10 42 ,5
441. 1898 ED. .	198 52 39 ,2	152 38 12 ,0	259 20 55 ,3	9 25 6 ,7
442. 1899 EE. .	73 22 49 ,2	37 1 3 ,3	143 43 46 ,6	4 42 59 ,5
443. 1899 EF. .	5 47 17 ,7	92 56 9 ,6	199 38 52 ,9	3 42 22 ,6
444. Gyptis . .	150 26 4 ,9	97 54 10 ,0	204 36 53 ,4	10 41 47 ,5
445. Edna . .	80 3 56 ,5	186 3 30 ,2	292 46 13 ,6	22 59 36 ,6
446. 1899 ER. .	288 53 23 ,2	287 47 44 ,7	34 30 28 ,1	10 0 57 ,4
447. 1899 ES. .	333 34 31 ,0	311 19 55 ,2	58 2 38 ,6	3 37 45 ,9
[ ]. 1894 BD.	19 8 9 ,4	303 25 47 ,2	50 8 30 ,5	2 19 36 ,7
449. 1899 EU. .	64 18 38 ,9	319 41 24 ,6	66 24 8 ,0	1 43 45 ,1
1892 S.	$\sigma =$ 20° 49′ 34″	230 44 45	337 27 28	4 14 4
1893 C.	$\sigma =$ — 10 33 54	204 19 6	311 1 49	4 56 58
1893 D.	$\sigma =$ 3 58 25	30 37 52	137 20 36	10 20 59
1893 U.	$\sigma =$ — 4 21 45	338 2 51	84 45 34	6 19 29
1893 X.	$\sigma =$ — 73 53 25	251 46 15	358 28 58	0 55 53
1893 Y.	$\sigma =$ 158 20 8	175 59 17	282 42 0	1 18 10
1894 AW. . . .	$\sigma =$ — 19 40 42	255 24 41	2 7 24	4 41 48
1896 CU. . . .	$\sigma =$ 8 44 4	145 55 7	252 37 50	7 6 31
1896 DD. . . .	$\sigma =$ — 2 23 1	355 40 45	102 23 28	1 17 23
1896 DE. . . .	$\sigma =$ — 1 15 10	187 30 9	294 12 52	11 5 6
1898 DW. . . .	$\sigma =$ 4 58 55	127 19 29	234 2 13	15 35 29
1898 DY. . . .	$\sigma =$ 21 22 21	131 25 14	238 7 58	4 5 26
1898 DZ. . . .	$\sigma =$ 13 9 59	146 7 33	252 50 16	5 5 56
1898 EA. . . .	$\sigma =$ 2 52 42	123 24 49	230 7 32	28 14 21

432. Die Elemente in Astr. Nachr. N:o 3656 sind benutzt worden, weil da die Elemente dieses Planeten in Berl. Jahr. von ihrem Berechner als unsicher bezeichnet werden.

BIHANG TILL K. SVENSKA VET.-AKAD. HANDLINGAR. Band 26. Afd. I. N:o 6.

MEDDELANDEN

FRÅN

LUNDS ASTRONOMISKA OBSERVATORIUM

N:o 17.

UNTERSUCHUNG ÜBER DIE ALLGEMEINEN JUPITER-STÖRUNGEN DES PLANETEN (119) ALTHÆA

VON

J. EHLERS

MITGETEILT AM 10. OKTOBER 1900
GEPRÜFT VON A. LINDSTEDT UND C. V. L. CHARLIER

STOCKHOLM
KUNGL. BOKTRYCKERIET. P. A. NORSTEDT & SÖNER
1901

I.

Die der Berechnung zu Grunde gelegten Elemente der Althæa sind dem Berliner Jahrbuch für das Jahr 1899 direkt entnommen; die Elemente des Jupiter habe ich aus dem XII Bande der Pariser Annalen erhalten und dabei sind nur die sekulären Störungen und die beiden grossen Ungleichheiten langer Periode mitgenommen. Die Jupiterelemente sind für dieselbe Epoche wie die Althæa-Elemente berechnet und auf dasselbe Aequinoctium reducirt.

(119) Althæa. **Jupiter.**

Epoche und Oskulation 1897, April 9. 0^h Berlin.

Althæa		Jupiter
$c = 200^\circ\, 18'\, 13'',4$		$c' = 142\ 25'\ 2'',8$
$\pi = 12\ 31\ 44\ ,6$	Mittl. Aequ. 1900,0	$\pi' = 13\ 6\ 47\ ,0$
$\theta = 203\ 49\ 23\ ,6$	Mittl. Aequ. 1900,0	$\theta' = 99\ 26\ 18\ ,5$
$i = 5\ 44\ 18\ ,7$	Mittl. Aequ. 1900,0	$i' = 1\ 18\ 31\ ,3$
$\varphi = 4\ 41\ 59\ ,8$		$\varphi' = 2\ 46\ 51\ ,1$
$\log a = 0,4117380$		$\log a' = 0,7162520$
$\log n = 2,9323847$		$\log n' = 2,4758358$
$\log e = 8,9134830$		$\log e' = 8,6858874$

Für die Jupitermasse habe ich denselben Wert, den Herr Prof. CHARLIER in seiner Abhandlung: »Untersuchung über die allgemeinen Jupiter-störungen des Planeten Thetis» angewandt, nämlich $m' = \frac{1}{1047,42}$.

Das Verhältnis der mittleren Bewegungen

$$\mu = \frac{n'}{n} = 0,3495031 \text{ giebt die Vielfachen:}$$

$$\mu = 0,3495031 \qquad 3\mu = 1,0485093$$

$$2\mu = 0,6990062 \qquad 4\mu = 1,3980124$$

$5\mu = 1{,}7475155$	$9\mu = 3{,}1455279$
$6\mu = 2{,}0971186$	$10\mu = 3{,}4950310$
$7\mu = 2{,}4465217$	$11\mu = 3{,}8445341$
$8\mu = 2{,}7960248$	$12\mu = 4{,}1940372$

Der kleinste Divisor kommt also beim Argument $1-3\mu$ vor, wo $1-3\mu = -0{,}0485093$, aus welchem Grunde die Glieder mit den Argumenten $0-3\mu$, $1-3\mu$, $2-3\mu$, $2-6\mu$ und $3-6\mu$ genauer berechnet sind. Um die übrigen kleinen Divisoren zu entdecken entwickle ich μ in Kettenbruch:

$$\mu = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{7 + \text{etc.}}}}}}}$$

Die nächsten Divisoren, die sehr klein sind, sind also

$$7-20\mu = +0{,}009938$$
$$29-83\mu = -0{,}008757$$
$$36-103\mu = +0.001181\,,$$

die aber ohne praktische Bedeutung sind.

II.

Ich habe in dieser Abhandlung die Jupiter-störungen nach den von HANSEN in drei Abhandlungen entwickelten Methoden angegeben, welche mit dem Titel: »Auseinandersetzung einer zweckmässigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten» in den Abhandlungen der königlichen sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, Bd V, VI und VII, aufgenommen sind. Im Folgenden werden diese Abhandlungen mit I, II und III bezeichnet: neben wird die Seite angegeben, von welcher die angewandten Formeln geholt sind.

Mit Hülfe der Formeln (I. 107) fanden sich

$$\Psi = 116^\circ\ 9'\ 9''{,}1 \qquad \Pi = 156^\circ\ 52'\ 28''{,}2$$
$$\Phi = 11\ 49\ 52\ {,}8 \qquad \Pi' = 157\ 31\ 19\ {,}4 \qquad J = 6^\circ\ 11'\ 39''{,}50\,;$$

dann aus den Formeln

$$\alpha = \frac{a'}{a} \quad k \sin K = \cos J \sin \Pi'$$
$$k \cos K = \cos \Pi'$$
$$k_1 \sin K_1 = \sin \Pi'$$
$$k_1 \cos K_1 = \cos J \cos \Pi'$$
$$p \sin P = 2\alpha^2 \frac{e'}{e} - 2\alpha k \cos (\Pi - K)$$
$$p \cos P = 2\alpha \cos \varphi' \cdot k_1 \sin (\Pi - K_1)$$
$$v \sin V = 2\alpha \cos \varphi \cdot k \sin (\Pi - K)$$
$$v \cos V = 2\alpha \cos \varphi \cos \varphi' \cdot k_1 \cos (\Pi - K_1)$$
$$w \sin W = p - 2\alpha^2 \frac{e'}{e} \sin P$$
$$w \cos W = v \cos (V - P)$$
$$w_1 \sin W_1 = v \sin (V - P)$$
$$w_1 \cos W_1 = 2\alpha^2 \frac{e'}{e} \cos P$$
$$R = 1 + \alpha^2 - 2\alpha^2 \frac{e'}{e}$$
$$\gamma_2 = \alpha^2 e'^2$$

folgende konstanten Hülfgrössen

$$\log \alpha = 0{,}3045140$$

$K = 157\ 38'\ 25'',20$	$\log k = 9{,}9996302$
$K_1 = 157\ 24\ 11\ ,82$	$\log k_1 = 9{,}9978306$
$P = 92\ 41\ 49\ ,50$	$\log p = 9{,}8954005$
$V = 359\ 13\ 48\ ,42$	$\log v = 0{,}6014208$
$W = 266\ 33\ 48\ ,55$	$\log w = 0{,}6052478$
$W_1 = 266\ 44\ 54\ ,04$	$\log w_1 = 0{,}6013251$

$$\log R = 0{,}7029094$$
$$\log \gamma_2 = 7{,}9808028\ .$$

Als Kontrolle habe ich die Gleichung

$$w^2 + w_1^2 = v^2 + \left(2\alpha^2 \frac{e'}{e}\right)^2 + p^2 - 2p \cdot \left(2\alpha^2 \frac{e'}{e} \sin P\right)$$ angewandt.

Endlich geben die Formeln

$$f \sin (F - P) = w \sin (\varepsilon + W) - ep$$
$$f \cos (F - P) = w_1 \cos (\varepsilon + W_1)$$

$$\gamma_0 = R - 2e\cos\varepsilon + e^2\cos^2\varepsilon + e'f\cos F$$

$$D = \gamma_0 + \tfrac{1}{2}\gamma_2$$

die folgenden Werte von f, F und D für 8 Werte von ε, die gleichförmig über den Umkreis verteilt sind.

ε	log f	log D	$F-\varepsilon$	log $\sqrt{D}+f$	log $\sqrt{D}-f$
0°	0,6120306	0,7068668	359° 31′ 28″,86	0,4815311	9,9997506
45°	0,6094284	0,7059480	358 30 25 ,15	0,4806970	0,0027062
90°	0,6019003	0,7038130	358 18 32 ,29	0,4784346	0,0121482
135°	0,5977092	0,7021151	358 54 21 ,00	0,4770360	0,0159490
180°	0,5981665	0,7014479	359 25 18 ,00	0,4769501	0,0135339
225°	0,5989929	0,7017974	359 43 16 ,90	0,4772300	0,0128182
270°	0,6010536	0,7033655	360 9 11 ,02	0,4781227	0,0126774
315°	0,6070411	0,7056331	360 16 41 ,13	0,4800794	0,0066633

Betreffend die Anzahl der Teile (p), in welche der Kreis bei der Quadratur geteilt wird, habe ich 8 für ausreichend gehalten, aus mehreren Gründe dazu veranlasst, zum Beispiel die geringe Excentricität und Inklination und der Mangel sehr kleiner Divisoren bei diesem Planet. Während der Ausführung dieser Arbeit erschien eine Abhandlung von SCHULTZ-STEINHEIL, »Ueber die Teilung des Kreises in der HANSEN'schen Störungsteorie» in Öfversigt af K. Sv. Vet. Akad. Förhandl. 1899, N:o 4, wo diese Sache diskutirt wird und Tafeln zu der Berechnung von p gegeben werden. Aus diesen Tafeln habe ich $p = 7{,}04$ berechnet für eine Genauigkeit von 0″,1 in dem schiesslichen Störungsresultat.

Ich habe jedoch hier unten (pag. 26) diejenigen Koefficienten der Argumenten—1—3 und 2—6, welche für $p=8$ nicht erhalten werden, genähert berechnet. Das grösste hieraus entstehende Glied im Resultat wurde 0″,14 (pag. 69).

Als Kontrolle der vorhergehenden Rechnung habe ich aus der Gleichung (I 168).

$$\left(\frac{\Delta}{a}\right)^2 = D - f\cos(\varepsilon' - F) + \tfrac{1}{2}\gamma_2\cos 2\varepsilon'$$

für $\varepsilon' = \varepsilon = 30°$ log $\left(\frac{\Delta}{a}\right)$ berechnet. Die Rechnung gab

$\log \frac{\varDelta}{a} = 0{,}0011533$. Daneben habe ich für dasselbe ε und ε' aus den folgenden Formeln $\log \frac{\varDelta}{a}$ berechnet:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} v &= \cot (45 - \tfrac{1}{2}\varphi) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\varepsilon & \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} v' &= \cot (45^\circ - \tfrac{1}{2}\varphi') \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\varepsilon' \\ r &= a\,(1 - e \cos \varepsilon) & r' &= a'\,(1 - e' \cos \varepsilon') \\ u &= \pi - \theta + v & u' &= \pi' - \theta' + v' \\ \operatorname{tg}(\lambda - \theta) &= \operatorname{tg} u \cos i & \operatorname{tg}(\lambda' - \theta') &= \operatorname{tg} u' \cos i' \\ \operatorname{tg} \beta &= \sin (\lambda - \theta) \operatorname{tg} i & \operatorname{tg} \beta' &= \sin (\lambda' - \theta') \operatorname{tg} i' \\ x &= r \cos \beta \cos \lambda & x' &= r' \cos \beta' \cos \lambda' \\ y &= r \cos \beta \sin \lambda & y' &= r' \cos \beta' \sin \lambda' \\ z &= r \sin \beta & z' &= r' \sin \beta' \end{aligned}$$

$$\varDelta^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 .$$

Diese Rechnung gab auch $\log \frac{\varDelta}{a} = 0{,}0011533$.

Um die Werte von f, F und D in der obigen Tafel weiter zu kontrollieren habe ich aus den Formeln (I. 149, 150) $\frac{\varDelta}{a}$ für $\varepsilon' = 30^\circ$ und $\varepsilon = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ etc. berechnet.

Gleichzeitig habe ich für dieselben Werte von ε und ε' $\frac{\varDelta}{a}$ aus der folgenden Gleichung hergeleitet

$$\left(\frac{\varDelta}{a}\right)^2 = D - f \cos (\varepsilon' - F) + \tfrac{1}{2}\gamma_2 \cos 2\varepsilon'$$

Ich teile hier die Werte der aus den Formeln (I. 149, 150) hergleiteten Quantitäten und das Resultat der Kontrolle mit.

$K' = 156^\circ\ 59'\ 43'',56$	$\log k' = 9{,}9996098$
$K'_1 = 156\ \ 45\ \ 11\ ,09$	$\log k'_1 = 9{,}9978512$
$P' = 274\ \ 42\ \ 53\ ,74$	$\log p' = 9{,}8148467$
$V' = 30\ \ 50\ ,05$	$\log v' = 0{,}6014001$
$W' = 85\ \ 51\ \ 10\ ,48$	$\log w' = 0{,}6052788$
$W'_1 = 86\ \ 0\ \ 46\ ,09$	$\log w'_1 = 0{,}6012934$

$$R' = 5{,}0512678 .$$

Ausserdem für $\varepsilon' = 30^\circ$: $\gamma'_0 = 4{,}9986322$

$\log f' = 0{,}6019112$ $\quad F' = 30^\circ\ 41'\ 16'',7$

Für $\varepsilon = 30° = \varepsilon'$ wird nach diesen Formeln $\log\left(\frac{\varDelta}{a}\right) = 0{,}0011534$, welche Zahl mit der früher erhaltenen übereinstimmt, was beweist dass die Quantitäten K', K'_1, $\log k'$ etc. ohne merklichen Fehler sind.

Die Resultate von der Kontrolle sind hier unten angegeben; die erste Zeile enthält die aus der Formel

$$\left(\frac{\varDelta}{a}\right)^2 = D - f\cos(\varepsilon' - F) + \tfrac{1}{2}\gamma_2 \cos 2\varepsilon'$$

erhaltenen Zahlen.

ε	0°	45°	90°	135°
$\log \frac{\varDelta}{a}$	0,0974910	0,0260507	0,2354902	0,3887300
Kontrolle.	0,0974908	0,0260508	0,2354904	0,3887301
Diff.	+ 2	— 1	— 2	— 1
ε	180°	225°	270°	315°
$\log \frac{\varDelta}{a}$	0,4632742	0,4741213	0,4237673	0,3017627
Kontrolle.	0,4632743	0,4741213	0,4237673	0,3017626
Diff.	— 1	0	0	+ 1

III.

Für die Störungsrechnung ist es notwendig $\frac{a}{\varDelta}$ und $\left(\frac{a}{\varDelta}\right)^3$ zu entwickeln und da

$$\left(\frac{\varDelta}{a}\right)^2 = D - f\cos(\varepsilon' - F) + \tfrac{1}{2}\gamma_2 \cos 2\varepsilon'$$

habe ich zunächst die Entwicklung von den Ausdrücken

$$(D - f\cos(\varepsilon' - F))^{-\frac{1}{2}}, \quad (D - f\cos(\varepsilon' - F))^{-\frac{3}{2}}$$

und

$$(D - f\cos(\varepsilon' - F))^{-\frac{5}{2}}$$

auszuführen.

Wir setzen

$$[D - f\cos(\varepsilon' - F)]^{\frac{n}{2}} = \alpha_0^{(n)} + 2\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^{(n)} \cos i\,(\varepsilon' - F)$$

wo die α-Koefficienten Funktionen von f und D sind und für die 8 oben erwähnten Teilpunkte für $n = 1$, 3 und 5 gerechnet werden müssen.

Statt der Koefficienten α wird in den Tafeln angesetzt

$$\beta_i^{(1)} = \frac{m'}{4\sin 1''}\alpha_i^{(1)} \quad \beta_i^{(3)} = \frac{a^2 m'}{4\sin 1''}\alpha_i^{(3)} \quad \beta_i^{(5)} = \frac{a^4 m'}{4\sin 1''}\alpha_i^{(5)}$$

$\left(\log\frac{m'}{4\sin 1''} = 1{,}6922442\right)$, um der später erforderlichen Multiplication mit $\frac{m'}{\sin 1''}$, a^2 resp. a^4, und der bei der mechanischen Quadratur nötigen Division durch 4 überhoben zu sein.

Diese Rechnung beginnt mit einer independenten Berechnung von $\alpha_0^{(1)}$

$$\alpha_0^{(1)} = \frac{1}{\text{Med}\,(m, n)}$$

wo $m = \sqrt{D + f}$, $n = \sqrt{D - f}$ und Med (m, n) das aritmetisch-geometrische Mittel bedeutet.

Die Berechnung von Med (m, n) wird folgendermassen so weit geführt, bis M und N gleich werden, was dann Med (m, n) ist.

$$M = \tfrac{1}{2}(m + n) \qquad N = \sqrt{mn}$$
$$M' = \tfrac{1}{2}(M + N) \qquad N' = \sqrt{MN}$$
$$M'' = \tfrac{1}{2}(M' + N') \qquad N'' = \sqrt{M'N'}$$

etc.

Diese Rechnung wird kontrollirt durch

$$\text{tang}\,\varphi = \frac{\sqrt{2f}}{n}; \quad \sin\varphi' = \text{tang}^2\tfrac{1}{2}\varphi; \quad \sin\varphi'' = \text{tang}^2\tfrac{1}{2}\varphi' \text{ etc.}$$

$$\alpha_0^{(1)} = \frac{1}{m}\sqrt{\frac{\cos\varphi'\,\cos\varphi''\,\cos\varphi'''\ldots}{\cos\varphi}}$$

Die Berechnung der übrigen $\beta_i^{(1)}$ $(i = 1. 2. 3. \ldots 13)$ wird in folgender Weise ausgeführt.

$$\sin\psi = \frac{f}{D};\ \gamma_{16}^{(1)} = \sec^2 \tfrac{1}{2}\psi;\ \lambda_{16}^{(1)} = \mu_{16}^{(1)} \sin^2\psi;$$

$$\lambda_i^{(1)} = \mu_i^{(1)} \sin^2\psi;\ \text{wo}\ \mu_i^{(n)} = \frac{2i+n-2}{4i}\,\frac{2i-n}{4(i-1)}$$

$$\gamma_{i-1}^{(1)} = \frac{1}{1-\lambda_i^{(1)}\gamma_i^{(1)}};\ F_i^{(1)} = \theta_i^{(1)} \sin\psi;\ \text{wo}\ \theta_i^{(n)} = \frac{2i+n-2}{4i}$$

$p_i^{(1)} = F_i^{(1)} \gamma_i^{(1)}$. So werden alle $p_i^{(1)}$, von $p_{13}^{(1)}$ bis $p_1^{(1)}$ berechnet, wonach $\beta_i^{(1)} = \beta_0^{(1)} p_1^{(1)} p_2^{(1)} p_3^{(1)} \ldots p_i^{(1)}$.

($\gamma_i^{(1)}$ und $\lambda_i^{(1)}$ habe ich auch für $i = 16$, 15 und 14 berechnet, da ich nämlich nicht den von HANSEN gegebenen exacten Ausgangswert von γ_i angewandt habe, denn da

$$d\gamma_{i-1} = -\frac{\lambda_i}{(1-\lambda_i\gamma_i)^2}\, d\gamma_i$$

ist, so bewirkt ein Fehler in γ_{16} einen etwa 4 mal verminderten Fehler in γ_{15} u. s. w.).

ε	0°	45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°
$\log \beta_0^{(1)}$	1,4192014	1,4186339	1,4165456	1,4160008	1,4169582	1,4170503	1,4165436	1,4175550
$\log \beta_1^{(1)}$	0,8362207	0,8326043	0,8209116	0,8160065	0,8189245	0,8198510	0,8202082	0,8278060
$\log \beta_2^{(1)}$	0,4190807	0,4125635	0,3917187	0,3826516	0,3874416	0,3891646	0,3903462	0,4042235
$\log \beta_3^{(1)}$	0,0450825	0,0357030	0,0058237	9,9926460	9,9992850	0,0017947	0,0037903	0,0238675
$\log \beta_4^{(1)}$	9,691205	9,678979	9,640114	9,622847	9,631326	9,634618	9,637423	9,663668
$\log \beta_5^{(1)}$	9,349018	9,333955	9,286129	9,264785	9,275097	9,279170	9,282783	9,315177
$\log \beta_6^{(1)}$	9,014486	8,996590	8,939819	8,914402	8,926546	8,931398	8,935818	8,974331
$\log \beta_7^{(1)}$	8,68536	8,66463	8,59892	8,56944	8,58342	8,58905	8,59427	8,63894
$\log \beta_8^{(1)}$	8,36025	8,33670	8,26206	8,22851	8,24432	8,25072	8,25675	8,30755
$\log \beta_9^{(1)}$	8,03826	8,01188	7,92832	7,89071	7,90834	7,91552	7,92235	7,97928
$\log \beta_{10}^{(1)}$	7,7187	7,6895	7,5971	7,5554	7,5748	7,5828	7,5904	7,6535
$\log \beta_{11}^{(1)}$	7,4012	7,3692	7,2678	7,2221	7,2434	7,2521	7,2605	7,3297
$\log \beta_{12}^{(1)}$	7,0854	7,0506	6,9403	6,8905	6,9136	6,9231	6,9323	7,0076
$\log \beta_{13}^{(1)}$	6,7710	6,7334	6,6141	6,5603	6,5852	6,5955	6,6055	6,6869

Die jetzt berechneten β sind Koefficienten der Reihe

$$\frac{m'}{4\sin 1''}[D - f\cos(\varepsilon' - F)]^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \beta_0^{(1)} + 2\beta_1^{(1)}\cos(\varepsilon' - F) + 2\beta_2^{(1)}\cos 2(\varepsilon' - F) + \dots$$

Setzt man hier $\varepsilon' - F = 0$ so kann die Gleichung

$$\frac{1}{4}\frac{m'}{\sin 1''}(D - f)^{-\frac{1}{2}} = \beta_0^{(1)} + 2(\beta_1^{(1)} + \beta_2^{(1)} + \beta_3^{(1)} + \text{etc.})$$

als Kontrolle der β-Koefficienten angewandet werden.

ε	0°	45°	90°	135°
$\frac{m'}{4\sin 1''}(D-f)^{-\frac{1}{2}}$.	49'',25991	48,92581	47,87359	47,45645
$\beta_0^{(1)} + 2\sum_1^{13}\beta_i^{(1)}$	49'',25879	48,92477	47,87283	47,45580
Diff.	112	104	76	65
ε	180°	225°	270°	315°
$\frac{m'}{4\sin 1''}(D-f)^{-\frac{1}{2}}$.	47,72109	47,79979	47,81529	48'',48204
$\beta_0^{(1)} + 2\sum_1^{13}\beta_i^{(1)}$	47,72040	47,79908	47,81455	48'',48115
Diff.	69	71	74	89

Die vorhandenen Differenzen erklären sich dadurch dass wir nicht die $\beta_{14}^{(1)}$, $\beta_{15}^{(1)}$ etc. berechnet haben.

Die Berechnung der $\beta_i^{(3)}$-Koefficienten wird nach den folgenden mit den für $n = 1$ geltenden analogen Formeln

$$\gamma_{16}^{(3)} = \sec^2 \tfrac{1}{2}\psi\,; \quad \lambda_i^{(3)} = \mu_i^{(3)}\sin^2\psi\,; \quad \gamma_{i-1}^{(3)} = \frac{1}{1 - \lambda_i^{(3)}\gamma_i^{(3)}}$$

$$F_i'^{(3)} = \theta_i^{(3)}\sin\psi\,; \quad p_i^{(3)} = F_i'^{(3)}\gamma_i^{(3)}\,.$$

So werden $p_i^{(3)}$ für $i = 13, 12 \dots$ bis $i = 1$ berechnet, wonach man hat

$$\beta_0^{(3)} = a^2\frac{\beta_0^{(1)}}{D - fp_1^{(3)}}\,; \quad \beta_i^{(3)} = \beta_0^{(3)}p_1^{(3)}p_2^{(3)}\dots p_i^{(3)}$$

ε	0°	45°	90°	135°	180°	225	270°	315°
$\log \beta_0^{(3)}$	1,6701697	1,6656894	1,6509543	1,6456108	1,6501402	1,6511272	1,6503459	1,6591223
$\log \beta_1^{(3)}$	1,5070141	1,5002570	1,4782849	1,4696239	1,4756474	1,4772692	1,4771441	1,4908989
$\log \beta_2^{(3)}$	1,2910877	1,2817292	1,2515191	1,2390969	1,2468133	1,2491547	1,2497741	1,2691884
$\log \beta_3^{(3)}$	1,0524885	1,0404294	1,0016771	0,9853598	0,9948290	0,9979158	0,9993063	1,0245867
$\log \beta_4^{(3)}$	0,801159	0,786355	0,738916	0,718656	0,729904	0,733747	0,735921	0,767158
$\log \beta_5^{(3)}$	0,541650	0,524079	0,467890	0,443647	0,456688	0,461294	0,464256	0,501499
$\log \beta_6^{(3)}$	0,276433	0,256082	0,191091	0,162855	0,177697	0,183069	0,186825	0,230102
$\log \beta_7^{(3)}$	0,00700	9,98387	9,91001	9,87780	9,89445	9,90059	9,90514	9,95447
$\log \beta_8^{(3)}$	9,73434	9,70840	9,62571	9,58948	9,60794	9,61485	9,62019	9,67559
$\log \beta_9^{(3)}$	9,45910	9,43037	9,33882	9,29856	9,31884	9,32652	9,33266	9,39413
$\log \beta_{10}^{(3)}$	9,1818	9,1502	9,0498	9,0055	9,0276	9,0361	9,0430	9,1106
$\log \beta_{11}^{(3)}$	8,9027	8,8684	8,7591	8,7108	8,7347	8,7439	8,7516	8,8253
$\log \beta_{12}^{(3)}$	8,6222	8,5851	8,4669	8,4145	8,4403	8,4503	8,4588	8,5385
$\log \beta_{13}^{(3)}$	8,3405	8,3005	8,1735	8,1171	8,1446	8,1554	8,1647	8,2505

Kontrolle:

	$\varepsilon = 0°$	45°	90°	135°
$\frac{\alpha^2 m'}{4 \sin 1''}(D-f)^{-\frac{3}{2}}$.	200″,4566	196,4055	184,0041	179,2360
$\beta_0^{(3)} + 2\sum_{i=1}^{13} \beta_i^{(3)}$	200 ,4092	196,3627	183,9722	179,2095
Diff.	474	428	319	265
	180°	**225°**	**220°**	**315°**
$\frac{\alpha^2 m'}{4 \sin 1''}(D-f)^{-\frac{3}{2}}$.	182,2512	183,1545	183,3327	191,1095
$\beta_0^{(3)} + 2\sum_{i=1}^{13} \beta_i^{(3)}$	182,2228	183,1252	183,3026	191,0720
Diff.	284	293	301	375

Die $\beta_i^{(5)}$-Koefficienten berechne ich mittelst der folgenden Gleichungen (I. 157).

$$\beta_0^{(5)} + \beta_1^{(5)} = \alpha^2 \frac{\beta_0^{(3)} + \frac{1}{3}\beta_1^{(3)}}{D-f}$$

$$\beta_0^{(5)} - \beta_1^{(5)} = \alpha^2 \frac{\beta_0^{(3)} - \frac{1}{3}\beta_1^{(3)}}{D+f}$$

$$\beta_i^{(5)} = \beta_{i-2}^{(5)} - \frac{4}{3}\alpha^2 \frac{i-1}{f} \beta_{i-1}^{(3)} .$$

	0°	45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°
$\log \beta_0^{(5)}$	2,0968686	2,0866081	2,0584546	2,0407394	2,0499949	2,0523688	2,0518241	2,0728006
$\log \beta_1^{(5)}$	2,0375047	2,0260477	1,9890176	1,9744967	1,9845669	1,9872868	1,9870985	2,0102552
$\log \beta_2^{(5)}$	1,9160941	1,9026555	1,8593001	1,8418669	1,8532497	1,8565267	1,8569148	1,8844288
$\log \beta_3^{(5)}$	1,7577947	1,7420481	1,6913886	1,6705292	1,6834303	1,6873524	1,6881071	1,7209795
$\log \beta_4^{(5)}$	1,575234	1,557001	1,498417	1,471010	1,488583	1,493144	1,494912	1,532896
$\log \beta_5^{(5)}$	1,375554	1,354743	1,288002	1,259845	1,276048	1,281874	1,283882	1,327482
$\log \beta_6^{(5)}$	1,163165	1,139714	1,064621	1,032648	1,050558	1,056618	1,059873	1,109223
$\log \beta_7^{(5)}$	0,94101	0,91484	0,83134	0,79542	0,81507	0,82188	0,82591	0,88107
$\log \beta_8^{(5)}$	0,71199	0,68215	0,59015	0,55026	0,57165	0,57922	0,58401	0,64508
$\log \beta_9^{(5)}$	0,47479	0,44311	0,34276	0,29866	0,32178	0,33014	0,33574	0,40271
$\log \beta_{10}^{(5)}$	0,2381	0,1988	0,0900	0,0417	0,0666	0,0757	0,0822	0,1550
$\log \beta_{11}^{(5)}$	9,9874	9,9501	9,8335	9,7803	9,8068	9,8169	9,8241	9,9030
$\log \beta_{12}^{(5)}$	9,7374	9,6975	9,5780	9,5151	9,5481	9,5542	9,5623	9,6471
$\log \beta_{13}^{(5)}$	9,4858	9,4417	9,3116	9,2466	9,2760	9,2882	9,2972	9,3879

Kontrolle:

ε	0°	45°	90°	135°
$\frac{\alpha^4 m'}{4 \sin 1''}(D-f)^{-\frac{5}{2}}$ . .	815″,732	788,441	707,228	676,948
$\beta_0^{(5)} + 2\sum_1^{13}\beta_i^{(5)}$	814 ,987	787,770	706,788	676,546
Diff.	0 ,745	0,671	0,440	0,402
ε	180°	225°	270°	315°
$\frac{\alpha^4 m'}{4 \sin 1''}(D-f)^{-\frac{5}{2}}$ . .	696,034	701,793	702,932	753,327
$\beta_0^{(5)} + 2\sum_1^{13}\beta_i^{(5)}$	695,595	701,345	702,475	752,745
Diff.	0,439	0,448	0,457	0,582

IV.

Durch Berechnung der β sind die Koefficienten der folgenden Reihen bestimmt:

$$\frac{m'}{4 \sin 1''}[D - f\cos(\varepsilon' - F)]^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \beta_0^{(1)} + 2\beta_1^{(1)}\cos(\varepsilon' - F) + 2\beta_2^{(1)}\cos 2(\varepsilon' - F) + \ldots$$

$$\frac{\alpha^2 \quad m'}{4 \sin 1''}[D - f\cos(\varepsilon' - F)]^{\frac{3}{2}} =$$

$$= \beta_0^{(3)} + 2\beta_1^{(3)}\cos(\varepsilon' - F) + 2\beta_2^{(3)}\cos 2(\varepsilon' - F) + \ldots$$

$$\frac{\alpha^4 \quad m'}{4 \sin 1''}[D - f\cos(\varepsilon' - F)]^{\frac{5}{2}} =$$

$$= \beta_0^{(3)} + 2\beta_1^{(3)}\cos(\varepsilon' - F) + 2\beta_2^{(3)}\cos 2(\varepsilon' - F) + \ldots$$

Hier setzen wir jetzt nach HANSEN

$\varepsilon' - F = \varepsilon' - \varepsilon - (F' - \varepsilon)$ und erhalten so

$$\alpha^{n-1} \frac{m'}{\sin 1''} [D - f \cos(\varepsilon' - F)]^{\frac{n}{2}} =$$

$$= Y^{(n)}_{0,c} + 2 Y^{(n)}_{1,c} \cos(\varepsilon' - \varepsilon) + Y^{(n)}_{2,c} \cos 2(\varepsilon' - \varepsilon) + \dots$$

$$+ 2 Y^{(n)}_{1,s} \sin(\varepsilon' - \varepsilon) + Y^{(n)}_{1,s} \sin 2(\varepsilon' - \varepsilon) + \dots$$

$$\text{wo } \tfrac{1}{4} Y^{(n)}_{i,c} = \beta^{(n)}_i \cos i(F - \varepsilon)$$

$$\tfrac{1}{4} Y^{(n)}_{i,s} = \beta^{(n)}_i \sin i(F - \varepsilon)$$

Der Vorteil dieser Transformation besteht darin dass F sich durch den ganzen Umkreis gleichzeitig mit ε bewegt, weshalb $F' - \varepsilon$ ein nahe konstanter Bogen ist und dadurch gestalten sich die Quadraturen gleichförmiger und regelmässiger.

Die $Y^{(n)}_{i,c}$ und $Y^{(n)}_{i,s}$ sind Functionen von ε und lassen sich in folgenden nach ε fortschreitenden Reihen entwickeln

$$Y = \tfrac{1}{2} c_0 + c_1 \cos \varepsilon + c_2 \cos 2\varepsilon + \dots$$

$$+ s_1 \sin \varepsilon + s_2 \sin 2\varepsilon + \dots$$

Zunächst werden also die $Y^{(n)}_{i,c}$ und $Y^{(n)}_{i,s}$ für die 8 verschiedenen Werte, $\varepsilon = 0°, 45°, 90°$, etc. berechnet und mit $Y_0, Y_1\ Y_2 \dots, Y_7$ berechnet und aus diesen werden vermittelst der unten folgenden mechanischen Quadratur, welche sich für diese Teilung der Periferie besonders einfach gestaltet, die Koefficienten $c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, s_1, s_2, s_3$ für jedes $Y^{(n)}_{i,c}$ oder $Y^{(n)}_{i,s}$ nach folgenden Formelsystem ermittelt.

$$(0.4) = Y_0 + Y_4 \qquad \left(\tfrac{0}{4}\right) = Y_0 - Y_4$$

$$(1.5) = Y_1 + Y_5 \qquad \left(\tfrac{1}{5}\right) = Y_1 - Y_5$$

$$(2.6) = Y_2 + Y_6 \qquad \left(\tfrac{2}{6}\right) = Y_2 - Y_6$$

$$(3.7) = Y_3 + Y_7 \qquad \left(\tfrac{3}{7}\right) = Y_3 - Y_7$$

$$(0.2) = (0.4) + (2.6)$$

$$(1.3) = (1.5) + (3.7)$$

$$\binom{0}{2} = (0.4) - (2.6)$$

$$\binom{1}{3} = (1.5) - (3.7)$$

und daraus

$$2(c_0 + 2c_4) = (0.2) \qquad 2(c_1 + c_3) = \binom{0}{4}$$

$$(c_0 - 2c_4) = (1.3) \qquad 2(c_1 - c_3) = \left[\binom{1}{5} - \binom{3}{7}\right] \cos 45^\circ$$

$$4c_2 = (0.4) - (2.6) \qquad 2(s_1 + s_3) = \left[\binom{1}{5} + \binom{3}{7}\right] \cos 45^\circ$$

$$4s_2 = (1.5) - (3.7) \qquad 2(s_1 - s_3) = \binom{2}{6}$$

Ich habe für

$$\frac{m'}{\sin 1''}[D - f\cos(\varepsilon' - F)]^{-\frac{1}{2}},$$

$$\frac{\alpha^2 m'}{\sin 1''}[D - f\cos(\varepsilon' - F)]^{-\frac{3}{2}}$$

und

$$\frac{\alpha^4 m'}{\sin 1''}[D - f\cos(\varepsilon' - F)]^{-\frac{5}{2}}$$

die folgenden Entwicklungen erhalten.

$\frac{m'}{\sin 1''}[D - f\cos(\varepsilon' - F')]$ $\frac{1}{2}$ $Y^{(1)}_{i,c}$

	c_0	c_1	c_2	c_3	c_4	s_1	s_2	s_3
$Y^{(1)}_{0,c}$	+209,123243	+ 0,268805	+ 0,185000	+ 0,001706	+ 0,000303	+ 0,001535	+ 0,128109	+ 0,001294
$Y^{(1)}_{1,c}$	+ 53,3521	+ 0,5337	+ 0,2204	+ 0,0020	+ 0,0003	+ 0,0172	+ 0,1318	+ 0,0015
$Y^{(1)}_{2,c}$	+ 19,9610	+ 0,3661	+ 0,1474	+ 0,0030	+ 0,0004	+ 0,0089	+ 0,0839	+ 0,0019
$Y^{(1)}_{3,c}$	+ 8,24958	+ 0,21942	+ 0,08868	+ 0,00287	+ 0,00041	+ 0,00330	+ 0,04842	+ 0,00171
$Y^{(1)}_{4,c}$	+ 3,5712	+ 0,1244	+ 0,0509	+ 0,0023	+ 0,0003	+ 0,0006	+ 0,0267	+ 0,0013
$Y^{(1)}_{5,c}$	+ 1,5880	+ 0,0684	+ 0,0284	+ 0,0016	+ 0,0002	— 0,0003	+ 0,0143	+ 0,0009
$Y^{(1)}_{6,c}$	+ 0,71866	+ 0,03687	+ 0,01560	+ 0,00108	+ 0,00017	— 0,00055	+ 0,00756	+ 0,00056
$Y^{(1)}_{7,c}$	+ 0,3293	+ 0,0196	+ 0,0084	+ 0,0007	+ 0,0001	— 0,0005	+ 0,0039	+ 0,0003
$Y^{(1)}_{8,c}$	+ 0,1523	+ 0,0103	+ 0,0045	+ 0,0004	+ 0,0001	— 0,0004	+ 0,0020	+ 0,0002
$Y^{(1)}_{9,c}$	+ 0,0709	+ 0,0054	+ 0,0024	+ 0,0003	+ 0,0000	— 0,0003	+ 0,0010	+ 0,0001
$Y^{(1)}_{10,c}$	+ 0,0332	+ 0,0028	+ 0,0013	+ 0,0001	+ 0,0000	— 0,0002	+ 0,0005	+ 0,0001
$Y^{(1)}_{11,c}$	+ 0,0156	+ 0,0015	+ 0,0007	+ 0,0001	+ 0,0000	— 0,0002	+ 0,0003	+ 0,0001
$Y^{(1)}_{12,c}$	+ 0,0074	+ 0,0007	+ 0,0003	+ 0,0001	+ 0,0000	— 0,0001	+ 0,0001	+ 0,0001
$Y^{(1)}_{13,c}$	+ 0,0035	+ 0,0004	+ 0,0002	+ 0,0000	+ 0,0000	— 0,0000	+ 0,0001	+ 0,0000

$$(0.2) = (0.4) + (2.6)$$
$$(1.3) = (1.5) + (3.7)$$
$$(\tfrac{0}{2}) = (0.4) - (2.6)$$
$$(\tfrac{1}{3}) = (1.5) - (3.7)$$

und daraus

$$2(c_0 + 2c_4) = (0.2) \qquad 2(c_1 + c_3) = (\tfrac{0}{4})$$
$$(c_0 - 2c_4) = (1.3) \qquad 2(c_1 - c_3) = [(\tfrac{1}{5}) - (\tfrac{3}{7})]\cos 45^\circ$$
$$4c_2 = (0.4) - (2.6) \qquad 2(s_1 + s_3) = [(\tfrac{1}{5}) + (\tfrac{3}{7})]\cos 45^\circ$$
$$4s_2 = (1.5) - (3.7) \qquad 2(s_1 - s_3) = (\tfrac{2}{6})$$

Ich habe für

$$\frac{m'}{\sin 1''}[D - f\cos(\varepsilon' - F)]^{-\frac{1}{2}},$$

$$\frac{\alpha^2 m'}{\sin 1''}[D - f\cos(\varepsilon' - F)]^{-\frac{3}{2}}$$

und

$$\frac{\alpha^4 m'}{\sin 1''}[D - f\cos(\varepsilon' - F)]^{-\frac{5}{2}}$$

die folgenden Entwicklungen erhalten.

$\frac{m'}{\sin 1''}[D - f\cos(\varepsilon' - F)]^{\frac{1}{2}}$ $Y^{(1)}_{i,c}$

	c_0	c_1	c_2	c_3	c_4	s_1	s_2	s_3
$Y^{(1)}_{0,c}$	+ 209,123243	+ 0,268805	+ 0,185000	+ 0,001706	+ 0,000303	+ 0,001535	+ 0,128109	+ 0,001294
$Y^{(1)}_{1,c}$	+ 53,3521	+ 0,5387	+ 0,2204	+ 0,0020	+ 0,0003	+ 0,0172	+ 0,1318	+ 0,0015
$Y^{(1)}_{2,c}$	+ 19,9610	+ 0,3661	+ 0,1474	+ 0,0030	+ 0,0004	+ 0,0089	+ 0,0839	+ 0,0019
$Y^{(1)}_{3,c}$	+ 8,24958	+ 0,21942	+ 0,08868	+ 0,00287	+ 0,00041	+ 0,00330	+ 0,04842	+ 0,00171
$Y^{(1)}_{4,c}$	+ 3,5712	+ 0,1244	+ 0,0509	+ 0,0023	+ 0,0003	+ 0,0006	+ 0,0267	+ 0,0013
$Y^{(1)}_{5,c}$	+ 1,5880	+ 0,0684	+ 0,0284	+ 0,0016	+ 0,0002	— 0,0003	+ 0,0143	+ 0,0009
$Y^{(1)}_{6,c}$	+ 0,71866	+ 0,03687	+ 0,01560	+ 0,00108	+ 0,00017	— 0,00055	+ 0,00756	+ 0,00056
$Y^{(1)}_{7,c}$	+ 0,3293	+ 0,0196	+ 0,0084	+ 0,0007	+ 0,0001	— 0,0005	+ 0,0039	+ 0,0003
$Y^{(1)}_{8,c}$	+ 0,1523	+ 0,0103	+ 0,0045	+ 0,0004	+ 0,0001	— 0,0004	+ 0,0020	+ 0,0002
$Y^{(1)}_{9,c}$	+ 0,0709	+ 0,0054	+ 0,0024	+ 0,0003	+ 0,0000	— 0,0003	+ 0,0010	+ 0,0001
$Y^{(1)}_{10,c}$	+ 0,0332	+ 0,0028	+ 0,0013	+ 0,0001	+ 0,0000	— 0,0002	+ 0,0005	+ 0,0001
$Y^{(1)}_{11,c}$	+ 0,0156	+ 0,0015	+ 0,0007	+ 0,0001	+ 0,0000	— 0,0002	+ 0,0003	+ 0,0001
$Y^{(1)}_{12,c}$	+ 0,0074	+ 0,0007	+ 0,0003	+ 0,0001	+ 0,0000	— 0,0001	+ 0,0001	+ 0,0001
$Y^{(1)}_{13,c}$	+ 0,0035	+ 0,0004	+ 0,0002	+ 0,0000	+ 0,0000	— 0,0000	+ 0,0001	+ 0,0000

$\frac{m'}{\sin 1''}[D - f\cos(\varepsilon' - F)]^{-\frac{1}{2}}$ $\qquad Y^{(1)}_{i,s}$

	c_0	c_1	c_2	c_3	c_4	s_1	s_2	s_3
$Y^{(1)}_{1,s}$	— 0,6028	+ 0,0185	+ 0,0543	+ 0,0007	+ 0,0003	— 0,4271	— 0,1170	— 0,0010
$Y^{(2)}_{2,s}$	— 0,4511	+ 0,0099	+ 0,0394	+ 0,0015	+ 0,0005	— 0,3195	— 0,0910	— 0,0024
$Y^{(1)}_{3,s}$	— 0,27971	+ 0,00371	+ 0,02370	+ 0,00153	+ 0,00048	— 0,19798	— 0,05852	— 0,00257
$Y^{(1)}_{4,s}$	— 0,1615	+ 0,0007	+ 0,0132	+ 0,0012	+ 0,0004	— 0,1142	— 0,0350	— 0,0021
$Y^{(1)}_{5,s}$	— 0,0898	— 0,0004	+ 0,0071	+ 0,0009	+ 0,0003	— 0,0635	— 0,0201	— 0,0015
$Y^{(1)}_{6,s}$	— 0,04879	— 0,00062	+ 0,00370	+ 0,00055	+ 0,00019	— 0,03446	— 0,01130	— 0,00102
$Y^{(1)}_{7,s}$	— 0,0261	— 0,0005	+ 0,0019	+ 0,0004	+ 0,0001	— 0,0184	— 0,0062	— 0,0007
$Y^{(1)}_{8,s}$	— 0,0138	— 0,0004	+ 0,0010	+ 0,0002	+ 0,0001	— 0,0097	— 0,0034	— 0,0004
$Y^{(1)}_{9,s}$	— 0,0072	— 0,0003	+ 0,0005	+ 0,0001	+ 0,0000	— 0,0051	— 0,0018	— 0,0002
$Y^{(1)}_{10,s}$	— 0,0038	— 0,0002	+ 0,0002	+ 0,0001	+ 0,0000	— 0,0026	— 0,0010	— 0,0001
$Y^{(1)}_{11,s}$	— 0,0019	— 0,0001	+ 0,0001	+ 0,0000	+ 0,0000	— 0,0014	— 0,0005	— 0,0001
$Y^{(1)}_{12,s}$	— 0,0010	— 0,0001	+ 0,0001	+ 0,0000	+ 0,0000	— 0,0007	— 0,0003	— 0,0000
$Y^{(1)}_{13,s}$	— 0,0005	— 0,0000	+ 0,0000	+ 0,0000	0,0000	— 0,0004	0,0001	0,0000

$\frac{a^2 m'}{\sin 1''} [D - f \cos(\varepsilon' - F)]^{\frac{3}{2}}$ $Y^{(3)}_{i,c}$

	c_0	c_1	c_2	c_3	c_4	s_1	s_2	s_3
$Y^{(3)}_{0,c}$	+ 361,87688	+ 4,17692	+ 2,00399	+ 0,04111	+ 0,00670	+ 0,15443	+ 1,26027	+ 0,02909
$Y^{(3)}_{1,c}$	+ 244,1907	+ 4,4362	+ 1,9645	+ 0,0432	+ 0,0069	+ 0,1617	+ 1,1928	+ 0,0299
$Y^{(3)}_{2,c}$	+ 145,5477	+ 3,7433	+ 1,6065	+ 0,0476	+ 0,0073	+ 0,1124	+ 0,9375	+ 0,0309
$Y^{(3)}_{3,c}$	+ 82,26853	+ 2,76120	+ 1,17519	+ 0,04690	+ 0,00709	+ 0,05974	+ 0,65918	+ 0,02844
$Y^{(3)}_{4,c}$	+ 45,1376	+ 1,8758	+ 0,8004	+ 0,0406	+ 0,0062	+ 0,0232	+ 0,4315	+ 0,0236
$Y^{(3)}_{5,c}$	+ 24,2963	+ 1,2059	+ 0,5189	+ 0,0322	+ 0,0051	+ 0,0034	+ 0,2689	+ 0,0178
$Y^{(3)}_{6,c}$	+ 12,90447	+ 0,74551	+ 0,32457	+ 0,02397	+ 0,00387	— 0,00522	+ 0,16166	+ 0,01260
$Y^{(3)}_{7,c}$	+ 6,7866	+ 0,4476	+ 0,1976	+ 0,0169	+ 0,0028	— 0,0076	+ 0,0945	+ 0,0086
$Y^{(3)}_{8,c}$	+ 3,5421	+ 0,2627	+ 0,1177	+ 0,0115	+ 0,0020	— 0,0071	+ 0,0541	+ 0,0055
$Y^{(3)}_{9,c}$	+ 1,8375	+ 0,1515	+ 0,0689	+ 0,0075	+ 0,0014	— 0,0056	+ 0,0304	+ 0,0035
$Y^{(3)}_{10,c}$	+ 0,9484	+ 0,0862	+ 0,0398	+ 0,0047	+ 0,0008	— 0,0042	+ 0,0167	+ 0,0020
$Y^{(3)}_{11,c}$	+ 0,4877	+ 0,0484	+ 0,0227	+ 0,0030	+ 0,0006	— 0,0033	+ 0,0092	+ 0,0007
$Y^{(3)}_{12,c}$	+ 0,2498	+ 0,0268	+ 0,0128	+ 0,0019	+ 0,0004	— 0,0018	+ 0,0050	+ 0,0007
$Y^{(3)}_{13,c}$	+ 0,1276	+ 0,0147	+ 0,0072	+ 0,0011	+ 0,0002	— 0,0010	+ 0,0026	+ 0,0003

$\frac{\alpha^2 m'}{\sin 1''}[D - f \cos(\varepsilon' - F)]^{\frac{3}{2}}$ $\qquad Y^{(3)}_{i,s}$

	c_0	c_1	c_2	c_3	c_4	s_1	s_2	s_3
$Y^{(3)}_{1,s}$	— 2,7590	+ 0,0598	+ 0,2391	+ 0,0105	+ 0,0036	— 1,9520	— 0,5576	— 0,0164
$Y^{(3)}_{2,s}$	— 3,2894	+ 0,0452	+ 0,2771	+ 0,0188	+ 0,0062	— 2,3261	— 0,6874	— 0,0307
$Y^{(3)}_{3,s}$	— 2,78953	+ 0,01536	+ 0,22767	+ 0,02137	+ 0,00709	— 1,97154	— 0,60280	— 0,03614
$Y^{(3)}_{4,s}$	— 2,0414	+ 0,0059	+ 0,1609	+ 0,0196	+ 0,0066	— 1,4417	— 0,4558	— 0,0341
$Y^{(3)}_{5,s}$	— 1,3740	— 0,0156	+ 0,1042	+ 0,0157	+ 0,0054	— 0,9697	— 0,3168	— 0,0297
$Y^{(3)}_{6,s}$	— 0,87621	— 0,01741	+ 0,06372	+ 0,01161	+ 0,00406	— 0,61788	— 0,20839	— 0,02154
$Y^{(3)}_{7,s}$	— 0,5379	— 0,0153	+ 0,0374	+ 0,0081	+ 0,0029	— 0,3790	— 0,1319	— 0,0154
$Y^{(3)}_{8,s}$	— 0,3211	— 0,0119	+ 0,0212	+ 0,0054	+ 0,0020	— 0,2260	— 0,0810	— 0,0105
$Y^{(3)}_{9,s}$	— 0,1875	— 0,0086	+ 0,0117	+ 0,0034	+ 0,0013	— 0,1318	— 0,0487	— 0,0071
$Y^{(3)}_{10,s}$	— 0,1077	— 0,0058	+ 0,0064	+ 0,0021	+ 0,0008	— 0,0756	— 0,0287	— 0,0044
$Y^{(3)}_{11,s}$	— 0,0611	— 0,0037	+ 0,0032	+ 0,0014	+ 0,0005	— 0,0427	— 0,0167	— 0,0028
$Y^{(3)}_{12,s}$	— 0,0341	— 0,0024	+ 0,0018	+ 0,0008	+ 0,0003	— 0,0239	— 0,0096	— 0,0017
$Y^{(3)}_{13,s}$ . . .	0,0189	0,0015	+ 0,0009	+ 0,0005	+ 0,0002	0,0132	0,0051	0,0010

$\frac{a^4 m'}{\sin 1''}[D - f \cos(\varepsilon' - \Gamma')]^{\frac{5}{2}}$ $Y^{(5)}_{i,c}$

	c_0	c_1	c_2	c_3	c_4	s_1	s_2	s_3
$Y^{(5)}_{0,c}$	+ 925,7925	+ 25,1838	+ 11,4151	+ 0,3884	+ 0,0629	+ 1,1136	+ 6,9372	+ 0,2660
$Y^{(5)}_{1,c}$	+ 799,980	+ 24,632	+ 10,987	+ 0,392	+ 0,063	+ 1,040	+ 6,5913	+ 0,265
$Y^{(5)}_{2,c}$	+ 595,600	+ 21,821	+ 9,601	+ 0,396	+ 0,063	+ 0,800	+ 5,612	+ 0,257
$Y^{(5)}_{3,c}$	+ 406,2553	+ 17,6478	+ 7,7222	+ 0,3809	+ 0,0606	+ 0,5135	+ 4,3723	+ 0,2354
$Y^{(5)}_{4,c}$	+ 261,686	+ 13,262	+ 5,816	+ 0,357	+ 0,055	+ 0,273	+ 3,180	+ 0,201
$Y^{(5)}_{5,c}$	+ 161,912	+ 9,443	+ 4,160	+ 0,287	+ 0,048	+ 0,108	+ 2,193	+ 0,160
$Y^{(5)}_{6,c}$	+ 97,234	+ 6,427	+ 2,857	+ 0,229	+ 0,039	+ 0,013	+ 1,450	+ 0,121
$Y^{(5)}_{7,c}$	+ 57,068	+ 4,224	+ 1,898	+ 0,174	+ 0,031	— 0,031	+ 0,927	+ 0,086
$Y^{(5)}_{8,c}$	+ 32,899	+ 2,709	+ 1,238	+ 0,138	+ 0,029	— 0,046	+ 0,576	+ 0,059
$Y^{(5)}_{9,c}$	+ 18,675	+ 1,683	+ 0,775	+ 0,090	+ 0,018	— 0,044	+ 0,350	+ 0,038
$Y^{(5)}_{10,c}$	+ 10,473	+ 1,029	+ 0,479	+ 0,059	+ 0,013	— 0,037	+ 0,210	+ 0,025
$Y^{(5)}_{11,c}$	+ 5,815	+ 0,620	+ 0,292	+ 0,041	+ 0,009	— 0,027	+ 0,122	+ 0,014
$Y^{(5)}_{12,c}$	+ 3,199	+ 0,366	+ 0,174	+ 0,028	+ 0,007	— 0,020	+ 0,069	+ 0,008
$Y^{(5)}_{13,c}$	+ 1,749	+ 0,223	+ 0,103	+ 0,011	+ 0,005	— 0,011	+ 0,040	+ 0,005

$$\frac{a^4 m'}{\sin 1''}\left[D - f\cos(\varepsilon' - F)\right]^{-\frac{5}{2}} \qquad Y^{(5)}_{i,s}$$

	c_0	c_1	c_2	c_3	c_4	s_1	s_2	s_3
$Y^{(5)}_{1,s}$	— 9,039	+ 0,072	+ 0,739	+ 0,067	+ 0,023	— 6,384	— 1,935	— 0,110
$Y^{(5)}_{2,s}$	— 13,441	+ 0,025	+ 1,055	+ 0,120	+ 0,051	— 9,503	— 2,953	— 0,200
$Y^{(5)}_{3,s}$	— 13,7762	+ 0,0250	+ 1,0678	+ 0,0468	+ 0,0495	— 9,7209	— 3,1064	— 0,2502
$Y^{(5)}_{4,s}$	— 11,836	— 0,153	+ 0,886	+ 0,145	+ 0,050	— 8,345	— 2,746	— 0,255
$Y^{(5)}_{5,s}$	— 9,158	— 0,192	+ 0,660	+ 0,128	+ 0,045	— 6,452	— 2,187	— 0,231
$Y^{(5)}_{6,s}$	— 6,603	— 0,178	+ 0,456	+ 0,089	+ 0,037	— 4,634	— 1,622	— 0,178
$Y^{(5)}_{7,s}$	— 4,524	— 0,162	+ 0,298	+ 0,071	+ 0,028	— 3,182	— 1,143	— 0,149
$Y^{(5)}_{8,s}$	— 2,983	— 0,137	+ 0,186	+ 0,055	+ 0,021	— 2,095	— 0,774	— 0,110
$Y^{(5)}_{9,s}$	— 1,907	— 0,103	+ 0,113	+ 0,039	+ 0,015	— 1,338	— 0,508	— 0,078
$Y^{(5)}_{10,s}$	— 1,189	— 0,075	+ 0,066	+ 0,026	+ 0,010	— 0,834	— 0,326	— 0,053
$Y^{(5)}_{11,s}$	— 0,728	— 0,052	+ 0,038	+ 0,017	+ 0,006	— 0,510	— 0,204	— 0,035
$Y^{(5)}_{12,s}$	— 0,437	— 0,035	+ 0,022	+ 0,011	+ 0,004	— 0,306	— 0,126	— 0,023
$Y^{(5)}_{13,s}$	— 0,259	— 0,023	+ 0,012	+ 0,007	+ 0,002	— 0,181	0,076	— 0,014

V.

Wenn man hier anstatt der allgemeineren Bezeichnung

$$Y = \tfrac{1}{2} c_0 + c_1 \cos\varepsilon + c_2 \cos 2\varepsilon + \ldots$$
$$+ s_1 \sin\varepsilon + s_3 \sin 2\varepsilon + \ldots$$

folgende speziellen Bezeichnungen

$$Y^{(n)}_{i,\,c} = \tfrac{1}{2} C^{(n),\,c}_{i,\,0} + C^{(n),\,c}_{i,\,1} \cos\varepsilon + C^{(n),\,c}_{i,\,2} \cos 2\varepsilon + \ldots$$
$$+ C^{(n),\,s}_{i,\,1} \sin\varepsilon + C^{(n),\,s}_{i,\,2} \sin 2\varepsilon + \ldots$$

$$Y^{(n)}_{i,\,s} = \tfrac{1}{2} S^{(n),\,c}_{i,\,0} + S^{(n),\,c}_{i,\,1} \cos\varepsilon + S^{(n),\,c}_{i,\,2} \cos 2\varepsilon + \ldots$$
$$+ S^{(n),\,s}_{i,\,1} \sin\varepsilon + S^{(n),\,s}_{i,\,2} \sin 2\varepsilon + \ldots$$

einführt, so giebt die Substitution dieser Reihen in die allgemeine Reihe von $[D - f) \cos(\varepsilon' - F)]^{-\frac{n}{2}}$ nämlich

$$\frac{\alpha^{n-1} m'}{\sin 1''} [D - f \cos\,(\varepsilon' - F)]^{\frac{n}{2}} =$$

$$Y^{(n)}_{0,\,c} + 2 Y^{(n)}_{1,\,c} \cos(\varepsilon' - \varepsilon) + 2 Y^{(n)}_{2,\,c} \cos 2(\varepsilon' - \varepsilon) + \ldots$$
$$+ 2 Y^{(n)}_{1,\,s} \sin(\varepsilon' - \varepsilon) + 2 Y^{(n)}_{2,\,s} \sin 2(\varepsilon' - \varepsilon) + \ldots$$

folgende Ausdrücke, die ich mit $A^{-\frac{n}{2}}$ bezeichne

$$A^{-\frac{n}{2}} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left\{ C^{(n),\,c}_{i,\,\nu} \mp S^{(n),\,s}_{i,\,\nu} \right\} \cos[(i \mp \nu)\,\varepsilon - i\varepsilon']$$
$$\mp \sum_{i=0} \sum_{\nu=0} \left\{ C^{(n),\,s}_{i,\,\nu} \pm S^{(n),\,c}_{i,\,\nu} \right\} \sin[(i \mp \nu)\,\varepsilon - i\varepsilon']$$

wo zu bemerken ist, dass

$$C^{(n),\,s}_{0,\,0} = C^{(n),\,s}_{0,\,\nu} = S^{(n),\,s}_{0,\,\nu} = S^{(n),\,c}_{i,\,0} = S^{(n),\,s}_{i,\,0} = 0$$

und für $i = 0$ nur die unteren Zeichen gelten und dass $C^{(n),\,c}_{0,\,0}$ zweimal zu gross ist.

Durch Addition und Subtraction ergaben sich gemäss der letzten Formel $A^{-\frac{n}{2}}$ für die Potenzen $-\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{2}$, $-\frac{5}{2}$ folgende Tafeln.

	$\frac{m'}{\sin 1''}(D - f\cos\overline{\varepsilon' - F})^{-\frac{1}{2}}$		$\frac{\alpha^2 m'}{\sin 1''}(D - f\cos\overline{\varepsilon' - F})^{-\frac{3}{2}}$		$\frac{\alpha^4 m'}{\sin 1''}(D - f\cos\overline{\varepsilon' - F})^{-\frac{5}{2}}$	
$\varepsilon\ \varepsilon'$.	cos.	sin.	cos.	sin.	cos.	sin.
0—0	$\frac{1}{2}$. 209,12324	—	+ $\frac{1}{2}$.361,8769	—	+ $\frac{1}{2}$. 925,792	—
1—0	+ 0,26880	+ 0,00154	+ 4,1769	+ 0,1544	+ 25,184	+ 1,114
2—0	+ 0,18500	+ 0,12811	+ 2,0040	+ 1,2603	+ 11,415	+ 6.937
3—0	+ 0,00171	+ 0,00129	+ 0,0411	+ 0,0291	+ 0,388	+ 0,266
4—0	+ 0,00030	—	+ 0,0067	—	+ 0,063	—
-2—1	+ 0,0030	— 0,0022	+ 0,060	— 0,040	+ 0,05	— 0,33
-1—1	+ 0,3374	— 0,1861	+ 2,522	— 1,432	+ 12,92	— 7,33
0—1	+ 0,9609	— 0,0357	+ 6,388	— 0,222	+ 31,01	— 1,11
1—1	+ 53,3521	+ 0,6028	+ 244,191	+ 2,759	+ 799,98	+ 9,04
2—1	+ 0,1067	— 0,0013	+ 2,484	+ 0,102	+ 18,25	+ 0,97
3—1	+ 0,1034	+ 0,0775	+ 1,407	+ 0,954	+ 9,05	+ 5,85
4—1	+ 0,0009	+ 0,0007	+ 0,027	+ 0,019	+ 0,28	+ 0,20
-1—2	+ 0,0054	— 0,0034	+ 0,078	— 0,050	+ 0,60	— 0,38
0—2	+ 0,2384	— 0,1233	+ 2,294	— 1,215	+ 12,55	— 6,67
1—2	+ 0,6856	— 0,0188	+ 6,069	— 0,158	+ 31,32	— 0,82
2—2	+ 19,9610	+ 0,4511	+ 145,548	+ 3,289	+ 595,60	+ 13,44
3—2	+ 0,0466	— 0,0010	+ 1,417	+ 0,067	+ 12,32	+ 0,77
4—2	+ 0,0564	+ 0,0444	+ 0,919	+ 0,660	+ 6,65	+ 4,56
5—2	+ 0,0005	+ 0,0004	+ 0,017	+ 0,012	+ 0,19	+ 0,14
-1—3	+ 0,0008 [1]	— 0,0010 [1]	+ 0,013 [1]	— 0,013 [1]	—	—
0—3	+ 0,00544	— 0,00324	+ 0,0830	— 0,0498	+ 0,631	— 0,282
1—3	+ 0,14720	— 0,07212	+ 1,7780	— 0,8868	+ 10,829	— 5,440
2—3	+ 0,41740	— 0,00702	+ 4,7327	— 0,0751	+ 27,369	— 0,538
3—3	+ 8,2496	+ 0,2797	+ 82,269	+ 2,7895	+ 406,26	+ 13,78
4—3	+ 0,0214	— 0,0004	+ 0,789	+ 0,044	+ 7,92	+ 0,49
5—3	+ 0,0302	+ 0,0247	+ 0,573	+ 0,432	+ 4,62	+ 3,30
6—3	+ 0,0003	+ 0,0002	+ 0,011	+ 0,007	+ 0,13	+ 0,19
1—4	+ 0,0044	— 0,0025	+ 0,075	— 0,043	+ 0,61	— 0,35
2—4	+ 0,0859	— 0,0399	+ 1,256	— 0,592	+ 8,56	— 4,07
3—4	+ 0,2386	— 0,0013	+ 3,317	— 0,029	+ 21,61	— 0,12
4—4	+ 3,5712	+ 0,1615	+ 45,138	+ 2,041	+ 261,69	+ 11,84

[1] Aus der Kontrolle, pag. 30, berechnet.

	$\frac{m'}{\sin 1''}(D - f\cos\varepsilon' \cdot F)^{-\frac{1}{2}}$		$\frac{a^2 m'}{\sin 1''}(D - f\cos\varepsilon' \cdot F)^{-\frac{3}{2}}$		$\frac{a^4 m'}{\sin 1''}(D - f\cos\varepsilon' \cdot F)^{-\frac{5}{2}}$	
$\varepsilon\ \varepsilon'$	cos.	sin.	cos.	sin.	cos.	sin.
5—4	+ 0,0102	— 0,0001	+ 0,434	+ 0,017	+ 4,92	+ 0,43
6—4	+ 0,0159	+ 0,0135	+ 0,345	+ 0,271	+ 3,07	+ 2,29
7—4	+ 0,0002	+ 0,0001	+ 0,006	+ 0,004	+ 0,10	+ 0,06
2—5	+ 0,0031	— 0,0018	+ 0,062	— 0,033	+ 0,52	— 0,29
3—5	+ 0,0485	— 0,0214	+ 0,836	— 0,373	+ 6,35	— 2,85
4—5	+ 0,1319	+ 0,0007	+ 2,176	+ 0,012	+ 15,89	+ 0,08
5—5	+ 1,5880	+ 0,0898	+ 24,296	+ 1,374	+ 161,91	+ 9,16
6—5	+ 0,0049	+ 0,0001	+ 0,236	+ 0,019	+ 2,99	+ 0,30
7—5	+ 0,0083	+ 0,0072	+ 0,202	+ 0,165	+ 1,97	+ 1,53
8—5	+ 0,0001	+ 0,0000	+ 0,003	+ 0,002	+ 0,06	+ 0,03
2—6	+ 0,0003	— 0,0003	+ 0,008	— 0,008	—	-
3—6	+ 0,00210	— 0,00111	+ 0,0455	— 0,0242	+ 0,407	— 0,210
4—6	+ 0,02690	— 0,01126	+ 0,5330	— 0,225	+ 4,479	— 1,906
5—6	+ 0,0713	+ 0,0012	+ 1,363	+ 0,023	+ 11,06	+ 0,16
6—6	+ 0,7187	+ 0,0488	+ 12,904	+ 0,876	+ 97,23	+ 6,60
7—6	+ 0,0024	+ 0,0001	+ 0,128	+ 0,012	+ 1,79	+ 0,19
8—6	+ 0,0043	+ 0,0039	+ 0,116	+ 0,098	+ 1,23	+ 0,99
9—6	+ 0,0001	+ 0,0000	+ 0,002	+ 0,001	+ 0,05	+ 0,03
4—7	+ 0,0014	— 0,0007	+ 0,032	— 0,017	+ 0,32	— 0,16
5—7	+ 0,0146	— 0,0058	+ 0,329	— 0,132	+ 3,04	— 1,22
6—7	+ 0,0380	+ 0,0010	+ 0,827	+ 0,023	+ 7,41	+ 0,19
7—7	+ 0,3293	+ 0,0261	+ 6,787	+ 0,538	+ 57,07	+ 4,52
8—7	+ 0,0012	+ 0,0000	+ 0,069	+ 0,008	+ 1,04	+ 0,13
9—7	+ 0,0022	+ 0,0020	+ 0,066	+ 0,057	+ 0,75	+ 0,63
10—7	+ 0,0000	+ 0,0000	+ 0,002	+ 0,000	+ 0,03	+ 0,01
5—8	+ 0,0008	— 0,0004	+ 0,022	— 0,011	+ 0,25	— 0,11
6—8	+ 0,0079	— 0,0030	+ 0,199	— 0,075	+ 2,01	— 0,76
7—8	+ 0,0200	+ 0,0008	+ 0,489	+ 0,019	+ 4,80	+ 0,18
8—8	+ 0,1523	+ 0,0138	+ 3,542	+ 0,321	+ 32,90	+ 2,98
9—8	+ 0,0006	+ 0,0000	+ 0,037	+ 0,005	+ 0,61	+ 0,09
10—8	+ 0,0011	+ 0,0010	+ 0,037	+ 0,033	+ 0,46	+ 0,39
11—8	+ 0,0000	+ 0,0000	+ 0,001	+ 0,000	+ 0,03	+ 0,00

$\varepsilon - \varepsilon'$	$\frac{m'}{\sin 1''}(D - f\cos\overline{\varepsilon' - F})^{-\frac{1}{2}}$		$\frac{a^2 m'}{\sin 1''}(D - f\cos\overline{\varepsilon' - F})^{-\frac{3}{2}}$		$\frac{a^4 m'}{\sin 1''}(D - f\cos\overline{\varepsilon' - F})^{-\frac{5}{2}}$	
	cos	sin	cos	sin	cos	sin
6— 9	+ 0,0005	— 0,0002	+ 0,015	— 0,007	+ 0,17	— 0,08
7— 9	+ 0,0042	— 0,0015	+ 0,118	— 0,042	+ 1,28	— 0,46
8— 9	+ 0,0105	+ 0,0006	+ 0,283	+ 0,014	+ 3,02	+ 0,15
9— 9	+ 0,0709	+ 0,0072	+ 1,837	+ 0,187	+ 18,67	+ 1,91
10— 9	+ 0,0003	+ 0,0000	+ 0,020	+ 0,003	+ 0,35	+ 0,06
11— 9	+ 0,0006	+ 0,0005	+ 0,020	+ 0,019	+ 0,27	+ 0,24
12— 9	+ 0,0000	+ 0,0000	+ 0,000	+ 0,000	+ 0,01	— 0,00
7—10	+ 0,0003	— 0,0002	+ 0,009	— 0,004	+ 0,11	— 0,05
8—10	+ 0,0023	— 0,0007	+ 0,069	— 0,023	+ 0,80	— 0,28
9—10	+ 0,0054	+ 0,0004	+ 0,162	+ 0,010	+ 1,86	+ 0,11
10—10	+ 0,0332	+ 0,0038	+ 0,948	+ 0,108	+ 10,47	+ 1,19
11—10	+ 0,0002	+ 0,0000	+ 0,011	+ 0,002	+ 0,20	+ 0,04
12—10	+ 0,0003	+ 0,0003	+ 0,011	+ 0,010	+ 0,15	+ 0,14
13—10	+ 0,0000	+ 0,0000	+ 0,000	+ 0,000	+ 0,01	— 0,00
8—11	+ 0,0002	— 0,0001	+ 0,006	— 0,002	+ 0,08	— 0,03
9—11	+ 0,0012	— 0,0004	+ 0,039	— 0,012	+ 0,50	— 0,16
10—11	+ 0,0029	+ 0,0003	+ 0,091	+ 0,007	+ 1,13	+ 0,08
11—11	+ 0,0156	+ 0,0019	+ 0,488	+ 0,061	+ 5,81	+ 0,73
12—11	+ 0,0001	+ 0,0000	+ 0,006	+ 0,001	+ 0,11	+ 0,02
13—11	+ 0,0002	+ 0,0002	+ 0,006	+ 0,006	+ 0,09	+ 0,08
14—11	+ 0,0000	+ 0,0000	+ 0,000	— 0,000	+ 0,01	— 0,00
9—12	+ 0,0001	— 0,0000	+ 0,004	— 0,001	+ 0,05	— 0,02
10—12	+ 0,0006	— 0,0002	+ 0,023	— 0,007	+ 0,30	— 0,09
11—12	+ 0,0014	+ 0,0002	+ 0,051	+ 0,004	+ 0,67	+ 0,05
12—12	+ 0,0074	+ 0,0010	+ 0,250	+ 0,034	+ 3,20	+ 0,44
13—12	+ 0,0000	+ 0,0000	+ 0,003	+ 0,001	+ 0,06	+ 0,01
14—12	+ 0,0001	+ 0,0001	+ 0,003	+ 0,003	+ 0,05	+ 0,05
15—12	+ 0,0000	+ 0,0000	+ 0,000	— 0,000	+ 0,00	— 0,00
10—13	+ 0,0000	— 0,0000	+ 0,002	— 0,001	+ 0,03	— 0,01
11—13	+ 0,0003	— 0,0001	+ 0,013	— 0,003	+ 0,18	— 0,05
12—13	+ 0,0008	+ 0,0001	+ 0,028	+ 0,002	+ 0,40	+ 0,03
13—13	+ 0,0035	+ 0,0005	+ 0,128	+ 0,019	+ 1,75	+ 0,26
14—13	+ 0,0000	+ 0,0000	+ 0,001	+ 0,000	+ 0,04	+ 0,01
15—13	+ 0,0000	+ 0,0000	+ 0,002	+ 0,002	+ 0,03	+ 0,03
16—13	+ 0,0000	+ 0,0000	+ 0,000	— 0,000	+ 0,00	— 0,00

Um die Koefficienten i den Reihen für $A^{-\frac{n}{2}}$ zu prüfen mache ich folgende Entwickelung

$$A^{-\frac{n}{2}} = 4\beta_0^{(n)} + 8\sum_{i'=1}\beta_{i'}^{(n)} \cos i'(\varepsilon' - F)$$

$$= 4\beta_0^{(n)} + 8\sum_{i'=1}\beta_{i'}^{(n)} (\cos i'\varepsilon' \cos i'F + \sin i'\varepsilon' \sin i'F)$$

und wenn wir F für $\varepsilon = 0^\circ$ mit F_0 bezeichnen, wird die vorige Formel für $\varepsilon = 0^\circ$

$$A^{-\frac{n}{2}} = 4\beta_0^{(n)} + 8\sum_{i'=1}\beta_{i'}^{(n)} \cos i'F_0 \cos i'\varepsilon' + 8\sum_{i'=1}\beta_{i'}^{(n)} \sin i'F_0 \sin i'\varepsilon'. \quad (a)$$

Wir haben aber auch die Entwickelung von $A^{-\frac{n}{2}}$

$$A^{-\frac{n}{2}} = \sum\sum\left(C_{i,\nu}^{(n),c} \mp S_{i,\nu}^{(n),s}\right) \cos\left[(i \mp \nu)\varepsilon - i\varepsilon'\right]$$

$$\mp \sum\sum\left(C_{i,\nu}^{(n),s} \pm S_{i,\nu}^{(n),c}\right) \sin\left[(i \mp \nu)\varepsilon - i\varepsilon'\right]$$

die wir folgenderweise schreiben

$$A^{-\frac{n}{2}} = \sum\sum M_{i,i'}^{(n)} \cos(i\varepsilon - i'\varepsilon') + \sum\sum N_{i,i'}^{(n)} \sin(i\varepsilon - i'\varepsilon')$$

und wenn wir hier $\varepsilon = 0^\circ$ setzen

$$A^{-\frac{n}{2}} = \sum\sum M_{i,i'}^{(n)} \cos i'\varepsilon' - \sum\sum N_{i,i'}^{(n)} \sin i'\varepsilon' \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

Die Gleichungen (a) und (b) sind identisch, also erhalten wir

$$4\beta_0^{(n)} = \sum_i M_{i,0}^{(n)}$$

$$8\beta_{i'}^{(n)} \cos i'F_0 = \sum_i M_{i,i'}^{(n)}$$

$$8\beta_{i'}^{(n)} \sin i'F_0 = -\sum_i N_{i,i'}^{(n)}$$

Hierdurch bekomme ich eine Kontrolle der vorhergehenden Rechnung (auch der mechanischen Quadraturen). Dagegen entgehen alle Glieder mit $\sin i'\varepsilon'$ multiplicirt für $i' = 0$ dieser Kontrolle.

i'	$8\beta_{i'}^{(1)} \cos i'F_0$	$\sum_i M_{i,i'}^{(1)}$	$8\beta_{i'}^{(3)} \cos i'F_0$	$\sum_i M_{i,i'}^{(3)}$	$8\beta_{i'}^{(5)} \cos i'F_0$	$\sum_i M_{i,i'}^{(5)}$
0	½ 210,03488	½ 210,03486	½ 374,3344	½ 374,3343	½ 999,893	½ 999,892
1	54,8651	54,8644	257,092	257,079	872,18	871,99
2	20,9948	20,9939	156,357	156,342	659,36	659,23
3	8,8723	8,8723	90,249	90,249	457,88	457,76
4	3,9270	5,9264	50,584	50,571	300,67	300,56
5	1,7854	1,7848	27,821	27,811	189,79	189,69
6	0,8261	0,8261	15,100	15,100	116,34	116,26
7	0,3870	0,3867	8,116	8,112	69,72	69,66
8	0,1830	0,1827	4,330	4,327	41,13	41,06
9	0,0871	0,0870	2,301	2,294	23,80	23,77
10	0,0417	0,0417	1,210	1,210	13,64	13,60
11	0,0201	0,0202	0,637	0,636	7,74	7,73
12	0,0097	0,0096	0,334	0,334	4,35	4,33
13	0,0047	0,0046	0,174	0,174	2,43	2,43

i'	$-8\beta_{i'}^{(1)} \sin i'F_0$	$\sum_i N_{i,i'}^{(1)}$	$-8\beta_{i'}^{(3)} \sin i'F_0$	$\sum_i N_{i,i'}^{(3)}$	$-8\beta_{i'}^{(5)} \sin i'F_0$	$\sum_i N_{i,i'}^{(5)}$
1	0,4552	0,4557	2,133	2,140	7,24	7,29
2	0,3484	0,3494	2,595	2,605	10,94	11,04
3	0,2209	0,2209	2,247	2,247	11,40	11,50
4	0,1304	0,1313	1,679	1,669	9,98	10,08
5	0,0741	0,0746	1,155	1,166	7,88	7,96
6	0,0412	0,0412	0,752	0,752	5,80	5,87
7	0,0225	0,0226	0,472	0,477	4,05	4,10
8	0,0122	0,0122	0,288	0,292	2,73	2,47
9	0,0065	0,0066	0,172	0,174	1,78	1,82
10	0,0035	0,0036	0,101	0,103	1,13	1,15
11	0,0018	0,0019	0,058	0,061	0,71	0,72
12	0,0010	0,0011	0,033	0,034	0,43	0,44
13	0,0005	0,0005	0,019	0,019	0,26	0,27

Die Differenzen in der Kontrolle entstehen nicht aus Rechenfehlern, sondern kommen von vernachlässigten Gliedern.

Ich erhalte auch eine Kontrolle für die cos-Koefficienten dadurch, dass ich für $\varepsilon = \varepsilon' = 0°$ direkt

$$A^{-\frac{n}{2}} = \frac{m'}{\sin 1''} \alpha^{n-1} [D - f \cos(\varepsilon' - F)]^{-\frac{n}{2}}$$

berechne und mit der Summe von den cos-Koefficienten vergleiche

	$A^{-\frac{1}{2}}$	$A^{-\frac{3}{2}}$	$A^{-\frac{5}{2}}$
Direkt	197″,0259	801″,658	3,260″,14
Reihe	197 ,0178	801 ,406	3,258 ,02

VI.

Wir haben jetzt (I 168)

$$\frac{m'}{\sin 1''} \frac{a}{\Delta} = A^{-\frac{1}{2}} - \frac{\gamma_2}{4\alpha^2} A^{-\frac{3}{2}} \cos 2\varepsilon'$$

$$\frac{\alpha^2 m'}{\sin 1''} \left(\frac{a}{\Delta}\right)^3 = A^{-\frac{3}{2}} - \frac{3\gamma_2}{4\alpha^2} A^{-\frac{5}{2}} \cos 2\varepsilon'$$

oder mit numerischen Koefficienten

$$\frac{m'}{\sin 1''} \frac{a}{\Delta} = A^{-\frac{1}{2}} + 2\,[6{,}4686848_n]\, A^{-\frac{3}{2}} \cos 2\varepsilon'$$

$$\frac{\alpha^2 m'}{\sin 1''} \left(\frac{a}{\Delta}\right)^3 = A^{-\frac{3}{2}} + 2\,[6{,}9458061_n]\, A^{-\frac{5}{2}} \cos 2\varepsilon'.$$

Durch Substitution der gegebenen Entwickelungen von $A^{-\frac{1}{2}}$, $A^{-\frac{3}{2}}$ und $A^{-\frac{5}{2}}$ erhalten wir für

$$\frac{m'}{\sin 1''} \cdot \frac{a}{\Delta} \text{ und } \frac{\alpha^2 m'}{\sin 1''} \left(\frac{a}{\Delta}\right)^3$$

folgende Entwickelungen, die wir schreiben

$$\frac{m'}{\sin 1''} \alpha^{n-1} \left(\frac{a}{\Delta}\right)^n = \tfrac{1}{2}(0 \,.\, 0 \,.\, c) + \sum\sum (ii'c) \cos(i\varepsilon - i'\varepsilon')$$
$$+ \sum\sum (ii's) \sin(i\varepsilon - i'\varepsilon').$$

$\varepsilon\ \varepsilon'$	$\frac{m'}{\sin 1''}\left(\frac{a}{\varDelta}\right)$		$\frac{a^2 m'}{\sin 1''}\left(\frac{a}{\varDelta}\right)^3$	
	cos	sin	cos	sin
0—0	+ ½ 209,12189	—	+ ½ 361,8547	—
1—0	+ 0,26700	+ 0,00157	+ 4,1488	+ 0,1548
2—0	+ 0,14218	+ 0,12714	+ 1,4783	+ 1,2484
3—0	+ 0,00129	+ 0,00127	+ 0,0302	+ 0,0284
4—0	+ 0,00003	—	+ 0,0009	—
— 2—1	+ 0,0023	— 0,0022	+ 0,044	— 0,039
— 1—1	+ 0,2655	— 0,1853	+ 1,816	— 1,424
0—1	+ 0,9590	— 0,0358	+ 6,360	— 0,223
1—1	+ 53,3508	+ 0,6026	+ 244,170	+ 2,757
2—1	+ 0,1053	— 0,0013	+ 2,459	+ 0,102
3—1	+ 0,0792	+ 0,0767	+ 1,049	+ 0,942
4—1	+ 0,0007	+ 0,0007	+ 0,020	+ 0,019
— 1—2	+ 0,0042	— 0,0034	+ 0,056	— 0,049
0—2	+ 0,1319	— 0,1233	+ 1,477	— 1,215
1—2	+ 0,6844	— 0,0188	+ 6,046	— 0,159
2—2	+ 19,9600	+ 0,4509	+ 145,530	+ 3,286
3—2	+ 0,0456	— 0,0010	+ 1,398	+ 0,067
4—2	+ 0,0431	+ 0,0438	+ 0,688	+ 0,650
5—2	+ 0,0004	+ 0,0004	+ 0,013	+ 0,012
— 1—3	+ 0,0000	— 0,0006	+ 0,002	— 0,007
0—3	+ 0,00356	— 0,00317	+ 0,0556	— 0,0488
1—3	+ 0,07534	— 0,07293	+ 1,0719	— 0,8948
2—3	+ 0,41665	— 0,00707	+ 4,7161	— 0,0757
3—3	+ 8,2489	+ 0,2795	+ 82,255	+ 2,787
4—3	+ 0,0207	— 0,0004	+ 0,775	+ 0,044
5—3	+ 0,0231	+ 0,0243	+ 0,430	+ 0,424
6—3	+ 0,0002	+ 0,0002	+ 0,008	+ 0,007
1—4	+ 0,0026	— 0,0025	+ 0,047	— 0,042
2—4	+ 0,0431	— 0,0409	+ 0,730	— 0,604
3—4	+ 0,2382	— 0,0013	+ 3,306	— 0,029
4—4	+ 3,5708	+ 0,1614	+ 45,128	+ 2,039
5—4	+ 0,0098	— 0,0001	+ 0,424	+ 0,017
6—4	+ 0,0121	+ 0,0132	+ 0,259	+ 0,265
7—4	+ 0,0002	+ 0,0001	+ 0,004	+ 0,004

$\varepsilon\ \varepsilon'$	$\frac{m'}{\sin 1''}\left(\frac{a}{\Delta}\right)$		$\frac{a^2 m'}{\sin 1''}\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3$	
	cos	sin	cos	sin
2—5	+ 0,0017	— 0,0018	+ 0,038	— 0,033
3—5	+ 0,0243	— 0,0222	+ 0,478	— 0,385
4—5	+ 0,1317	+ 0,0007	+ 2,169	+ 0,012
5—5	+ 1,5877	+ 0,0897	+ 24,289	+ 1,373
6—5	+ 0,0047	+ 0,0001	+ 0,229	+ 0,019
7—5	+ 0,0063	+ 0,0070	+ 0,152	+ 0,161
8—5	+ 0,0001	+ 0,0000	+ 0,002	+ 0,002
2—6	— 0,0001	— 0,0001	+ 0,000	— 0,004
3—6	+ 0,00112	— 0,00110	+ 0,0264	— 0,0241
4—6	+ 0,01362	— 0,01186	+ 0,3020	— 0,2358
5—6	+ 0,07120	+ 0,00117	+ 1,359	+ 0,023
6—6	+ 0,71850	+ 0,04873	+ 12,900	+ 0,876
7—6	+ 0,00227	+ 0,00006	+ 0,123	+ 0,012
8—6	+ 0,00326	+ 0,00377	+ 0,087	+ 0,095
9—6	+ 0,00005	+ 0,00001	+ 0,002	+ 0,000
4—7	+ 0,0008	— 0,0007	+ 0,018	— 0,017
5—7	+ 0,0075	— 0,0062	+ 0,186	— 0,140
6—7	+ 0,0379	+ 0,0010	+ 0,824	+ 0,023
7—7	+ 0,3292	+ 0,0261	+ 6,784	+ 0,537
8—7	+ 0,0011	+ 0,0000	+ 0,066	+ 0,008
9—7	+ 0,0017	+ 0,0019	+ 0,050	+ 0,055
10—7	+ 0,0000	+ 0,0000	+ 0,001	+ 0,000
5—8	+ 0,0004	— 0,0004	+ 0,012	— 0,011
6—8	+ 0,0041	— 0,0033	+ 0,113	— 0,081
7—8	+ 0,0200	+ 0,0008	+ 0,487	+ 0,019
8—8	+ 0,1522	+ 0,0138	+ 3,540	+ 0,320
9—8	+ 0,0006	+ 0,0000	+ 0,035	+ 0,005
10—8	+ 0,0008	+ 0,0010	+ 0,028	+ 0,032
6—9	+ 0,0003	— 0,0002	+ 0,008	— 0,007
7—9	+ 0,0022	— 0,0017	+ 0,068	— 0,046
8—9	+ 0,0105	+ 0,0006	+ 0,282	+ 0,014
9—9	+ 0,0709	+ 0,0072	+ 1,837	+ 0,186
10—9	+ 0,0003	+ 0,0000	+ 0,019	+ 0,003
11—9	+ 0,0005	+ 0,0005	+ 0,015	+ 0,018

$\varepsilon\ \varepsilon'$	$\frac{m'}{\sin 1''}\left(\frac{a}{\Delta}\right)$		$\frac{a^2 m'}{\sin 1''}\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3$	
	cos	sin	cos	sin
7—10	+ 0,0002	— 0,0002	+ 0,005	— 0,004
8—10	+ 0,0013	— 0,0008	+ 0,040	— 0,026
9—10	+ 0,0054	+ 0,0004	+ 0,161	+ 0,010
10—10	+ 0,0332	+ 0,0038	+ 0,947	+ 0,108
11—10	+ 0,0002	+ 0,0000	+ 0,010	+ 0,002
12—10	+ 0,0002	+ 0,0003	+ 0,008	+ 0,010
8—11	+ 0,0001	— 0,0001	+ 0,003	— 0,002
9—11	+ 0,0007	— 0,0005	+ 0,023	— 0,014
10—11	+ 0,0029	+ 0,0003	+ 0,091	+ 0,007
11—11	+ 0,0156	+ 0,0019	+ 0,488	+ 0,061
12—11	+ 0,0001	+ 0,0000	+ 0,006	+ 0,001
13—11	+ 0,0001	+ 0,0002	+ 0,004	+ 0,006
9—12	+ 0,0001	— 0,0000	+ 0,002	— 0,001
10—12	+ 0,0003	— 0,0002	+ 0,014	— 0,008
11—12	+ 0,0014	+ 0,0002	+ 0,051	+ 0,004
12—12	+ 0,0074	+ 0,0010	+ 0,250	+ 0,034
13—12	+ 0,0000	+ 0,0000	+ 0,003	+ 0,001
14—12	+ 0,0001	+ 0,0001	+ 0,001	+ 0,003
10—13	+ 0,0000	— 0,0000	+ 0,001	— 0,001
11—13	+ 0,0002	— 0,0001	+ 0,008	— 0,004
12—13	+ 0,0008	+ 0,0001	+ 0,028	+ 0,002
13—13	+ 0,0035	+ 0,0005	+ 0,128	+ 0,019
14—13	+ 0,0000	+ 0,0000	+ 0,001	+ 0,000
15—13	+ 0,0000	+ 0,0000	+ 0,001	+ 0,002

Als Kontrolle der vorstehenden Rechnung habe ich $\varepsilon = 0$ gesetzt, und die Summen der Koefficienten für jedes i' gebildet, und diese derselben Rechnung unterworfen. Das Resultat dieser muss mit der Summe der Koefficienten einer jeden Abteilung des Hauptresultates übereinstimmen.

Das Resultat der Kontrolle ist hier unten angegeben.

i'	$\frac{m'}{\sin 1''} \cdot \frac{a}{\Delta}$		$\frac{a^2 m'}{\sin 1''} \left(\frac{a}{\Delta}\right)^3$	
	Reihe	Kontrolle	Reihe	Kontrolle
	cos		cos	
0	½ 209,94289	½ 209,94286	½ 373,1711	½ 373,1705
1	54,7628	54,7622	255,918	255,905
2	20,8696	20,8689	155,208	155,194
3	8,7885	8,7885	89,318	89,312
4	3,8768	3,8760	49,898	49,886
5	1,7565	1,7559	27,357	27,345
6	0,8099	0,8099	14,799	14,799
7	0,3782	0,3776	7,929	7,924
8	0,1781	0,1779	4,215	4,212
9	0,0847	0,0844	2,229	2,226
10	0,0405	0,0408	1,171	1,170
11	0,0195	0,0195	0,615	0,613
12	0,0093	0,0092	0,321	0,322
13	0,0045	0,0044	0,167	0,167
i'	sin		sin	
0	0,1300	0,1298	1,432	1,428
1	0,4554	0,4557	2,134	2,136
2	0,3485	0,3485	2,589	2,592
3	0,2198	0,2199	2,235	2,234
4	0,1299	0,1303	1,650	1,654
5	0,0735	0,0738	1,149	1,153
6	0,0407	0,0406	0,742	0,741
7	0,0221	0,0222	0,466	0,468
8	0,0119	0,0119	0,284	0,286
9	0,0064	0,0064	0,168	0,170
10	0,0035	0,0035	0,100	0,100
11	0,0018	0,0018	0,059	0,059
12	0,0011	0,0011	0,033	0,033
13	0,0005	0,0005	0,018	0,018

Für $\varepsilon = \varepsilon' = 0$ ist, da

$$\frac{\alpha^{n-1} m'}{\sin 1''}\left(\frac{a}{\Delta}\right)^n = \frac{\alpha^{n-1} m'}{\sin 1''}\left[D - f\cos(\varepsilon' - F) + \tfrac{1}{2}\gamma_2 \cos 2\varepsilon'\right]^{-\frac{n}{2}}$$

	$\frac{m'}{\sin 1''}\cdot\frac{a}{\Delta}$	$\frac{\alpha^2 m'}{\sin 1''}\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3$
Direkt	196,5558	795.934
Reihe	196,5503	795,726

VII.

Wir haben im Vorhergehenden für $\frac{a}{\Delta}$ und $\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3$ Entwickelungen von der Form

$$F = \Sigma\Sigma (ii'c) \cos(i\varepsilon - i'\varepsilon) + \Sigma\Sigma (ii's) \sin(i\varepsilon - i'\varepsilon)$$

bekommen. Statt der excentrischen Anomalie ε' des störenden Planeten wird um die Ausführung der unten folgenden Integrationen einfach zu machen zunächst die mittlere Anomalie g' eingeführt, wodurch diese Form auf die folgende

$$F = \Sigma\Sigma ((ii'c)) \cos(i\varepsilon - i'g') + \Sigma\Sigma ((ii's)) \sin(i\varepsilon - i'g')$$

gebracht wird.

Zwischen den Koefficienten dieser beiden Entwickelungen existiren folgende Relationen:

$$((0, 0, c)) = (0, 0, c) - 2\lambda' (0, 1, c)$$
$$((1, 0, c)) = (1, 0, c) - \lambda' [(1, 1, c) + (-1, 1, c)]$$
$$((2, 0, c)) = (2, 0, c) - \lambda' [(2, 1, c) + (-2, 1, c)]$$

. . . .

$$((1, 0, s)) = (1, 0, s) - \lambda' [(1, 1, s) - (-1, 1, s)]$$
$$((2, 0, s)) = (2, 0, s) - \lambda' [(2, 1, s) - (-2, 1, s)]$$

. . . .

$$\left(\left(i, i', {}^{c}_{s}\right)\right) = \left(i, i', {}^{c}_{s}\right) I^{0}_{i'\lambda'} - \left(i, i' + 1, {}^{c}_{s}\right) \frac{i' + 1}{i'} I^{(1)}_{i'\lambda'} +$$
$$+ \left(i, i' + 2, {}^{c}_{s}\right) \frac{i' + 2}{i'} I^{(2)}_{i'\lambda'} -$$
$$- \left(i, i' - 1, {}^{c}_{s}\right) \frac{i' - 1}{i'} I^{(1)}_{i'\lambda'} +$$
$$+ \left(i, i' - 2, {}^{c}_{s}\right) \frac{i' - 2}{i'} I^{(2)}_{i'\lambda'} + \ldots$$

wo $\lambda' = \frac{e'}{2}$ und $I^{(m)}_{i'\lambda'}$ die bekannte Besselsche Transcendente bedeutet. Diese Transcendente ist also zu ermitteln nach der folgenden von HANSEN gegebenen Methode:

$$i'\lambda' = i' . \tfrac{1}{2} e' \; (i' = 1, 2, 3 \ldots)$$
$$I^{(m)}_{i'\lambda'} = I^{(0)}_{i'\lambda'} \cdot p^{(i')}_1 p^{(i')}_2 p^{(i')}_3 \ldots p^{(i')}_m$$
$$\frac{1}{p^{(i')}_m} = \frac{m}{i'\lambda'} - p^{(i')}_{m+1}$$
$$I^{(0)}_{i'\lambda'} = 1 - \frac{(i'\lambda')^2}{1^2} + \frac{(i'\lambda')^4}{1^2 2^2} - \frac{(i'\lambda')^6}{1^2 2^2 3^2} + \ldots$$

Die Werthe der $I^{(m)}_{i'\lambda'}$ sind in der folgenden Tafel enthalten und zwar ist $1 - I^{(0)}_{i'\lambda'}$ statt $I^{0}_{i'\lambda'}$ angesetzt.

$\log \lambda = 8{,}3848574.$

i'	$\log (I^{(0)}_{i'\lambda'} - 1)$	$\log I^{(1)}_{i'\lambda'}$	$\log I^{(2)}_{i'\lambda'}$	$\log I^{(3)}_{i'\lambda'}$	$\log I^{(4)}_{i'\lambda'}$
1	$6{,}76965_n$	8,384730	6,4686	4,876	—
2	$7{,}37154_n$	8,685376	7,0704	5,279	—
3	$7{,}72838_n$	8,860828	7,42216	5,807	—
4	$7{,}97282_n$	8,984871	7,67144	6,182	4,6
5	$8{,}16606_n$	9,080629	7,86449	6,472	4,95
6	$8{,}32372_n$	9,158400	8,0219	6,709	5,27
7	$8{,}45678_n$	9,223679	8,1547	6,909	5,537
8	$8{,}57180_n$	9,27974	8,2694	7,082	5,768
9	$8{,}67302_n$	9,32871	8,3703	7,234	5,972
10	$8{,}76332_n$	9,37202	8,4601	7,370	6,15
11	$8{,}84476_n$	9,4107	8,5411	7,493	6,32
12	$8{,}91887_n$	9,4455	8,6147	7,605	6,47
13	$8{,}98679_n$	9,4770	8,6821	7,707	6,61

Als Kontrolle dienen die Gleichungen

$$1 = I^{(0)}_k + 2\, I^{(2)}_k + 2\, I^{(4)}_k + \ldots$$
$$\sin 2k = 2\, I^{(1)}_k - 2\, I^{(3)}_k + \ldots$$

die wir erhalten wenn wir in den für diese Transcendenten geltenden Gleichungen

$$\cos(2k\sin\varphi) = I_k^{(0)} + 2\,I_k^{(2)}\cos 2\varphi + 2\,I_k^{(4)}\cos 4\varphi + \ldots$$

$$\sin(2k\cos\varphi) = \qquad 2\,I_k^{(1)}\cos\varphi - 2\,I_k^{(3)}\cos 3\varphi + \ldots$$

$\varphi = 0$ setzen.

Mit Benutzung der vorstehenden Tafel gehen $\frac{m'}{\sin 1''}\,\frac{a}{\varDelta}$ und $\frac{a^2 m'}{\sin 1''}\left(\frac{a}{\varDelta}\right)^3$ in folgende Reihen über:

$\varepsilon\ g'$	$\frac{m'}{\sin 1''}\,\frac{a}{\varDelta}$		$\frac{a^2 m'}{\sin 1''}\cdot\left(\frac{a}{\varDelta}\right)^3$	
	cos	sin	cos	sin
0—0	+ ½ 209,07536	—	+ ½ 361,5461	—
1—0	— 1,03363	— 0,01754	— 1,8184	+ 0,0533
2—0	+ 0,13957	+ 0,12712	+ 1,4176	+ 1,2450
3—0	— 0,00064	— 0,00059	+ 0,0048	+ 0,0055
— 2—1	+ 0,0022	— 0,0022	+ 0,048	— 0,039
— 1—1	+ 0,2495	— 0,1849	+ 1,740	— 1,420
0—1	+ 0,9518	— 0,0298	+ 6,283	— 0,164
1—1	+ 53,2862	+ 0,6081	+ 243,733	+ 2,762
2—1	— 0,8625	— 0,0282	— 4,596	— 0,057
3—1	+ 0,0842	+ 0,0769	+ 1,053	+ 0,940
4—1	— 0,0014	— 0,0014	— 0,018	— 0,012
— 1—2	+ 0,0101	— 0,0079	+ 0,098	— 0,083
0—2	+ 0,1545	— 0,1237	+ 1,624	— 1,218
1—2	+ 1,9700	+ 0,0012	+ 11,870	— 0,027
2—2	+ 19,8853	+ 0,4504	+ 144,906	+ 3,281
3—2	— 0,5517	— 0,0194	— 4,551	— 0,113
4—2	+ 0,0499	+ 0,0441	+ 0,737	+ 0,655
5—2	— 0,0014	— 0,0014	— 0,018	— 0,019
— 1—3	+ 0,0004	— 0,0009	+ 0,007	— 0,010
0—3	+ 0,01076	— 0,00915	+ 0,1324	— 0,1075
1—3	+ 0,15480	— 0,07270	+ 1,5692	— 0,8913
2—3	+ 1,37619	+ 0,01854	+ 11,6649	+ 0,1421
3—3	+ 8,1846	+ 0,2781	+ 81,571	+ 2,777
4—3	— 0,3223	— 0,0139	— 3,553	— 0,122
5—3	+ 0,0291	+ 0,0246	+ 0,495	+ 0,427
6—3	— 0,0010	— 0,0011	— 0,018	— 0,019

$\varepsilon\ g'$	$\frac{m'}{\sin 1''} \cdot \frac{a}{\Delta}$		$\frac{a^2 m'}{\sin 1''} \cdot \left(\frac{a}{\Delta}\right)^3$	
	cos	sin	cos	sin
1—4	+ 0,0117	— 0,0078	+ 0,148	— 0,107
2—4	+ 0,1195	— 0,0897	+ 1,401	— 0,592
3—4	+ 0,8806	+ 0,0217	+ 9,178	+ 0,219
4—4	+ 3,5281	+ 0,1598	+ 44,502	+ 2,021
5—4	— 0,1798	— 0,0091	— 2,471	— 0,118
6—4	+ 0,0165	+ 0,0134	+ 0,321	+ 0,266
7—4	— 0,0007	— 0,0007	— 0,015	— 0,015
2—5	+ 0,0101	— 0,0054	+ 0,145	— 0,091
3—5	+ 0,0828	— 0,0206	+ 1,146	— 0,367
4—5	+ 0,4718	+ 0,0179	+ 6,448	+ 0,242
5—5	+ 1,5552	+ 0,0882	+ 23,782	+ 1,352
6—5	— 0,0976	— 0,0056	— 1,605	— 0,082
7—5	+ 0,0098	+ 0,0072	+ 0,200	+ 0,162
8—5	— 0,0005	— 0,0004	— 0,012	— 0,012
2—6	+ 0,0005	— 0,0006	+ 0,011	— 0,012
3—6	+ 0,00780	— 0,00369	+ 0,1274	— 0,0698
4—6	+ 0,05406	— 0,01028	+ 0,8695	— 0,2115
5—6	+ 0,2591	+ 0,0129	+ 4,217	+ 0,210
6—6	+ 0,6977	+ 0,0476	+ 12,521	+ 0,856
7—6	— 0,0528	— 0,0035	— 0,994	— 0,059
8—6	+ 0,0051	+ 0,0039	+ 0,124	+ 0,097
9—6	— 0,0002	— 0,0003	— 0,007	— 0,008
4—7	+ 0,0058	— 0,0028	+ 0,103	— 0,050
5—7	+ 0,0386	— 0,0048	+ 0,622	— 0,117
6—7	+ 0,1391	+ 0,0086	+ 2,630	+ 0,162
7—7	+ 0,3168	+ 0,0252	+ 6,518	+ 0,521
8—7	— 0,0273	— 0,0021	— 0,595	— 0,039
9—7	+ 0,0029	+ 0,0019	+ 0,076	+ 0,055
10—7	— 0,0002	— 0,0002	— 0,005	— 0,006
5—8	+ 0,0037	— 0,0013	+ 0,080	— 0,033
6—8	+ 0,0202	— 0,0024	+ 0,424	— 0,061
7—8	+ 0,0737	+ 0,0055	+ 1,586	+ 0,117

$\varepsilon\ g'$	$\frac{m'}{\sin 1''} \cdot \frac{a}{\Delta}$		$\frac{a^2 m'}{\sin 1''} \cdot \left(\frac{a}{\Delta}\right)^3$	
	cos	sin	cos	sin
8— 8	+ 0,1446	+ 0,0132	+ 3,361	+ 0,306
9— 8	— 0,0148	— 0,0014	— 0,347	— 0,026
10— 8	+ 0,0015	+ 0,0011	+ 0,045	+ 0,032
6— 9	+ 0,0025	— 0,0007	+ 0,059	— 0,021
7— 9	+ 0,0120	— 0,0010	+ 0,280	— 0,029
8— 9	+ 0,0385	+ 0,0034	+ 0,982	+ 0,080
9— 9	+ 0,0660	+ 0,0068	+ 1,721	+ 0,177
10— 9	— 0,0074	— 0,0007	— 0,199	— 0,017
11— 9	+ 0,0009	+ 0,0006	+ 0,025	+ 0,019
7—10	+ 0,0017	— 0,0006	+ 0,041	— 0,012
8—10	+ 0,0068	— 0,0004	+ 0,179	— 0,012
9—10	+ 0,0199	+ 0,0020	+ 0,536	+ 0,052
10—10	+ 0,0307	+ 0,0035	+ 0,873	+ 0,102
11—10	— 0,0037	— 0,0004	— 0,112	— 0,010
12—10	+ 0,0004	+ 0,0003	+ 0,014	+ 0,010
8—11	+ 0,0010	— 0,0003	+ 0,028	— 0,008
9—11	+ 0,0042	— 0,0002	+ 0,110	— 0,011
10—11	+ 0,0104	+ 0,0013	+ 0,304	+ 0,034
11—11	+ 0,0141	+ 0,0017	+ 0,442	+ 0,057
12—11	— 0,0020	— 0,0002	— 0,061	— 0,007
13—11	+ 0,0002	+ 0,0002	+ 0,008	+ 0,007
9—12	+ 0,0007	— 0,0001	+ 0,018	— 0,005
10—12	+ 0,0021	— 0,0000	+ 0,068	— 0,001
11—12	+ 0,0052	+ 0,0007	+ 0,170	+ 0,020
12—12	+ 0,0066	+ 0,0009	+ 0,228	+ 0,030
13—12	— 0,0011	— 0,0001	— 0,034	— 0,003
10—13	+ 0,0003	— 0,0001	+ 0,013	— 0,003
11—13	+ 0,0013	+ 0,0001	+ 0,041	— 0,001
12—13	+ 0,0027	+ 0,0004	+ 0,094	+ 0,011
13—13	+ 0,0032	+ 0,0005	+ 0,116	+ 0,017
14—13	+ 0,0000	+ 0,0000	+ 0,001	+ 0,001

Um diese Rechnung zu kontrolliren habe ich hier, wie oben, $\varepsilon = 0^\circ$ gesetzt und dieselbe Rechnung für die verschiedenen Abteilungen wiederholt.

Das Resultat der Kontrolle ist hier unten angegeben.

i'	$\frac{m'}{\sin 1''} \cdot \frac{a}{\Delta}$				$\frac{a^2 m'}{\sin 1''} \cdot \left(\frac{a}{\Delta}\right)^3$			
	cos		sin		cos		sin	
	Direkt.	Kontrolle.	Direkt.	Kontrolle.	Direkt.	Kontrolle.	Direkt.	Kontrolle.
0	103,64298	103,64300	-	—	180,3770	180,3774	- -	—
1	53,7100	53,7101	0,4385	0,4385	248,243	248,243	2,010	2,010
2	21,5167	21,5171	0,3433	0,3431	154,666	154,665	2,481	2,479
3	9,4325	9,4325	0,2235	0,2236	91,868	91,866	2,196	2,195
4	4,8209	4,8217	0,1376	0,1369	53,064	53,070	1,674	1,668
5	2,0811	2,0822	0,0813	0,0801	30,099	30,113	1,204	1,194
6	0,9718	0,9721	0,0460	0,0461	16,869	16,870	0,808	0,803
7	0,4707	0,4710	0,0263	0,0260	9,349	9,362	0,526	0,522
8	0,2294	0,2300	0,0147	0,0146	5,149	5,158	0,335	0.328
9	0,1125	0,1133	0,0084	0,0082	2,818	2,825	0.209	0,201
10	0,0558	0,0561	0,0044	0,0042	1,531	1,538	0,130	0,124
11	0,0279	0,0280	0,0025	0,0025	0,831	0,836	0,072	0,076
12	0,0135	0,0137	0,0014	0,0014	0,445	0,449	0,041	0,042
13	0,0075	0,0075	0,0009	0,0009	0,265	0,270	0,025	0,027

Für $\varepsilon = g' = 0^\circ$ erhalten wir aus den Reihen 196″,5435 resp. 795″,574, aus der geschlossenen Funktionsform aber 196″,5558 resp. 795,934 als Werte von $\frac{m'}{\sin 1''} \cdot \frac{a}{\Delta}$ und $\frac{a^2 m'}{\sin 1''}\left(\frac{a}{\Delta}\right)^3$.

Die Differenz ist von vernachlässigten Gliedern abhängig.

VIII.

Um aus diesen Reihen die Störungsfunction $a\Omega$ und die Differentialquotienten derselben $ar\frac{\partial\Omega}{\partial r}$ und $a^2\frac{\partial\Omega}{\partial z}$ zu erhalten benutzen wir folgende Gleichungen

$$a\Omega = \frac{m'}{\sin 1''} \cdot \frac{a}{\Delta} - (H)$$

$$ar\frac{\partial\Omega}{\partial r}=\frac{1}{2}\frac{m'}{\sin 1''}\cdot\alpha^2\left(\frac{a}{\varDelta}\right)^3\cdot\left\{\left(\frac{r'}{a'}\right)^2-\frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{r}{a}\right)^2\right\}-\frac{1}{2}\frac{m'}{\sin 1''}\cdot\frac{a}{\varDelta}-(H)$$

$$a^2\frac{\partial\Omega}{\partial z}=-\frac{m'}{\sin 1''}\cdot\alpha^2\left(\frac{a}{\varDelta}\right)^3\cdot\frac{1}{\alpha}\sin J\frac{r'}{a'}\sin(f'+\Pi')+(J)$$

wo

$$(H)=\frac{1}{\alpha^2}\cdot\frac{m'}{\sin 1''}\cdot\left(\frac{a'}{r'}\right)^2\frac{r}{a}\cdot H$$

$$H=\cos(f+\Pi)\cos(f'+\Pi')+\cos J\sin(f+\Pi)\sin(f'+\Pi')$$

$$(J)=\frac{m'}{\alpha^2\sin 1''}\sin J\left(\frac{a'}{r'}\right)^2\sin(f'+\Pi')$$

$$(a)\quad \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{a'}{r'}\right)^2-\frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{r}{a}\right)^2\right\}=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}e'^2-\frac{1+\frac{1}{2}e^2}{2\alpha^2}+2\frac{e}{2\alpha^2}\cdot\cos\varepsilon$$

$$-2\frac{e^2}{8\alpha^2}\cos 2\varepsilon-2\sum_{m=1}\frac{I_{m\lambda'}^{(m)}}{m^2}\cos mg'$$

$$(b)-\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{r'}{a'}\sin J\sin(f'+\Pi')=+3e'c_2-2\sum_{m=1}\frac{1}{m}\left(I_{m\lambda'}^{(m-1)}-I_{m\lambda'}^{(m+1)}\right)\times$$

$$c_2\cos(-mg')+2\sum_{m=1}\frac{1}{m}\cdot\left(I_{m\lambda'}^{(m-1)}+I_{m\lambda'}^{(m+1)}\right)c_1\sin(1mg')$$

wo

$$c_1=\frac{1}{2\alpha}\sin J\cos\varphi'\,.\cos\Pi'$$

$$c_2=\frac{1}{2\alpha}\,.\sin J\sin\Pi'.$$

Die numerischen Werte dieser Ausdrücke fanden sich wie folgt:

$$\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{r'}{a'}\right)^2-\frac{1}{\alpha^2}\cdot\left(\frac{r}{a}\right)^2\right\}=[9{,}5778846]+2[8{,}0034250]\cos\varepsilon$$

$$+2[6{,}31485_n]\cos 2\varepsilon$$

$$+2[8{,}384730_n]\cos g'+2[6.46834_n]\cos 2g'$$

$$+2[4{,}853_n]\cos 3g'+\text{etc.}$$

$$-\frac{1}{\alpha}\frac{r'}{a'}\sin J\sin(f'+\Pi')=[7{,}1729243]+$$

$+ 2[8{,}0095322_n] \cos(-g') + 2[6{,}39409_n] \cos(-2g')$
$+ 2[4{,}9550_n] \cos(-3g') + 2[3{,}589_n] \cos(-4g')$

. . . .

$+ 2[8{,}3925248_n] \sin(-g') + 3[6{,}77717_n] \sin(-2g')$
$+ 2[5{,}3377_n] \sin(-3g') + 2[3{,}972_n] \sin(-4g')$ etc.

In Reihen entwickelt sind die (H) und (J):

$$
\begin{aligned}
(H) = {} & \tfrac{1}{2}(h\gamma_1 - h'\delta_1)\cos(-\varepsilon - g') + \tfrac{1}{2}(l\gamma_1 - l'\delta_1)\sin(-\varepsilon - g') \\
& - eh\gamma_1 \cos(\quad - g') \qquad + el'\delta_1 \sin(\quad - g') \\
& + \tfrac{1}{2}(h\gamma_1 + h'\delta_1)\cos(+\varepsilon - g') + \tfrac{1}{2}(l\gamma_1 + l'\delta_1)\sin(+\varepsilon - g') \\
& + \tfrac{1}{2}(h\gamma_2 - h'\delta_2)\cos(-\varepsilon - 2g') + \tfrac{1}{2}(l\gamma_2 - l'\delta_2)\sin(-\varepsilon - 2g') \\
& - eh\gamma_2 \cos(\quad - 2g') \qquad + el'\delta_2 \sin(\quad - 2g') \\
& + \tfrac{1}{2}(h\gamma_2 + h'\delta_2)\cos(+\varepsilon - 2g') + \tfrac{1}{2}(l\gamma_2 + l'\delta_2)\sin(+\varepsilon - 2g') \\
& \qquad \text{etc.} \qquad\qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(J) = {} & + b'\gamma_1 \cos(- g') + b\delta_1 \sin(- g') \\
& + b'\gamma_2 \cos(-2g') + b\delta_2 \sin(-2g') \\
& + b'\gamma_3 \cos(-3g') + b\delta_3 \sin(-3g') \text{ etc.}
\end{aligned}
$$

$$h = \frac{m'}{\alpha^2 \sin 1''} k \cdot \cos(\Pi - K)$$

$$l = \frac{m'}{\alpha^2 \sin 1''} \cdot \cos\varphi \cdot k \cdot \sin(\Pi - K)$$

$$b = -\frac{m'}{\alpha^2 \sin 1''} \cdot \cos\varphi' \sin J \cdot \cos \Pi'$$

$$b' = \frac{m'}{\alpha^2 \sin 1''} \cdot \sin J \sin \Pi'$$

$$h' = \frac{m'}{\alpha^2 \sin 1''} \cos\varphi \cdot \cos\varphi' k_1 \cos(\Pi' - K_1)$$

$$l' = \frac{m'}{\alpha^2 \sin 1''} \cos\varphi' k_1 \sin(\Pi - K_1)$$

$$\gamma_m = m \left\{ I_{m\lambda'}^{m-1} - I_{m\lambda'}^{m+1} \right\}$$

$$\delta_m = m \left\{ I_{m\lambda'}^{m-1} + I_{m\lambda'}^{m+1} \right\}$$

oder numerisch:

$\varepsilon\ g'$	(H)		(J)	
	cos	sin	cos	sin
−1—1	+ 0,1940	— 0,1000	—	—
0—1	— 3,9625	— 0,0364	+ 1,9969	+ 4,8233
1—1	+ 48,1658	+ 0,5442	—	—
−1—2	+ 0,0184	— 0,0097	—	—
0—2	— 0,3842	— 0,0035	+ 0,1936	+ 0,4678
1—2	+ 4,6709	+ 0,0528	—	—
−1—3	+ 0,00165	— 0,00083	—	—
0—3	— 0,03145	— 0,00028	+ 0,01585	+ 0,03826
1—3	+ 0,38218	+ 0,00429	—	—
−1—4	+ 0,0001	— 0,0001	—	—
0—4	— 0,0024	— 0,0000	+ 0,0012	+ 0,0029
1—4	+ 0,0293	+ 0,0003	—	—

Wir bezeichnen eine beliebige der Quantitäten $a\Omega$, $ar\frac{\partial\Omega}{\partial r}$ und $a^2\frac{\partial\Omega}{\partial z}$ mit folgender Entwickelung:

$$F = \Sigma\Sigma\,((ii'c))\cos(i\varepsilon - i'g') + \Sigma\Sigma\,((ii's))\sin(i\varepsilon - i'g')$$

nnd werden die Koefficienten $\left((ii'{}^{c}_{s})\right)$ in den folgenden Tafeln zusammengestellt, wo doch nicht $a\Omega$, sondern $(i)a\Omega$ auftritt.

ε g'	$(i)a\Omega$		$ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$		$a^2\left(\frac{d\Omega}{dz}\right)$	
	cos	sin	cos	sin	cos	sin
0—0	—	—	+ ½ 31,90746	—	+ ½ 0,41870	—
1—0	— 1,03363	— 0,01754	— 2,46887	— 0,05987	— 2,54793	+ 5,93927
2—0	+ 0,27914	+ 0,25424	+ 0,44161	+ 0,40749	+ 0,01306	— 0,02632
3—0	— 0,00192	— 0,00177	— 0,00797	— 0,00785	— 0,03856	+ 0,01545
— 2—1	— 0,004	+ 0,004	— 0,003	— 0,028	— 0,015	— 0,028
— 1—1	— 0,056	+ 0,085	+ 0,323	— 0,385	— 0,040	— 0,099
0—1	0,000	0,000	— 0,470	+ 0,032	— 1,677	— 4,055
1—1	+ 5,120	+ 0,059	+ 17,177	+ 0,196	+ 0,268	+ 0,342
2—1	— 1,725	— 0,046	— 2,394	— 0,082	— 1,556	+ 3,504
3—1	+ 0,253	+ 0,231	+ 0,346	+ 0,318	+ 0,029	— 0,061
4—1	— 0,006	— 0,006	— 0,010	— 0,010	— 0,023	+ 0,010
— 1—2	+ 0,008	— 0,002	— 0,015	+ 0,004	— 0,054	— 0,032
0—2	0,000	0,000	+ 0,750	— 0,389	+ 0,089	+ 0,100
1—2	— 2,701	— 0,052	— 5,636	— 0,088	— 2,889	— 5,997
2—2	+ 39,771	+ 0,901	+ 44,782	+ 1,013	+ 0,139	+ 0,405
3—2	— 1,655	— 0,058	— 1,988	— 0,084	— 0,899	+ 1,955
4—2	+ 0,200	+ 0,176	+ 0,251	+ 0,227	+ 0,028	— 0,059
5—2	— 0,007	— 0,007	— 0,009	— 0,010	— 0,015	+ 0,007
— 1—3	+ 0,0013	+ 0,0001	— 0,0012	— 0,0010	— 0,0044	— 0,0025
0—3	0,0000	0,0000	+ 0,0458	— 0,0155	— 0,0352	— 0,0007
1—3	— 0,2274	— 0,0770	— 0,1269	— 0,3029	— 0,1772	— 0,4859
2—3	+ 2,7524	+ 0,0371	+ 1,0171	— 0,0018	— 1,3814	— 3,5676
3—3	+ 24,554	+ 0,834	+ 26,738	+ 0,919	+ 0,066	+ 0,342
4—3	— 1,289	— 0,056	— 1,457	— 0,073	— 0,508	+ 1,057
5—3	+ 0,145	+ 0,123	+ 0,178	+ 0,150	+ 0,022	— 0,045
1—3	— 0,006	— 0,007	— 0,008	— 0,009	— 0,010	+ 0,004
1—4	— 0,018	— 0,008	— 0,010	— 0,021	— 0,043	— 0,042
2—4	+ 0,239	— 0,079	+ 0,226	— 0,206	— 0,147	— 0,373
3—4	+ 2,492	+ 0,065	+ 1,515	+ 0,028	— 0,753	— 2,007
4—4	+ 14,092	+ 0,639	+ 15,072	+ 0,683	+ 0,028	+ 0,248
5—4	— 0,899	— 0,045	— 0,985	— 0,060	— 0,276	+ 0,559
6—4	+ 0,099	+ 0,080	+ 0,114	+ 0,094	+ 0,015	— 0,030
7—4	— 0,005	— 0,005	— 0,006	— 0,006	— 0,006	+ 0,003

ε g'	$(i)a\Omega$		$ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$		$a^2\left(\frac{d\Omega}{dz}\right)$	
	cos	sin	cos	sin	cos	sin
2—5	+ 0,020	— 0,011	+ 0,021	— 0,021	— 0,032	— 0,038
3—5	+ 0,248	— 0,062	+ 0,204	— 0,132	— 0,105	— 0,274
4—5	+ 1,887	+ 0,072	+ 1,354	+ 0,049	— 0,398	— 1,093
5—5	+ 7,776	+ 0,441	+ 8,226	+ 0,467	+ 0,010	+ 0,166
6—5	— 0,586	— 0,034	— 0,631	— 0,040	— 0,149	+ 0,291
7—5	+ 0,065	+ 0,050	+ 0.072	+ 0,058	+ 0,010	— 0,019
8—5	— 0.004	— 0,008	— 0 005	— 0,005	— 0,004	+ 0,002
2—6	+ 0,0010	— 0,0012	+ 0,0010	— 0,0025	— 0,0046	— 0,0037
3—6	+ 0,0284	— 0,0111	+ 0,0212	— 0,0178	— 0,0284	— 0,0320
4—6	+ 0,2162	— 0,0411	+ 0,1714	— 0,0796	— 0,0682	— 0,1859
5—6	+ 1,295	+ 0,065	+ 1,010	+ 0,049	— 0,206	— 0,583
6—6	+ 4,186	+ 0,286	+ 4,395	+ 0,299	+ 0,002	+ 0,105
7—6	— 0,366	— 0,024	— 0,387	— 0,027	— 0,079	+ 0,150
8—6	+ 0,041	+ 0,031	+ 0,045	+ 0,035	+ 0,006	— 0,012
9—6	— 0,002	— 0,003	— 0,003	— 0,003	— 0,002	+ 0,001
4—7	+ 0,023	— 0,009	+ 0,019	— 0,014	— 0,016	— 0,024
5—7	+ 0,168	— 0,024	+ 0,134	— 0,046	— 0,042	— 0,119
6—7	+ 0,835	+ 0,052	+ 0,684	+ 0,042	— 0,105	— 0,305
7—7	+ 2,218	+ 0,176	+ 2,313	+ 0,184	— 0,001	+ 0,064
8—7	— 0,218	— 0,017	— 0,230	— 0,018	— 0,042	+ 0,076
9—7	+ 0,026	+ 0,017	+ 0,028	+ 0,020	+ 0,004	— 0,007
10—7	— 0,002	— 0,002	— 0.002	— 0,002	— 0,001	+ 0,001
5—8	+ 0,018	— 0,006	+ 0,016	— 0,010	— 0,010	— 0,017
6—8	+ 0,121	— 0,014	+ 0,098	— 0,025	— 0,025	— 0,076
7—8	+ 0,516	+ 0.038	+ 0,437	+ 0,032	— 0,053	— 0,158
8—8	+ 1,157	+ 0,106	+ 1,208	+ 0,109	— 0,001	+ 0,038
9—8	— 0,129	— 0,013	— 0,134	— 0,011	— 0,022	+ 0,038
10—8	+ 0,015	+ 0,011	+ 0,017	+ 0,012	+ 0,002	— 0,004
6—9	+ 0,015	— 0,004	+ 0,012	— 0,006	— 0,006	— 0,012
7—9	+ 0,084	— 0,007	+ 0,068	— 0,013	— 0,019	— 0,043
8—9	+ 0,308	+ 0,027	+ 0,268	+ 0,023	— 0,027	— 0,081
9—9	+ 0,594	+ 0,061	+ 0,621	+ 0,063	— 0,001	+ 0,022
10—9	— 0,074	— 0,007	— 0,077	— 0,007	— 0,012	+ 0,020
11—9	+ 0,010	+ 0,007	+ 0,009	+ 0,007	+ 0,001	— 0,002

$\varepsilon \; g'$	$(i) a \Omega$		$ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$		$a^2\left(\frac{d\Omega}{dz}\right)$	
	cos	sin	cos	sin	cos	sin
7—10	+ 0,012	— 0,004	+ 0,009	— 0,004	— 0,008	— 0,008
8—10	+ 0,054	— 0,003	+ 0,046	— 0,006	— 0,008	— 0,025
9—10	+ 0,179	+ 0,018	+ 0,159	+ 0,016	— 0,014	— 0,041
10—10	+ 0,307	+ 0,035	+ 0,317	+ 0,037	— 0,001	+ 0,012
11—10	— 0,041	— 0,004	— 0,048	— 0,004	— 0,006	+ 0,010
12—10	+ 0,005	+ 0,004	+ 0,005	+ 0,004	+ 0,000	— 0,001
8—11	+ 0,008	— 0,002	+ 0,007	— 0,003	— 0,002	— 0,005
9—11	+ 0,088	— 0,002	+ 0,029	— 0,005	— 0,004	— 0,014
10—11	+ 0,104	+ 0,013	+ 0,098	+ 0,010	— 0,007	— 0,021
11—11	+ 0,155	+ 0,019	+ 0,161	+ 0,021	— 0,001	+ 0,007
12—11	— 0,024	— 0,002	— 0,023	— 0,003	— 0,003	+ 0,005
13—11	+ 0,003	+ 0,003	+ 0,003	+ 0,003	- -	—
9—12	+ 0,006	— 0,001	+ 0,004	— 0,002	— 0,001	— 0,003
10—12	+ 0,021	— 0,000	+ 0,018	— 0,003	— 0,002	— 0,008
11—12	+ 0,057	+ 0,008	+ 0,053	+ 0,006	— 0,003	— 0,010
12—12	+ 0,079	+ 0,011	+ 0,082	+ 0,011	— 0,000	+ 0,004
13—12	— 0,014	— 0,001	— 0,013	— 0,001	— 0,002	+ 0,003
10—13	+ 0,003	— 0,001	+ 0,003	— 0,001	— 0,000	— 0,002
11—13	+ 0,014	+ 0,001	+ 0,011	— 0,001	— 0,000	— 0,005
12—13	+ 0,032	+ 0,005	+ 0,030	+ 0,003	— 0,001	— 0,006
13—13	+ 0,042	+ 0,006	+ 0,044	+ 0,006	— 0,002	+ 0,001

Die Kontrolle der vorigen Koefficienten ist folgendermassen ausgeführt. Erst habe ich die Koefficienten der Reihen (a) und (b) auf pag. (42) durch Einzetzen specieller Werte für ε und g' geprüft. Auch die (H) und (J) sind auf derselben Weise kontrollirt. Dann habe ich die mechanischen Multiplikationen dadurch geprüft, dass ich die verschiedenen Koefficienten in der Entwickelung von $\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{r'}{a'}\right)^2 - \frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{r}{a}\right)^2\right\}$ und $-\frac{1}{\alpha}\sin J \cdot \frac{r'}{a'} \cdot \sin(f' + \Pi')$ mit den Summen $\sum_i \left(\left(ii'^{c}_{s}\right)\right)$ aus der

Entwickelung von $\frac{m'}{\sin 1''}\alpha^2\left(\frac{a}{\varDelta}\right)^3$ für jedes i' multiplicirt habe und damit die Summen der entsprechenden Glieder in

$$\frac{1}{2}\frac{m'}{\sin 1''}\alpha^2\left(\frac{a}{\varDelta}\right)^3\left\{\left(\frac{r'}{a'}\right)^2-\frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{r}{a}\right)^2\right\} \text{ und}$$

$$-\frac{m'\alpha^2}{\sin 1''}\left(\frac{a}{\varDelta}\right)^3\frac{1}{\alpha}\sin J\frac{r'}{a'}\sin(f'+\Pi')$$

für jedes i' verglichen, welche Prüfung gut stimmt. Auch habe ich $ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$ und $\alpha^2\left(\frac{d\Omega}{dz}\right)$ für $\varepsilon = 0°$, $g' = 0°$ und 12° teils durch Reihen berechnet und als Resultat dabei bekommen:

		$ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$	$a^2\left(\frac{d\Omega}{dz}\right)$
$\varepsilon = 0°$	Direkt	+ 130″,407	— 13,289
$g' = 0°$	Reihe	+ 130 ,303	— 13,223
$\varepsilon = 0°$	Direkt	+ 101 ,291	— 5,085
$g' = 12°$	Reihe	+ 101 ,364	— 5,066

IX.

Für die schliessliche Berechnung der Störungen ist es erforderlich, statt der mittleren Anomalie des störenden Planeten des Verhältniss μ der mittleren Bewegungen und die mittleren Anomalien c und c' für eine bestimmte Epoche einzuführen. Man hat also die in der Form

$$((ii'c))\cos(i\varepsilon - i'g') + ((ii's))\sin(i\varepsilon - i'g')$$

berechneten Funktionen auf die Form

$$[ii'c]\cos(i\varepsilon - i'V) + [ii's]\sin(i\varepsilon - i'V)$$

wo $V = c' - \mu c + \mu\varepsilon$ ist, hinzuführen.

Es besteht folgende Relation zwischen den Koefficienten der beiden Formen:

$$\left[i, o, {c \atop s}\right] = \left(\left(i, o, {c \atop s}\right)\right)$$

$$\begin{aligned}\left[i, i', {c \atop s}\right] = \left(\left(i, i', {c \atop s}\right)\right) I^{(0)}_{i'\lambda} &+ I^{(1)}_{i'\lambda}\left\{\left(\left(i-1, i', {c \atop s}\right)\right) - \left(\left(i+1, i', {c \atop s}\right)\right)\right\} \\ &+ I^{(2)}_{i'\lambda}\left\{\left(\left(i-2, i', {c \atop s}\right)\right) + \left(\left(i+2, i', {c \atop s}\right)\right)\right\} \\ &+ I^{(3)}_{i'\lambda}\left\{\left(\left(i-3, i', {c \atop s}\right)\right) - \left(\left(i+3, i', {c \atop s}\right)\right)\right\} \\ &+ \text{etc.}\end{aligned}$$

wo $\lambda = \frac{1}{2}\mu e$.

Die Berechnung und Kontrolle dieser $I^{(m)}_{i'\lambda}$-Funktionen ist nach den im Paragraf (7) angegebenen Formeln ausgeführt.

$$\log \lambda = 8{,}1557041.$$

i'	$\log\left(I^{(0)}_{i'\lambda} - 1\right)$	$\log I^{(1)}_{i'\lambda}$	$\log I^{(2)}_{i'\lambda}$	$\log I^{(3)}_{i'\lambda}$	$\log I^{(4)}_{i'\lambda}$
1	$6{,}31154_n$	8,1556597	6,01035	3,689	–
2	$6{,}91334_n$	8,4565560	6,61232	4,592	–
3	$7{,}26545_n$	8,6824250	6,96435	5,120	3,15
4	$7{,}51516_n$	8,7570024	7,21397	5,495	3,65
5	$7{,}70879_n$	8,8535615	7,40758	5,785	4,04
6	$7{,}86692_n$	8,9822531	7,56561	6,023	4,35
7	$8{,}00051_n$	8,9986207	7,69912	6,2232	4,62
8	$8{,}11616_n$	9,0559443	7,81465	6,3966	4,85
9	$8{,}21809_n$	9,1063888	7,91646	6,5499	5,05
10	$8{,}30918_n$	9,1512487	8,00741	6,6867	5,24
11	$8{,}39148_n$	9,1917042	8,08957	6,8104	5,41
12	$8{,}46654_n$	9,2284651	8,16447	6,9233	5,56
13	$8{,}53550_n$	9,2621095	8,23325	7,0270	5,69

Mit Hülfe dieser Tafel ergaben sich folgende Endwerte der Störungsfunction und ihrer Differentialquotienten.

ε V	$(i)a\Omega$		$ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$		$a^2\left(\frac{d\Omega}{dz}\right)$	
	cos	sin	cos	sin	cos	sin
0–0	—	—	$+ \frac{1}{2}$ 31,90746	—	$+ \frac{1}{2}$ 0,41870	—
1–0	— 1,03368	— 0,01754	— 2,46887	— 0,05987	— 2,54793	+ 5,93927
2–0	+ 0,27914	+ 0,25424	+ 0,44161	+ 0,40749	+ 0,01306	— 0,02632
3–0	— 0,00192	— 0,00177	— 0,00797	— 0,00785	— 0,03356	+ 0,01545

ε V	$(i)a\Omega$ cos	$(i)a\Omega$ sin	$ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$ cos	$ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$ sin	$a^2\left(\frac{d\Omega}{dz}\right)$ cos	$a^2\left(\frac{d\Omega}{dz}\right)$ sin
— 2—1	— 0,003	+ 0,003	— 0,008	— 0,023	— 0,014	— 0,022
— 1—1	— 0,055	+ 0,085	+ 0,332	— 0,335	— 0,016	— 0,041
0—1	— 0,074	+ 0,000	— 0,711	+ 0,024	— 1,682	— 4,060
1—1	+ 5,143	+ 0,060	+ 17,201	+ 0,197	+ 0,261	+ 0,234
2—1	— 1,656	— 0,048	— 2,153	— 0,084	— 1,552	+ 3,509
3—1	+ 0,230	+ 0,230	+ 0,314	+ 0,317	+ 0,007	— 0,011
4—1	— 0,002	— 0,003	— 0,005	— 0,005	— 0,023	+ 0,009
— 1—2	+ 0,007	— 0,002	— 0,038	+ 0,015	— 0,056	— 0,037
0—2	+ 0,093	+ 0,001	+ 0,928	— 0,386	+ 0,106	+ 0,271
1—2	— 2,549	— 0,078	— 6,892	— 0,128	— 2,400	— 6,000
2—2	+ 39,708	+ 0,901	+ 44,641	+ 1,011	+ 0,096	+ 0,177
3—2	— 0,811	— 0,037	— 0,714	— 0,062	— 0,896	+ 1,965
4—2	+ 0,169	+ 0,174	+ 0,212	+ 0,225	+ 0,002	— 0,003
5—2	— 0,002	— 0,002	— 0,003	— 0,003	— 0,014	+ 0,007
— 1—3	+ 0,0011	+ 0,0000	— 0,0033	— 0,0006	— 0,0031	— 0,0029
0—3	+ 0,0120	+ 0,0033	+ 0,0517	— 0,0025	— 0,0290	+ 0,0146
1—3	— 0,3225	— 0,0777	— 0,1437	— 0,3021	— 0,1191	— 0,2818
2—3	+ 1,6831	— 0,0021	— 0,1386	— 0,0543	— 1,3893	— 3,5934
3—3	+ 24,682	+ 0,836	+ 26,795	+ 0,920	+ 0,028	+ 0,143
4—3	— 0,237	— 0,021	— 0,314	— 0,040	— 0,502	+ 1,068
5—3	+ 0,113	+ 0,122	+ 0,136	+ 0,148	+ 0,000	+ 0,000
6—3	— 0,001	— 0,005	— 0,002	— 0,003	— 0,009	+ 0,003
1—4	— 0,028	— 0,002	— 0,020	— 0,009	— 0,036	— 0,024
2—4	+ 0,117	— 0,082	+ 0,163	— 0,207	— 0,106	— 0,260
3—4	+ 1,692	+ 0,025	+ 0,660	— 0,023	— 0,761	— 2,034
4—4	+ 14,240	+ 0,643	+ 15,166	+ 0,686	+ 0,001	+ 0,100
5—4	— 0,093	— 0,013	— 0,124	— 0,026	— 0,275	+ 0,570
6—4	+ 0,071	+ 0,079	+ 0,082	+ 0,092	— 0,001	+ 0,002
7—4	+ 0,000	— 0,001	— 0,002	— 0,001	— 0,005	+ 0,002
2—5	+ 0,007	— 0,007	+ 0,009	— 0,012	— 0,026	— 0,021
3—5	+ 0,132	— 0,067	+ 0,129	— 0,135	— 0,078	— 0,197
4—5	+ 1,389	+ 0,037	+ 0,778	+ 0,007	— 0,404	— 1,118

i V	$(i)a\Omega$		$ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$		$a^2\left(\frac{d\Omega}{dz}\right)$	
	cos	sin	cos	sin	cos	sin
5—5	+ 7,914	+ 0,446	+ 8,326	+ 0,472	— 0,007	+ 0,066
6—5	— 0,028	— 0,007	— 0,043	— 0,011	— 0,149	+ 0,300
7—5	+ 0,042	+ 0,049	+ 0,048	+ 0,056	— 0,001	+ 0,002
8—5	+ 0,000	+ 0,001	— 0,002	— 0,001	0,003	+ 0,002
2—6	— 0,0003	0,0005	— 0,0003	— 0,0013	— 0,0028	— 0,0017
3—6	+ 0,0093	— 0,0075	+ 0,0097	— 0,0109	— 0,0186	— 0,0183
4—6	+ 0,1218	— 0,0463	+ 0,1015	— 0,0886	— 0,0520	— 0,1370
5—6	+ 0,944	+ 0,037	+ 0,640	+ 0,016	— 0,211	— 0,603
6—6	+ 4,298	+ 0,292	+ 4,483	+ 0,308	— 0,009	+ 0,041
7—6	— 0,005	— 0,008	— 0,008	— 0,004	— 0,080	+ 0,157
8—6	+ 0,025	+ 0,030	+ 0,028	+ 0,034	— 0,001	+ 0,001
9—6	+ 0,001	+ 0,000	— 0,000	— 0,000	— 0,002	+ 0,001
4—7	+ 0,010	— 0,007	+ 0,009	— 0,009	— 0,013	— 0,014
5—7	+ 0,096	— 0,029	+ 0,078	0,050	— 0,034	— 0,090
6—7	+ 0,621	+ 0,031	+ 0,458	+ 0,019	— 0,108	0,320
7—7	+ 2,302	+ 0,181	+ 2,382	+ 0,188	— 0,007	+ 0,024
8—7	+ 0,007	— 0,001	— 0,003	— 0,002	— 0,043	+ 0,080
9—7	+ 0,015	+ 0,016	+ 0,016	+ 0,019	— 0,000	+ 0,001
10—7	+ 0,000	+ 0,000	— 0,000	— 0,000	— 0,001	+ 0,000
5—8	+ 0,007	— 0,004	+ 0,008	— 0,007	— 0,007	— 0,010
6—8	+ 0,068	— 0,018	+ 0,057	— 0,029	— 0,020	— 0,060
7—8	+ 0,390	+ 0,024	+ 0,304	+ 0,017	— 0,055	— 0,168
8—8	+ 1,219	+ 0,110	+ 1,253	+ 0,113	— 0,005	+ 0,017
9—8	+ 0,006	— 0,002	+ 0,006	— 0,000	— 0,022	+ 0,041
10—8	+ 0,008	+ 0,011	+ 0,010	+ 0,012	— 0,000	+ 0,000
6—9	+ 0,008	— 0,003	+ 0,005	— 0,004	0,004	— 0,008
7—9	+ 0,051	— 0,010	+ 0,040	— 0,017	— 0,017	— 0,034
8—9	+ 0,236	+ 0,018	+ 0,193	+ 0,013	— 0,029	— 0,088
9—9	+ 0,633	+ 0,064	+ 0,656	+ 0,066	— 0,002	+ 0,009
10—9	+ 0,005	+ 0,000	+ 0,004	— 0,000	— 0,012	+ 0,022
11—9	+ 0,006	+ 0,007	+ 0,004	+ 0,006	— 0,001	+ 0,001

ε V	$(i)a\Omega$		$ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$		$a^2\left(\frac{d\Omega}{dz}\right)$	
	cos	sin	cos	sin	cos	sin
7—10	+ 0,004	— 0,004	+ 0,004	— 0,003	— 0,002	— 0,004
8—10	+ 0,032	— 0,007	+ 0,027	— 0,009	— 0,006	— 0,020
9—10	+ 0,143	+ 0,013	+ 0,118	+ 0,010	— 0,015	— 0,046
10—10	+ 0,333	+ 0,038	+ 0,340	+ 0,039	— 0,002	+ 0,005
11—10	+ 0,004	+ 0,000	+ 0,004	0,000	— 0,006	+ 0,012
12—10	+ 0,002	+ 0,003	+ 0,002	+ 0,003	— 0,001	+ 0,000
8—11	+ 0,003	— 0,002	+ 0,004	— 0,002	— 0,001	— 0,003
9—11	+ 0,024	— 0,004	+ 0,017	— 0,007	— 0,003	— 0,012
10—11	+ 0,085	+ 0,010	+ 0,070	+ 0,006	— 0,008	— 0,023
11—11	+ 0,171	+ 0,021	+ 0,174	+ 0,022	— 0,002	+ 0,003
12—11	+ 0,002	+ 0,001	+ 0,004	+ 0,000	— 0,003	+ 0,006
13—11	+ 0,001	+ 0,003	+ 0,002	+ 0,003	—	—
9—12	+ 0,003	— 0,001	+ 0,002	— 0,002	— 0,001	— 0,002
10—12	+ 0,014	— 0,002	+ 0,010	— 0,004	— 0,001	— 0,007
11—12	+ 0,046	+ 0,006	+ 0,040	+ 0,003	— 0,003	— 0,012
12—12	+ 0,089	+ 0,013	+ 0,091	+ 0,012	— 0,001	+ 0,001
13—12	+ 0,000	+ 0,001	+ 0,002	+ 0,001	— 0,002	+ 0,004
12—13	+ 0,026	+ 0,004	+ 0,023	+ 0,002	— 0,001	— 0,007
13—13	+ 0,046	+ 0,007	+ 0,048	+ 0,007	— 0,002	+ 0,000

Diese Koefficienten sind nach HANSEN kontrollirt (I, 216).

X.

Oben haben wir also $(i)a\Omega$, $ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$ und $a^2\left(\frac{d\Omega}{dz}\right)$ unter folgende Form erhalten:

$$(i)a\Omega = \Sigma\Sigma b(ii'c)\cos(i\varepsilon - i'V) + \Sigma\Sigma b(ii's)\sin(i\varepsilon - i'V)$$

$$ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right) = \Sigma\Sigma c(ii'c)\cos(i\varepsilon - i'V) + \Sigma\Sigma c(ii's)\sin(i\varepsilon - i'V)$$

$$a^2\left(\frac{d\Omega}{dz}\right) = \Sigma\Sigma d(ii'c)\cos(i\varepsilon - i'V) + \Sigma\Sigma d(ii's)\sin(i\varepsilon - i'V)$$

Wir setzen jetzt

$$A_{-1} = \frac{e^2}{2\cos^2\varphi};\quad A_0 = -\frac{3e}{2\cos^2\varphi};\quad A_1 = \frac{4-e^2}{2\cos^2\varphi};\quad A_2 = -\frac{e}{2\cos^2\varphi}$$

$$C_{-1} = \frac{e^2}{2\cos^2\varphi};\quad C_0 = \frac{e}{2\cos^2\varphi};\quad C_1 = -\frac{2-e^2}{2\cos^2\varphi};\quad C_2 = \frac{e}{2\cos^2\varphi}$$

$$N_{-1} = \frac{e^2}{4};\quad N_0 = -\frac{3e}{4};\quad N_1 = \frac{2+e^2}{4};\quad N_2 = -\frac{e}{4}$$

und berechnen

$$\begin{aligned} G(i, i', c) = {} & A_{-1}b(i+1, i', c) + A_0 b(i, i', c) + A_1 b(i-1, i', c) + \\ & + A_2 b(i-2, i', c) \\ & + C_{-1}c(i+1, i', c) + C_0 c(i, i', c) + C_1 c(i-1, i', c) + \\ & + C_2 c(i-2, i', c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(i, i', c) = {} & A_{-1}b(i-1, i', c) + A_0 b(i, i', c) + A_1 b(i+1, i', c) + \\ & + A_2 b(i+2, i', c) \\ & - C_{-1}c(i-1, i', c) - C_0 c(i, i', c) - C_1 c(i+1, i', c) - \\ & - C_2 c(i+2, i', c) \end{aligned}$$

$$F(i, i', c) = -\tfrac{1}{2}[G(i+1, i', c) + H(i-1, i', c)] - b(i, i', c)$$

$$\begin{aligned} U(i, i', c) = {} & N_{-1}d(i+1, i', c) + N_0 d(i, i', c) + N_1 d(i-1, i', c) + \\ & + N_2 d(i-2, i', c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(i, i', c) = {} & -N_{-1}d(i-1, i', c) - N_0 d(i', i', c) - N_1 d(i+1, i', c) - \\ & - N_2 d(i-2, i', c) \end{aligned}$$

$$T(i, i', c) = -U(i+1, i', c) - V(i-1, i', c)$$

$$P(i, i', c) = \frac{F(i, i', c)}{i - i'\mu} + \frac{G(i+1, i', c)}{i+1-i'\mu} + \frac{H(i-1, i', c)}{i-1-i'\mu}$$

$$Q(i, i', c) = \frac{G(i+1, i', c)}{i+1-i'\mu} - \frac{H(i-1, i', c)}{i-1-i'\mu}$$

$$R(i, i', c) = \frac{P(i, i', c) - \frac{e}{2}P(i+1, i', c) - \frac{e}{2}P(i-1, i', c)}{i - i'\mu}$$

$$S(i, i', c) = \frac{Q(i, i', c)}{i - i'\mu}$$

$$Y(i, i', c) = \frac{T(i, i', c)}{i - i'\mu} + \frac{U(i+1, i', c)}{i+1-i'\mu} + \frac{V(i-1, i', c)}{i-1-i'\mu}$$

$$W(i, i', c) = \qquad - \frac{U(i+1, i', c)}{i+1-i'\mu} + \frac{V(i-1, i', c)}{i-1-i'\mu}$$

und ganz analog $G(i, i', s)$, $H(i, i', s)$ etc.

Die Werthe dieser Quantitäten, die $i' = 0$ entsprechen erhalten wir wie unten.

Weil

$$b(-2, 0, c) = -b(2, 0, c) \qquad b(-1, 0, c) = -b(1, 0, c)$$
$$c(-2, 0, c) = +c(2, 0, c) \qquad c(-1, 0, c) = +c(1, 0, c)$$
$$b(-2, 0, s) = +b(2, 0, s) \qquad b(-1, 0, s) = +b(1, 0, s)$$
$$c(-2, 0, s) = -c(2, 0, s) \qquad c(-1, 0, s) = -c(1, 0, s)$$
$$b(0, 0, c) = b(0, 0, s) = c(0, 0, s) = 0$$
$$d(-2, 0, c) = +d(2, 0, s) \qquad d(-1, 0, c) = +d(1, 0, c)$$
$$d(-2, 0, s) = -d(2, 0, s) \qquad d(-1, 0, s) = -d(1, 0, s)$$
$$d \cdot (0, 0, s) = 0$$

so bekommen wir:

$$G(0,0,c) = +A_{-1}b(1,0,c) \qquad -A_1 b(1,0,c) - A_2 b(2,0,c)$$
$$+C_{-1}c(1,0,c) + C_0 c(0,0,c) + C_1 c(1,0,c) + C_2 c(2,0,c)$$
$$G(1,0,c) = +A_{-1}b(2,0,c) + A_0 b(1,0,c) + \qquad -A_2 b(1,0,c)$$
$$+C_{-1}c(2,0,c) + C_0 c(1,0,c) + C_1 c(0,0,c) + C_2 c(1,0,c)$$

. . . .

$$H(0,0,c) = -G \cdot (0,0,c)$$
$$H(1,0,c) = \qquad + A_0 b(1,0,c) + A_1 b(2,0,c) + A_2 b(3,0,c)$$
$$-C_{-1}c(0,0,c) - C_0 c(1,0,c) - C_1 c(2,0,c) - C_2 c(3,0,c)$$

. . . .

$$F(0,0,c) = 0$$
$$U(0,0,c) = +N_{-1}d(1,0,c) + N_0 d(0,0,c) + N_1 d(1,0,c) + N_2 d(2,0,c)$$
$$U(1,0,c) = +N_{-1}d(2,0,c) + N_0 d(1,0,c) + N_1 d(0,0,c) + N_2 d(1,0,c)$$

. . . .

$$T(0,0,c) = 0$$
$$G(0,0,c) = +A_{-1}b(1,0,s) + A_1 b(1,0,s) + A_2 b(2,0,s)$$
$$+C_{-1}c(1,0,c) - C_1 c(1,0,c) - C_2 c(1,0,c)$$

$$G(1, 0, c) = + A_{-1}\, b\,(2, 0, s) + A_0 b\,(1, 0, s) + A_2 b\,(1, 0, s)$$
$$+ C_{-1}\, c\,(2, 0, s) + C_0 c\,(1, 0, c) - C_2 c\,(1, 0, s)$$
$$H(0, 0, s) = + G\,(0, 0, s)$$
$$H(1, 0, s) = + A_0 b\,(1, 0, s) + A_1 b\,(2, 0, s) + A_2 b\,(3, 0, s)$$
$$- C_0 c\,(1, 0, s) - C_1 c\,(2, 0, s) - C_2 c\,(3, 0, s)$$

. . . .

$$F(0,0,s) = -G(1,0,s)$$
$$U(0,0,c) = + N_{-1} d(1,0,c) + N_0 d(0,0,c) + N_1 d(1,0,c) + N_2 d(2,0,c)$$
$$U(1,0,c) = + N_{-1} d(2,0,c) + N_0 d(1,0,c) + N_1 d(0,0,c) + N_2 d(1,0,c)$$

. . . .

$$V(0,0,c) = -N_{-1} d(1,0,c) - N_0 d(0,0,c) - N_1 d(1,0,c) - N_2 d(2,0,c)$$
$$V(1,0,c) = -N_{-1} d(0,0,c) - N_0 d(1,0,c) - N_1 d(2,0,c) - N_2 d(3,0c,)$$

. . . .

$$T(0, 0, s) = 0$$
$$U(0, 0, s) = + N_{-1}\, d\,(1, 0, s) - N_1 d\,(1, 0, s) - N_2 d\,(2, 0, s)$$
$$U(1, 0, s) = + N_{-1}\, d\,(2, 0, s) + N_0 d\,(1, 0, s) - N_2 d\,(1, 0, s)$$

. . . .

$$V(0, 0, s) = + N_{-1}\, d\,(1, 0, s) - N_1 d\,(1, 0, s) - N_2 d\,(2, 0, s)$$
$$V(1, 0, s) = - N_0 d\,(1, 0, s) - N_1 d\,(2, 0, s) - N_2 d\,(3, 0, s)$$

. . . .

$$T(0, 0, s) = -2U(1, 0, s)$$

und weiter:

$$P(0, 0, c) = G(1, 0, c)$$
$$P\left(1, 0, {}^{c}_{s}\right) = F\left(1, 0, {}^{c}_{s}\right) + \tfrac{1}{2}\, G\left(2, 0, {}^{c}_{s}\right)$$
$$P\left(2, 0, {}^{c}_{s}\right) = \tfrac{1}{2}\, F\left(2, 0, {}^{c}_{s}\right) + \tfrac{1}{3}\, G\left(3, 0, {}^{c}_{s}\right) + H\left(1, 0, {}^{c}_{s}\right)$$
$$P\left(3, 0, {}^{c}_{s}\right) = \tfrac{1}{3}\, F\left(3, 0, {}^{c}_{s}\right) + \tfrac{1}{4}\, G\left(4, 0, {}^{c}_{s}\right) + \tfrac{1}{2}\, H\left(2, 0, {}^{c}_{s}\right)$$

. . . .

$$Q\left(1, 0, {}^{c}_{s}\right) = \tfrac{1}{2}\, G\left(2, 0, {}^{c}_{s}\right)$$
$$Q\left(2, 0, {}^{c}_{s}\right) = \tfrac{1}{3}\, G\left(3, 0, {}^{c}_{s}\right) - H\left(1, 0, {}^{c}_{s}\right)$$
$$Q\left(3, 0, {}^{c}_{s}\right) = \tfrac{1}{4}\, G\left(4, 0, {}^{c}_{s}\right) - \tfrac{1}{2}\, H\left(2, 0, {}^{c}_{s}\right)$$

. . . .

$$Y\left(1, 0, {}^{c}_{s}\right) = T\left(1, 0, {}^{c}_{s}\right) + \tfrac{1}{2}\, U\left(2, 0, {}^{c}_{s}\right)$$

$$Y\left(2, 0, {}^{c}_{s}\right) = \tfrac{1}{2}\, T\left(2, 0, {}^{c}_{s}\right) + \tfrac{1}{3}\, U\left(3, 0, {}^{c}_{s}\right) + V\left(1, 0, {}^{c}_{s}\right)$$

$$Y\left(3, 0, {}^{c}_{s}\right) = \tfrac{1}{3}\, T\left(3, 0, {}^{c}_{s}\right) + \tfrac{1}{4}\, U\left(4, 0, {}^{c}_{s}\right) + \tfrac{1}{2}\, V\left(2, 0, {}^{c}_{s}\right)$$

. . . .

$$R(0, 0, c) = P(0, 0, c) - \tfrac{1}{2}\, eP(1, 0, c)$$

$$R(1, 0, s) = P(1, 0, s) - \tfrac{1}{2}\, eP(2, 0, s)$$

$$R(1, 0, c) = P(1, 0, c) - eP(0, 0, c) - \tfrac{1}{2}\, eP(2, 0, c)$$

$$R\left(2, 0, {}^{c}_{s}\right) = \tfrac{1}{2}\, P\left(2, 0, {}^{c}_{s}\right) - \tfrac{1}{4}\, e\left[P\left(1, 0, {}^{c}_{s}\right) + P\left(3, 0, {}^{c}_{s}\right)\right]$$

$$R\left(3, 0, {}^{c}_{s}\right) = \tfrac{1}{3}\, P\left(3, 0, {}^{c}_{s}\right) - \tfrac{1}{6}\, e\left[P\left(2, 0, {}^{c}_{s}\right) + P\left(4, 0, {}^{c}_{s}\right)\right]$$

Mit der Excentricität der Althæa erhielt man folgende Constanten

$\log A_{-1} = 7{,}528862$	$\log C_{-1} = 7{,}528862$	$\log N_{-1} = 7{,}224906$
$\log A_0 = 0{,}092500_n$	$\log C_0 = 8{,}615379_n$	$\log N_0 = 8{,}788544_n$
$\log A_1 = 0{,}303226$	$\log C_1 = 0{,}001466_n$	$\log N_1 = 9{,}700425$
$\log A_2 = 8{,}615379_n$	$\log C_2 = 8{,}615379$	$\log N_2 = 8{,}311423_n$

	cos	sin		cos	sin
$\frac{1}{2} F(0,0)$	—	— 0,00503	$F(-1,1)$	+ 0,092	— 0,254
$G(1,0)$	— 31,92759	+ 0,01006	$G(0,1)$	— 0,380	+ 0,506
			$H(-2,1)$	+ 0,225	— 0,167
$F(1,0)$	+ 1,83069	+ 0,09066			
$G(2,0)$	+ 1,66271	— 0,02349	$F(0,1)$	+ 1,344	+ 0,034
$H(0,0)$	— 3,25681	— 0,12274	$G(1,1)$	— 0,778	— 0,057
			$H(-1,1)$	— 1,763	— 0,011
$F(2,0)$	— 0,77029	— 0,76475			
$G(3,0)$	+ 0,05940	+ 0,10099	$F(1,1)$	— 15,683	— 0,190
$H(1,0)$	+ 0,92290	+ 0,92003	$G(2,1)$	— 6,652	— 0,065
			$H(0,1)$	+ 27,733	+ 0,326
$F(3,0)$	+ 0,00816	+ 0,00943			
$G(4,0)$	+ 0,01085	+ 0,01065	$F(2,1)$	+ 4,730	+ 0,173
$H(2,0)$	— 0,02333	— 0,02594	$G(3,1)$	— 0,713	— 0,048
			$H(1,1)$	— 5,436	— 0,203
$F(-2,1)$	+ 0,019	— 0,016	$F(3,1)$	— 0,720	— 0,693
$G(-1,1)$	— 0,008	+ 0,0325	$G(4,1)$	+ 0,127	+ 0,143
$H(-3,1)$	— 0,025	— 0,0068	$H(2,1)$	+ 0,858	+ 0,782

	cos	sin
F(4, 1)	+ 0,011	+ 0,015
G(5, 1)	+ 0,005	+ 0,002
H(3, 1)	− 0,023	− 0,026
F(− 1, 2)	+ 0,041	− 0,010
G(0, 2)	− 0,030	− 0,003
H(− 2, 2)	0,066	+ 0,027
F(0, 2)	− 0,915	− 0,018
G(+ 1, 2)	+ 0,140	+ 0,411
H(− 1, 2)	+ 1,505	0,376
F(1, 2)	+ 12,759	+ 0,868
G(2, 2)	− 4,930	− 0,198
H(0, 2)	− 15,489	− 0,382
F(2, 2)	− 119,549	− 2,721
G(3, 2)	+ 34,981	+ 0,805
H(1, 2)	+ 124,702	+ 2,835
F(3, 2)	+ 3,892	+ 0,167
G(4, 2)	− 0,742	− 0,038
H(2, 2)	− 5,420	− 0,221
F(4, 2)	− 0,540	− 0,524
G(5, 2)	+ 0,132	+ 0,122
H(3, 2)	+ 0,610	+ 0,578
F(5, 2)	+ 0,011	+ 0,012
G(6, 2)	+ 0,001	+ 0,001
H(4, 2)	− 0,020	− 0,020
F(− 1, 3)	+ 0,0006	+ 0,0008
G(0, 3)	+ 0,0003	− 0,0010
H(− 2, 3)	− 0,0037	− 0,0006
F(0, 3)	− 0,0710	− 0,0287
G(1, 3)	+ 0,0231	+ 0,0310
H(− 1, 3)	+ 0,0950	+ 0,0198

	cos	sin
F(1, 3)	+ 1,0157	+ 0,2289
G(2, 3)	− 0,5810	+ 0,1551
H(0, 3)	− 0,8555	− 0,4575
F(2, 3)	− 1,9447	+ 0,1194
G(3, 3)	− 0,6315	− 0,1006
H(1, 3)	+ 1,1547	− 0,1341
F(3, 3)	− 74,184	− 2,518
G(4, 3)	+ 22,696	+ 0,760
H(2, 3)	+ 76,308	+ 2,605
F(4, 3)	+ 1,657	+ 0,110
G(5, 3)	− 0,094	− 0,020
H(3, 3)	− 2,745	− 0,158
F(5, 3)	− 0,343	− 0,367
G(6, 3)	+ 0,088	+ 0,096
H(4, 3)	+ 0,372	+ 0,395
F(6, 3)	+ 0,007	+ 0,019
G(7, 3)	+ 0,001	− 0,006
H(5, 3)	− 0,012	− 0,022
F(1, 4)	+ 0,096	− 0,008
G(2, 4)	− 0,049	+ 0,023
H(0, 4)	− 0,088	− 0,002
F(2, 4)	− 0,236	+ 0,246
G(3, 4)	− 0,066	+ 0,045
H(1, 4)	+ 0,304	− 0,373
F(3, 4)	− 3,290	+ 0,008
G(4, 4)	+ 0,353	− 0,040
H(2, 4)	+ 2,843	− 0,026
F(4, 4)	− 42,764	− 1,934
G(5, 4)	+ 13,380	+ 0,604
H(3, 4)	+ 43,669	+ 1,978
F(5, 4)	+ 0,836	+ 0,075
G(6, 4)	− 0,036	− 0,013
H(4, 4)	− 1,449	− 0,111

	cos	sin
F (6, 4)	− 0,215	− 0,237
G (7, 4)	+ 0,060	+ 0,066
H (5, 4)	+ 0,228	+ 0,251
F (7, 4)	+ 0,003	+ 0,006
G (8, 4)	+ 0,002	− 0,000
H (6, 4)	− 0,008	− 0,009
F (2, 5)	− 0,009	+ 0,010
G (3, 5)	− 0,010	+ 0,011
H (1, 5)	+ 0,013	− 0,018
F (3, 5)	− 0,282	+ 0,204
G (4, 5)	− 0,007	− 0,003
H (2, 5)	+ 0,306	− 0,272
F (4, 5)	− 3,029	− 0,056
G (5, 5)	+ 0,594	− 0,009
H (3, 5)	+ 2,786	+ 0,047
F (5, 5)	− 24,746	− 1,339
G (6, 5)	+ 7,535	+ 0,421
H (4, 5)	+ 24,130	+ 1,365
F (6, 5)	+ 0,398	+ 0,044
G (7, 5)	− 0,003	− 0,010
H (5, 5)	− 0,737	− 0,065
F (7, 5)	− 0,126	− 0,147
G (8, 5)	+ 0,035	+ 0,042
H (6, 5)	+ 0,182	+ 0,154
F (8, 5)	+ 0,001	− 0,001
G (9, 5)	+ 0,002	+ 0,003
H (7, 5)	− 0,005	− 0,003
F (2, 6)	− 0,0001	+ 0,0007
G (3, 6)	− 0,0006	+ 0,0012
H (1, 6)	+ 0,0002	− 0,0016

	cos	sin
F (3, 6)	− 0,0165	+ 0,0153
G (4, 6)	− 0,0048	+ 0,0051
H (2, 6)	+ 0,0192	− 0,0206
F (4, 6)	− 0,275	+ 0,142
G (5, 6)	+ 0,029	− 0,013
H (3, 6)	+ 0,2794	− 0,1786
F (5, 6)	− 2,294	− 0,075
G (6, 6)	+ 0,536	+ 0,009
H (4, 6)	+ 2,165	+ 0,069
F (6, 6)	− 12,885	− 0,877
G (7, 6)	+ 4,128	+ 0,283
H (5, 6)	+ 13,047	+ 0,887
F (7, 6)	+ 0,188	+ 0,025
G (8, 6)	+ 0,001	− 0,007
H (6, 6)	− 0,367	− 0,036
F (8, 6)	− 0,075	− 0,090
G (9, 6)	+ 0,022	+ 0,026
H (7, 6)	+ 0,079	+ 0,094
F (4, 7)	− 0,021	+ 0,017
G (5, 7)	− 0,000	+ 0,001
H (3, 7)	+ 0,022	− 0,020
F (5, 7)	− 0,226	+ 0,089
G (6, 7)	+ 0,035	− 0,011
H (4, 7)	+ 0,225	− 0,109
F (6, 7)	− 1,579	− 0,070
G (7, 7)	+ 0,407	+ 0,011
H (5, 7)	+ 1,509	+ 0,067
F (7, 7)	− 6,896	− 0,543
G (8, 7)	+ 2,229	+ 0,175
H (6, 7)	+ 6,959	+ 0,182

	cos	sin		cos	sin
$F(8,7)$	+ 0,076	+ 0,013	$F(7,8)$	− 1,018	− 0,058
$G(9,7)$	+ 0,008	− 0,003	$G(8,8)$	+ 0,276	+ 0,012
$H(7,7)$	− 0,175	− 0,021	$H(6,8)$	+ 0,981	+ 0,056
$F(9,7)$	− 0,045	− 0,048	$F(8,8)$	− 3,649	− 0,330
$G(10,7)$	+ 0,014	+ 0,013	$G(9,8)$	+ 1,188	+ 0,108
$H(8,7)$	+ 0,045	+ 0,051	$H(7,8)$	+ 3,671	+ 0,332
$F(5,8)$	− 0,015	+ 0,009	$F(9,8)$	+ 0,081	+ 0,011
$G(6,8)$	− 0,002	+ 0,002	$G(10,8)$	+ 0,007	− 0,005
$H(4,8)$	+ 0,018	− 0,018	$H(8,8)$	− 0,081	− 0,013
$F(6,8)$	− 0,164	+ 0,057	$F(10,8)$	− 0,023	− 0,033
$G(7,8)$	+ 0,028	− 0,011	$G(11,8)$	+ 0,006	+ 0,010
$H(5,8)$	+ 0,165	− 0,067	$H(9,8)$	+ 0,025	+ 0,034

	cos	sin		cos	sin		cos	sin
$F(6,9)$	− 0,019	+ 0,007	$F(7,10)$	− 0,009	+ 0,011	$F(8,11)$	− 0,006	+ 0,006
$G(7,9)$	+ 0,005	+ 0,000	$G(8,10)$	− 0,001	− 0,004	$G(9,11)$	− 0,002	− 0,002
$H(5,9)$	+ 0,017	− 0,009	$H(6,10)$	+ 0,010	− 0,011	$H(7,11)$	+ 0,008	− 0,006
$F(7,9)$	− 0,128	+ 0,032	$F(8,10)$	− 0,079	+ 0,022	$F(9,11)$	− 0,062	+ 0,012
$G(8,9)$	+ 0,080	− 0,006	$G(9,10)$	+ 0,015	− 0,007	$G(10,11)$	+ 0,019	− 0,002
$H(6,9)$	+ 0,124	− 0,039	$H(7,10)$	+ 0,080	− 0,024	$H(8,11)$	+ 0,058	− 0,015
$F(8,9)$	− 0,629	− 0,045	$F(9,10)$	− 0,387	− 0,034	$F(10,11)$	− 0,234	− 0,028
$G(9,9)$	+ 0,175	+ 0,011	$G(10,10)$	+ 0,114	+ 0,009	$G(11,11)$	+ 0,073	+ 0,011
$H(7,9)$	+ 0,611	+ 0,043	$H(8,10)$	+ 0,374	+ 0,033	$H(9,11)$	+ 0,225	+ 0,024
$F(9,9)$	− 1,898	− 0,192	$F(10,10)$	− 0,995	− 0,113	$F(11,11)$	− 0,509	− 0,063
$G(10,9)$	+ 0,611	+ 0,063	$G(11,10)$	+ 0,327	+ 0,036	$G(12,11)$	+ 0,168	+ 0,020
$H(8,9)$	+ 1,909	+ 0,194	$H(9,10)$	+ 0,997	+ 0,115	$H(10,11)$	+ 0,511	+ 0,063
$F(10,9)$	+ 0,010	+ 0,003	$F(11,10)$	+ 0,002	+ 0,001	$F(12,11)$	+ 0,001	− 0,001
$G(11,9)$	+ 0,006	− 0,001	$G(12,10)$	+ 0,004	− 0,000	$G(13,11)$	− 0,000	+ 0,002
$H(9,9)$	− 0,037	− 0,005	$H(10,10)$	− 0,015	− 0,003	$H(11,11)$	− 0,006	+ 0,001
$F(11,9)$	− 0,018	− 0,021	$F(12,10)$	− 0,006	− 0,009	$F(13,11)$	− 0,003	− 0,009
$G(12,9)$	+ 0,008	+ 0,008	$G(13,10)$	+ 0,002	+ 0,003	$G(14,11)$	+ 0,000	+ 0,003
$H(10,9)$	+ 0,015	+ 0,020	$H(11,10)$	+ 0,006	+ 0,009	$H(12,11)$	+ 0,004	+ 0,006

	cos	sin
$\frac{1}{2} T(0,0)$	—	+ 0,24887
$U(1,0)$	+ 0,41884	— 0,24887
$T(1,0)$	— 0,02084	— 0,01108
$U(2,0)$	— 1,28768	+ 2,98125
$V(0,0)$	+ 1,30852	— 2,97017
$T(2,0)$	+ 0,10872	— 0,24280
$U(3,0)$	+ 0,06080	— 0,13581
$V(1,0)$	— 0,16452	+ 0,37851
$T(3,0)$	— 0,02192	+ 0,01934
$U(4,0)$	— 0,01713	+ 0,00829
$V(2,0)$	+ 0,02192	— 0,01934
$T(-2,1)$	+ 0,002	+ 0,005
$U(-1,1)$	— 0,009	— 0,015
$V(-3,1)$	+ 0,007	+ 0,010
$T(-1,1)$	— 0,068	— 0,165
$U(0,1)$	+ 0,095	+ 0,228
$V(-2,1)$	— 0,027	— 0,063
$T(0,1)$	+ 0,015	+ 0,005
$U(1,1)$	— 0,868	— 2,044
$V(-1,1)$	+ 0,848	+ 2,039
$T(1,1)$	+ 0,006	+ 0,310
$U(2,1)$	+ 0,260	— 0,016
$V(0,1)$	— 0,266	— 0,294
$T(2,1)$	— 0,014	— 0,017
$U(3,1)$	— 0,784	+ 1,757
$V(1,1)$	+ 0,798	— 1,740
$T(3,1)$	+ 0,062	— 0,143
$U(4,1)$	+ 0,036	— 0,079
$V(2,1)$	— 0,098	+ 0,222
$T(4,1)$	— 0,008	+ 0,007
$U(5,1)$	— 0,011	+ 0,005
$V(3,1)$	+ 0,014	— 0,012

	cos	sin
$T(-1,2)$	+ 0,008	+ 0,021
$U(0,2)$	— 0,038	— 0,046
$V(-2,2)$	+ 0,030	+ 0,025
$T(0,2)$	— 0,096	— 0,245
$U(1,2)$	+ 0,201	+ 0,506
$V(-1,2)$	— 0,105	— 0,261
$T(1,2)$	+ 0,001	— 0,007
$U(2,2)$	— 1,213	— 3,024
$V(0,2)$	+ 1,212	+ 3,031
$T(2,2)$	+ 0,061	+ 0,327
$U(3,2)$	+ 0,152	+ 0,091
$V(1,2)$	— 0,213	— 0,418
$T(3,2)$	— 0,008	— 0,017
$U(4,2)$	— 0,451	+ 0,982
$V(2,2)$	+ 0,459	— 0,965
$T(4,2)$	+ 0,036	— 0,081
$U(5,2)$	+ 0,020	— 0,042
$V(3,2)$	— 0,056	+ 0,123
$T(5,2)$	— 0,001	+ 0,003
$U(6,2)$	— 0,007	+ 0,004
$V(4,2)$	+ 0,008	— 0,007
$T(-1,3)$	— 0,0010	+ 0,0011
$U(0,3)$	+ 0,0000	— 0,0029
$V(-2,3)$	+ 0,0010	+ 0,0018
$T(0,3)$	— 0,0025	— 0,0054
$U(1,3)$	— 0,0094	+ 0,0187
$V(-1,3)$	+ 0,0119	— 0,0133
$T(1,3)$	— 0,0558	— 0,1480
$U(2,3)$	+ 0,0268	+ 0,0793
$V(0,3)$	+ 0,0295	+ 0,0687

	cos	sin
$T(2,3)$	+ 0,007	+ 0,0155
$U(3,3)$	— 0,697	— 1,804
$V(1,3)$	+ 0,690	+ 1,7883
$T(3,3)$	+ 0,036	+ 0,190
$U(4,3)$	+ 0,073	+ 0,079
$V(2,3)$	— 0,109	— 0,270
$T(4,3)$	— 0,008	— 0,012
$U(5,3)$	— 0,253	+ 0,533
$V(3,3)$	+ 0,256	— 0,521
$T(5,3)$	+ 0,020	— 0,044
$U(6,3)$	+ 0,011	— 0,022
$V(4,3)$	— 0,031	+ 0,065
$T(6,3)$	— 0,001	+ 0,002
$U(7,3)$	— 0,005	+ 0,001
$V(5,3)$	+ 0,006	— 0,008
$T(1,4)$	— 0,008	— 0,008
$U(2,4)$	— 0,013	+ 0,001
$V(0,4)$	+ 0,016	+ 0,007
$T(2,4)$	— 0,030	— 0,082
$U(3,4)$	— 0,005	— 0,005
$V(1,4)$	+ 0,035	+ 0,087
$T(3,4)$	+ 0,004	+ 0,014
$U(4,4)$	— 0,380	— 1,020
$V(2,4)$	+ 0,376	+ 1,006
$T(4,4)$	+ 0,020	+ 0,106
$U(5,4)$	+ 0,033	+ 0,058
$V(3,4)$	— 0,053	— 0,164
$T(5,4)$	— 0,001	— 0,007
$U(6,4)$	— 0,138	+ 0,283
$V(4,4)$	+ 0,139	— 0,276
$T(6,4)$	+ 0,011	— 0,023
$U(7,4)$	+ 0,006	— 0,010
$V(5,4)$	— 0,017	+ 0,033

	cos	sin
$T(2,5)$	— 0,002	— 0,006
$U(3,5)$	— 0,009	— 0,001
$V(1,5)$	+ 0,011	+ 0,007
$T(3,5)$	— 0,015	— 0,045
$U(4,5)$	— 0,014	— 0,030
$V(2,5)$	+ 0,029	+ 0,075
$T(4,5)$	+ 0,003	+ 0,011
$U(5,5)$	— 0 201	— 0,559
$V(3,5)$	+ 0,198	+ 0,548
$T(5,5)$	+ 0,010	+ 0,058
$U(6,5)$	+ 0,014	+ 0,038
$V(4,5)$	— 0,024	— 0,096
$T(6,5)$	— 0,001	— 0,005
$U(7,5)$	— 0,075	+ 0,149
$V(5,5)$	+ 0,076	— 0,144
$T(7,5)$	+ 0,006	— 0,012
$U(8,5)$	+ 0,008	— 0,005
$V(6,5)$	— 0,009	+ 0,017
$T(2,6)$	— 0,0007	— 0,0005
$U(3,6)$	— 0,0003	+ 0,0000
$V(1,6)$	+ 0,0010	+ 0,0005
$T(3,6)$	— 0,0016	— 0,0045
$U(4,6)$	— 0,0063	— 0,0018
$V(2,6)$	+ 0,0079	+ 0,0063
$T(4,6)$	— 0,008	— 0,024
$U(5,6)$	— 0,013	— 0,031
$V(3,6)$	+ 0,021	+ 0,055
$T(5,6)$	+ 0,002	+ 0,007
$U(6,6)$	— 0,105	— 0,302
$V(4,6)$	+ 0,102	+ 0,295
$T(6,6)$	+ 0,005	+ 0,081
$U(7,6)$	+ 0,004	+ 0,023
$V(5,6)$	— 0,010	— 0,054

	cos	sin
$T(7,6)$	+ 0,000	— 0,002
$U(8,6)$	— 0,040	+ 0,078
$V(6,6)$	+ 0,040	— 0,076
$T(8,6)$	+ 0,003	— 0,006
$U(9,6)$	+ 0,001	— 0,002
$V(7,6)$	— 0,004	+ 0,009
$T(4,7)$	— 0,001	— 0,003
$U(5,7)$	— 0,005	— 0,002
$V(3,7)$	+ 0,006	+ 0,005
$T(5,7)$	— 0,004	— 0,012
$U(6,7)$	— 0,010	— 0,025
$V(4,7)$	+ 0,014	+ 0,037
$T(6,7)$	+ 0,001	+ 0,005
$U(7,7)$	— 0,053	— 0,160
$V(5,7)$	+ 0,052	+ 0,155
$T(7,7)$	+ 0,003	+ 0,016
$U(8,7)$	+ 0,001	+ 0,014
$V(6,7)$	— 0,004	— 0,030
$T(8,7)$	+ 0,000	— 0,002
$U(9,7)$	— 0,022	+ 0,040
$V(7,7)$	+ 0,022	— 0,038
$T(9,7)$	+ 0,002	— 0,003
$U(10,7)$	+ 0,001	— 0,002
$V(8,7)$	— 0,003	+ 0,005
$T(5,8)$	— 0,001	— 0,003
$U(6,8)$	— 0,003	— 0,001
$V(4,8)$	+ 0,004	+ 0,004

	cos	sin
$T(6,8)$	— 0,002	— 0,006
$U(7,8)$	— 0,007	— 0,020
$V(5,8)$	+ 0,009	+ 0,026
$T(7,8)$	+ 0,001	+ 0,004
$U(8,8)$	— 0,028	— 0,084
$V(6,8)$	+ 0,027	+ 0,080
$T(8,8)$	+ 0,001	+ 0,008
$U(9,8)$	+ 0,000	+ 0,010
$V(7,8)$	— 0,001	— 0,018
$T(9,8)$	+ 0,000	— 0,001
$U(10,8)$	— 0,011	+ 0,021
$V(8,8)$	+ 0,011	— 0,020
$T(6,9)$		— 0,001
$U(7,9)$		— 0,002
$V(5,9)$		+ 0,003
$T(7,9)$		— 0,003
$U(8,9)$		— 0,002
$V(6,9)$		+ 0,015
$T(8,9)$		+ 0,002
$U(9,9)$		— 0,044
$V(7,9)$		+ 0,042
$T(9,9)$		+ 0,004
$U(10,9)$		+ 0,005
$V(8,9)$		— 0,009
$T(10,9)$		— 0,001
$U(11,9)$		+ 0,011
$V(9,9)$		— 0,010

Es wird jetzt unsere nächste Aufgabe sein *P*, *Q*, *R*, *S*, *W* und *Y* zu berechnen. Ehe wir die numerischen Werte dieser Quantitäte angeben, wollen wir zeigen, wie dieselben kontrollirt werden.

Alle diese Quantitäte mit Ausnahme von $R(i, i', c)$ und $R(i, i', s)$ die daher zweimal gerechnet sind werden durch folgende Gleichungen kontrollirt:

$$\Pi\left(i, i', {}^c_s\right) = S\left(i, i', {}^c_s\right) + P\left(i, i', {}^c_s\right)$$

$$Y\left(i, i', {}^c_s\right) = \frac{W\left(i, i', {}^c_s\right)}{i - i'\mu}$$

wo

$$\Pi\left(i, i', {}^c_s\right) = \frac{F\left(i, i', {}^c_s\right) + G\left(i + 1, i, {}^c_s\right) + H\left(i - 1, i, {}^c_s\right)}{i - i'\mu}$$

Diese Kontrolle verlangt aber, das vorher die F, G, H, U und V kontrollirt sind, warum ich F und T teils nach den vorher gegebenen Formeln teils nach folgenden Formeln berechnet habe:

$$\begin{aligned}
F\left(i, i', {}^c_s\right) = & -\tfrac{1}{2} A_{-1}\left\{b\left(i + 2, i', {}^c_s\right) + b\left(i - 2, i', {}^c_s\right) + \right. \\
& \left. + c\left(i + 2, i', {}^c_s\right) - c\left(i - 2, i', {}^c_s\right)\right\} \\
& - \frac{A_0 + A_2}{2}\left\{b\left(i + 1, i', {}^c_s\right) + b\left(i - 1, i', {}^c_s\right) + \right. \\
& \left. + \frac{c\left(i + 1, i', {}^c_s\right) - c\left(i - 1, i', {}^c_s\right)}{2}\right\} \\
& - (1 + A_1)\, b\left(i, i', {}^c_s\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T\left(i, i', {}^c_s\right) = & (N_0 - N_2)\left\{d\left(i - 1, i', {}^c_s\right) - d\left(i + 1, i', {}^c_s\right)\right\} \\
& + N_{-1}\left\{d\left(i - 2, i', {}^c_s\right) - d\left(i + 2, i', {}^c_s\right)\right\}
\end{aligned}$$

XI.

Wir haben jetzt

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{dt} = & 1 + k + P(0, c) - \frac{e}{2} H(0, c) + \frac{e}{2} H(0, s)\, n_0 t \\
& + [P(1, c) + k_1] \cos \varepsilon + \left[P(1, s) + \frac{e^2}{2} H(0, s) + k_2\right] \sin \varepsilon
\end{aligned}$$

$$+ H(0, s)\, n_0 t \cos\varepsilon - H(0, c)\, n_0 t \sin\varepsilon$$

$$+ \left[P(2, c) + \frac{e}{2} H(0, c)\right] \cos 2\varepsilon + \left[P(2, s) + \frac{e}{2} H(0, s)\right] \sin 2\varepsilon$$

$$+ P(3, c) \cos 3\varepsilon + P(3, s) \sin 3\varepsilon$$

$$+ \Sigma\Sigma P(i, i', c) \cos(i\varepsilon - i'V) + \Sigma\Sigma P(i, i', s) \sin(i\varepsilon - i'V)$$

$$2\frac{d\nu}{d\varepsilon} = -\frac{e}{2} H(0, s)$$

$$+ [Q(1, s) - k_2] \cos\varepsilon - [Q(1, c) - k_1] \sin\varepsilon$$

$$+ H(0, c)\, n_0 t \cos\varepsilon + H(0, s)\, n_0 t \sin\varepsilon$$

$$+ \left[Q(2, s) - \frac{e}{2} H(0, s)\right] \cos 2\varepsilon - \left[Q(2, c) - \frac{e}{2} H(0, c)\right] \sin 2\varepsilon$$

$$+ Q(3, s) \cos 3\varepsilon - Q(3, c) \sin 3\varepsilon$$

$$+ \Sigma\Sigma Q(i, i', s) \cos(i\varepsilon - i'V) - \Sigma\Sigma Q(i, i', c) \sin(i\varepsilon - i'V)$$

$$n_0 z = c + \left[1 + R(0, c) + k - \frac{e}{2} k_1\right] n_0 t$$

$$-\left[R(1, s) - \left(1 - \frac{5}{8} e^2\right) H(0, s) + k_2\right] \cos\varepsilon$$

$$+ \left[R(1, c) + eR(0, c) - \left(1 - \frac{e^2}{8}\right) H(0, c) + \left(1 - \frac{e^2}{2}\right) k_1\right] \sin\varepsilon$$

$$+ H(0, c)\, n_0 t \cos\varepsilon + \left(1 - \frac{e^2}{2}\right) H(0, s)\, n_0 t \sin\varepsilon$$

$$-\left[R(2, s) + \frac{e}{8}(5 - 2e^2) H(0, s) - \frac{e}{4} k_2\right] \cos 2\varepsilon$$

$$+ \left[R(2, c) + \frac{5e}{8} H(0, c) - \frac{e}{4} k_1\right] \sin 2\varepsilon$$

$$-\frac{e}{4} H(0, c)\, n_0 t \cos 2\varepsilon - \frac{e}{4} H(0, s)\, n_0 t \sin 2\varepsilon$$

$$-\left[R(3, s) - \frac{e^2}{8} H(0, s)\right] \cos 3\varepsilon + \left[R(3, c) - \frac{e^2}{8} H(0, c)\right] \sin 3\varepsilon$$

$$-\Sigma\Sigma R(i, i', s) \cos(i\varepsilon - i'V) + \Sigma\Sigma R(i, i', c) \sin(i\varepsilon - i'V)$$

$$
\begin{aligned}
2\nu = {} & 2C - eH(0, s)\, n_0 t \\
& + [Q(1, c) + H(0, c) - k_1] \cos\varepsilon + \\
& + [Q(1, s) + (1 - e^2) H(0, s) - k_2] \sin\varepsilon \\
& - H(0, s)\, n_0 t \cos\varepsilon + H(0, c)\, n_0 t \sin\varepsilon \\
& + \tfrac{1}{2}[Q(2, c) - eH(0, c)] \cos 2\varepsilon + \tfrac{1}{2}[Q(2, s) - eH(0, s)] \sin 2\varepsilon \\
& + \tfrac{1}{3} Q(3, c) \cos 3\varepsilon + \tfrac{1}{3} Q(3, s) \sin 3\varepsilon \\
& + \Sigma\Sigma S(i, i', c) \cos(i\varepsilon - i'V) + \Sigma\Sigma S(i, i', s) \sin(i\varepsilon - i'V),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{du}{\cos i\, d\varepsilon} = {} & - \tfrac{3}{2} e V(0, s) \\
& + [Y(1, s) + V(0, s) + l] \cos\varepsilon - \\
& - [Y(1, c) + V(0, c) + l_1] \sin\varepsilon \\
& - V(0, c)\, n_0 t \cos\varepsilon - V(0, s)\, n_0 t \sin\varepsilon \\
& + \left[2Y(2, s) + \frac{e}{2} V(0, s)\right] \cos 2\varepsilon - \\
& - \left[2Y(2, c) + \frac{e}{2} V(0, c)\right] \sin 2\varepsilon \\
& + 3Y(3, s) \cos 3\varepsilon - 3Y(3, c) \sin 3\varepsilon \\
& + \Sigma\Sigma W(i, i', s) \cos(i\varepsilon - i'V) - \Sigma\Sigma W(i, i', c) \sin(i\varepsilon - i'V)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{u}{\cos i} = {} & U(1, c) - \frac{e}{2} V(0, c) - el_1 - eV(0, s)\, n_0 t \\
& + [Y(1, c) + l_1] \cos\varepsilon + [Y(1, s) - e^2 V(0, s) + l] \sin\varepsilon \\
& + V(0, s)\, n_0 t \cos\varepsilon - V(0, c)\, n_0 t \sin\varepsilon \\
& + \left[Y(2, c) + \frac{e}{2} V(0, c)\right] \cos 2\varepsilon + \\
& + \left[Y(2, s) + \frac{e}{2} V(0, s)\right] \sin 2\varepsilon \\
& + Y(3, c) \cos 3\varepsilon + Y(3, s) \sin 3\varepsilon \\
& + \Sigma\Sigma Y(i, i', c) \cos(i\varepsilon - i'V) + \Sigma\Sigma Y(i, i', s) \sin(i\varepsilon - i'V).
\end{aligned}
$$

ε V	$\frac{dz}{dt}$		$2\frac{d\nu}{d\varepsilon}$	
	cos	sin	cos	sin
0—0	$1 + k - 31'',79$	—	+ 0'',01	—
0—0	$- 0,00503\, n_0 t$	—	—	—
1—0	$+ 2,66 + k_1$	$+ 0'',08 + k_2$	$- 0,01 - k_2$	$- 0'',83 + k_1$
1—0	$- 0,12274\, n_0 t$	$+ 3,25681\, n_0 t$	$- 3,25681\, n_0 t$	$- 0,12274\, n_0 t$
2—0	+ 0,42	+ 0,57	— 0,88	+ 0,77
3—0	— 0,01	— 0,01	+ 0,02	— 0,01
—2—1	+ 0,01	— 0,02	— 0,03	+ 0,00
—1—1	+ 0,77	— 1,19	— 1,52	— 1,05
0—1	— 3,74	— 0,18	— 0,09	+ 2,50
1—1	— 107,50	— 1,26	+ 0,89	— 75,33
2—1	— 5,76	— 0,22	+ 0,29	— 8,09
3—1	+ 0,28	+ 0,25	— 0,44	+ 0,48
4—1	— 0,01	— 0,01	+ 0,01	— 0,01
—1—2	+ 0,04	— 0,00	+ 0,01	— 0,02
0—2	+ 0,90	+ 1,61	+ 1,14	— 1,36
1—2	+ 60,76	+ 1,62	— 0,70	+ 25,95
2—2	+ 337,62	+ 7,68	— 9,07	+ 399,11
3—2	— 2,70	— 0,11	+ 0,16	— 3,94
4—2	+ 0,13	+ 0,12	— 0,22	+ 0,24
5—2	— 0,00	— 0,00	+ 0,01	— 0,01
—1—3	+ 0,00	+ 0,00	+ 0,00	+ 0,00
0—3	— 0,45	— 0,62	— 0,63	+ 0,42
1—3	— 20,68	— 4,12	— 0,27	+ 1,37
2—3	— 26,17	+ 2,84	— 2,82	— 23,48
3—3	+ 49,87	+ 1,71	— 2,48	+ 72,52
4—3	— 0,87	— 0,05	+ 0,08	— 1,38
5—3	+ 0,06	+ 0,06	— 0,11	+ 0,11
1—4	— 0,26	+ 0,05	+ 0,03	+ 0,14
2—4	— 1,20	+ 1,37	— 0,91	— 0,72
3—4	+ 2,82	— 0,05	+ 0,03	+ 4,59
4—4	+ 14,54	+ 0,66	— 1,07	+ 23,54
5—4	— 0,33	— 0,02	+ 0,04	— 0,55
6—4	+ 0,03	+ 0,03	— 0,06	+ 0,05

$\varepsilon\ V$	$\frac{dz}{dt}$		$2\frac{d\nu}{d\varepsilon}$	
	cos	sin	cos	sin
2—5	— 0,06	+ 0,07	— 0,02	— 0,01
3—5	+ 0,98	— 0,92	+ 1,08	+ 1,22
4—5	+ 1,06	+ 0,01	— 0,04	+ 2,04
5—5	+ 4,88	+ 0,29	— 0,51	+ 8,94
6—5	— 0,14	— 0,01	+ 0,02	— 0,23
7—5	+ 0,01	+ 0,02	— 0,03	+ 0,03
2—6	+ 0,00	— 0,01	— 0,00	+ 0,00
3—6	— 0,22	+ 0,23	— 0,21	— 0,20
4—6	+ 0,17	— 0,13	+ 0,19	+ 0,30
5—6	+ 0,49	+ 0,01	— 0,03	+ 1,00
6—6	+ 2,04	+ 0,14	— 0,25	+ 3,65
7—6	— 0,06	— 0,01	+ 0,01	— 0,09
8—6	+ 0,01	+ 0,01	— 0,01	+ 0,01
4—7	+ 0,03	— 0,08	+ 0,04	+ 0,04
5—7	+ 0,07	— 0,04	+ 0,07	+ 0,14
6—7	+ 0,24	+ 0,01	— 0,02	+ 0,50
7—7	+ 0,84	+ 0,07	— 0,12	+ 1,56
8—7	— 0,02	— 0,00	+ 0,01	— 0,04
9—7	+ 0,00	+ 0,00	— 0,01	+ 0,01
5—8	+ 0,01	— 0,01	+ 0,01	+ 0,02
6—8	+ 0,03	— 0,02	+ 0,03	+ 0,07
7—8	+ 0,12	+ 0,00	— 0,01	+ 0,25
8—8	+ 0,36	+ 0,03	— 0,06	+ 0,68
9—8	— 0,01	— 0,00	+ 0,00	— 0,02
6—9	+ 0,00	— 0,00	+ 0,01	+ 0,01
7—9	+ 0,02	— 0,01	+ 0,01	+ 0,04
8—9	+ 0,06	+ 0,00	— 0,01	+ 0,13
9—9	+ 0,16	+ 0,02	— 0,03	+ 0,31
8—10	+ 0,01	— 0,00	+ 0,01	+ 0,02
9—10	+ 0,03	+ 0,00	— 0,01	+ 0,06
10—10	+ 0,07	+ 0,01	— 0,02	+ 0,14

ε V	$\frac{dz}{dt}$		$2\frac{d\nu}{d\varepsilon}$	
	cos	sin	cos	sin
9—11	+ 0,00	— 0,00	+ 0,00	+ 0,01
10—11	+ 0,02	+ 0,00	— 0,00	+ 0,03
11—11	+ 0,03	+ 0,00	— 0,01	+ 0,06
11—12	+ 0,01	—	—	+ 0,02
12—12	+ 0,02	—	—	+ 0,03

ε V	$n_0 z$		2ν	
	cos	sin	cos	sin
0—0	c_1 [1—32,03655	—	$2C$	—
0—0	$+ k - \frac{e}{2}k_1 \Big] n_0 t$	—	$+ 0{,}01005\, n_0 t$	—
1—0	$- 0{,}18 - k_2$	$+5{,}88 + \left(1 - \frac{e^2}{2}\right)k_1$	$- 2{,}43 - k_1$	$- 0{,}13 - k_2$
1—0	$- 3{,}25681\, n_0 t$	$- 0{,}12233\, n_0 t$	$+ 0{,}12274\, n_0 t$	$- 3{,}25681\, n_0 t$
2—0	$- 0{,}28 + \frac{e}{4}k_2$	$+ 0{,}06 - \frac{e}{4}k_1$	— 0,32	— 0,44
2—0	$+ 0{,}06671\, n_0 t$	$+ 0{,}00256\, n_0 t$	—	—
3—0	+ 0,01	— 0,01	—	+ 0,01
−2—1	+ 0,01	+ 0,01	0,00	+ 0,01
−1—1	— 0,88	— 0,68	— 0,78	+ 1,13
0—1	— 0,21	— 1,83	+ 7,15	+ 0,27
1—1	+ 1,92	— 164,56	+ 115,80	+ 1,73
2—1	+ 0,11	— 0,83	+ 4,90	+ 0,18
3—1	— 0,10	+ 0,19	— 0,18	— 0,16
−1—2	— 0,04	— 0,00	— 0,01	— 0,01
0—2	+ 2,21	+ 2,28	— 1,94	— 1,64
1—2	— 4,11	+ 155,78	— 86,21	— 2,32
2—2	— 5,85	+ 257,68	— 306,77	— 6,97
3—2	+ 0,19	— 7,19	+ 1,71	+ 0,07
4—2	— 0,04	+ 0,07	— 0,07	— 0,07

ε V	$n_0 z$		2ν	
	cos	sin	cos	sin
−1—3	+ 0,01	— 0,01	—	—
0—3	— 0,43	— 0,38	+ 0,40	+ 0,60
1—3	— 86,79	+ 403,86	+ 28,32	+ 5,63
2—3	— 3,09	— 28,76	+ 24,68	— 2,96
3—3	— 0,82	+ 26,16	— 37,16	— 1,27
4—3	+ 0,04	— 0,99	+ 0,47	+ 0,03
5—3	— 0,02	+ 0,02	— 0,03	— 0,03
1—4	— 0,01	+ 0,53	+ 0,36	— 0,08
2—4	— 2,28	— 2,16	+ 1,20	— 1,51
3—4	+ 0,08	+ 1,42	— 2,86	+ 0,02
4—4	— 0,25	+ 5,55	— 9,05	— 0,41
5—4	+ 0,01	— 0,26	+ 0,15	+ 0,01
6—4	— 0,01	+ 0,01	— 0,01	— 0,01
2—5	— 0,44	— 0,40	+ 0,04	— 0,06
3—5	+ 0,73	+ 0,75	— 0,97	+ 0,86
4—5	— 0,01	+ 0,36	— 0,90	+ 0,02
5—5	— 0,09	+ 1,49	— 2,75	— 0,16
6—5	+ 0,01	— 0,08	+ 0,05	— 0,00
7—5	— 0,00	+ 0,00	0,00	— 0,01
2—6	— 0,14	— 0,09	+ 0,01	+ 0,02
3—6	— 0,26	— 0,25	+ 0,22	— 0,23
4—6	+ 0,07	+ 0,09	— 0,16	+ 0,10
5—6	— 0,00	+ 0,14	— 0,34	— 0,01
6—6	— 0,04	+ 0,52	— 0,94	— 0,06
7—6	+ 0,00	— 0,03	+ 0,02	— 0,00
4—7	+ 0,02	+ 0,02	— 0,03	+ 0,02
5—7	+ 0,01	+ 0,03	— 0,05	+ 0,03
6—7	— 0,00	+ 0,06	— 0,14	— 0,01
7—7	— 0,02	+ 0,19	— 0,34	— 0,03
8—7	—	— 0,01	+ 0,01	—
5—8	—	—	— 0,01	+ 0,01
6—8	—	+ 0,01	— 0,03	+ 0,01
7—6	—	+ 0,02	— 0,06	—
8—8	— 0,01	+ 0,07	— 0,13	— 0,01

ε V	$n_0 z$		2ν	
	cos	sin	cos	sin
7— 9	—	—	— 0,01	—
8— 9	—	+ 0,01	— 0,03	—
9— 9	—	+ 0,03	— 0,05	— 0,01
9—10	—	—	— 0,01	—
10—10	—	+ 0,01	— 0,02	—
11—11	—	—	— 0,01	—

ε V	$\frac{1}{\cos i} \cdot \frac{du}{d\varepsilon}$		$\frac{u}{\cos i}$	
	cos	sin	cos	sin
0—0	+ 0″,36	—	+ 0″,36	—
0—0	—	—	— el_1 + 0,24337 $n_0 t$	—
1—0	— 1,51 + l	— 0,63 — l_1	— 0,66 + l_1	+ 1,50 + l
1 - 0	— 1,30852 $n_0 t$	+ 2,97017 $n_0 t$	— 2,97017 $n_0 t$	— 1,30852 $n_0 t$
2—0	+ 0,30	— 2,81	+ 1,43	+ 0,09
3—0	— 0,00	+ 0,00	—	—
— 2 — 1	— 0,01	+ 0,01	—	+ 0,01
— 1—1	+ 0,70	— 0,28	— 0,21	— 0,50
0—1	+ 1,63	— 0,70	— 2,00	— 4,67
1—1	+ 0,85	— 0,60	+ 0,93	+ 1,31
2—1	— 3,34	— 1,52	+ 0,92	— 2,02
3—1	+ 0,16	+ 0,07	— 0,03	+ 0,06
4—1	— 0,01	— 0,01	—	—
— 1—2	— 0,08	+ 0,07	+ 0,04	+ 0,14
0—2	— 1,53	+ 0,61	+ 0,87	+ 2,18
1—2	— 2,01	+ 0,80	— 2,66	— 6,68
2—2	— 1,43	+ 0,77	— 0,60	— 1,10
3—2	— 1,04	— 0,49	+ 0,21	— 0,45
4—2	+ 0,06	+ 0,03	— 0,01	+ 0,02
0—3	+ 0,39	+ 0,20	+ 0,19	— 0,37
1—3	— 0,15	+ 0,06	+ 1,15	+ 3,07
2—3	— 35,94	+ 13,87	— 14,58	— 37,77

ε V	$\frac{1}{\cos i} \cdot \frac{du}{d\varepsilon}$		$\frac{u}{\cos i}$	
	cos	sin	cos	sin
3—3	— 0,29	+ 0,14	— 0,07	— 0,16
4—3	— 0,40	— 0,19	+ 0,07	— 0,13
5—3	+ 0,03	+ 0,01	—	+ 0,01
1—4	— 0,01	— 0,01	— 0,02	+ 0,02
2—4	— 0,22	+ 0,08	— 0,14	— 0,36
3—4	+ 2,06	— 0,77	+ 0,48	+ 1,29
4—4	— 0,12	+ 0,04	— 0,02	— 0,05
5—4	— 0,17	— 0,08	+ 0,02	— 0,05
6—4	+ 0,01	+ 0,01	—	—
2—5	— 0,01	+ 0,01	— 0,03	— 0,03
3—5	+ 0,31	— 0,12	+ 0,10	+ 0.25
4—5	+ 0,61	— 0,22	+ 0,10	+ 0,27
5—5	— 0,05	+ 0,01	— 0,01	— 0,02
6—5	— 0,07	— 0,04	+ 0,01	— 0,02
2—6	— 0,00	+ 0,00	+ 0,01	—
3—6	— 0,01	+ 0,08	— 0,09	— 0,01
4—6	+ 0,07	— 0,03	+ 0,01	+ 0,04
5—6	+ 0,23	— 0,08	+ 0,03	+ 0,08
6—6	— 0,02	+ 0,00	—	— 0,01
7—6	— 0,03	— 0,02	—	— 0,01
4—7	+ 0,01	— 0,01	+ 0,01	+ 0,01
5—7	+ 0,03	— 0,01	+ 0,00	+ 0,01
6—7	+ 0,09	— 0,03	+ 0,01	+ 0,03
7—7	— 0,01	+ 0,00	—	—
8—7	— 0,01	— 0,01	—	—
6—8	+ 0,02	— 0,01	—	—
7—8	+ 0,04	— 0,01	—	+ 0,01
8—8	— 0,01	—	—	—
9—8	— 0,01	—	—	—
7—9	+ 0,01	—	—	—
8—9	+ 0,02	—	—	—
9—10	+ 0,01	—	—	—

Die numerischen Werte der Konstanten c, k, k_1, k_2, l, l_1 und C sind noch zu ermitteln. Weil bei osculirenden Elementen die Störungen der Koordinaten und der Differentialquotienten derselben nach der Zeit für die Epoche gleich Null werden müssen, so erhält man 6 Bedingungsgleichungen, aus welchen die 6 Konstanten bestimmt werden können.

Wenn man deshalb mit

$$\left(\frac{d\delta z}{dt}\right)_0,\ 2\left(\frac{d\nu}{d\varepsilon}\right)_0,\ \left(\frac{du}{\cos i d\varepsilon}\right)_0,\ (n_0 \delta z)_0,\ 2(\nu)_0 \text{ und } \left(\frac{u}{\cos i}\right)_0$$

die Werte von

$$\frac{dz}{dt} - 1,\ 2\frac{d\nu}{d\varepsilon},\ \frac{du}{\cos i d\varepsilon},\ n_0 z,\ 2\nu,\ \frac{u}{\cos i}$$

für die Epoche $t = 0$ bezeichnet und

$$Z_0 = P(0c) - \tfrac{1}{2} c\, H(0c) \text{ setzt,}$$

so erhält man für die Konstanten folgende Ausdrücke:

$$k = -\left(\frac{d\delta z}{dt}\right)_0 + 2\left(\frac{d\nu}{d\varepsilon}\right)_0 \frac{e \sin \varepsilon_0}{1 - e\cos\varepsilon_0} + \\ + \left[4\left(\frac{d\delta z}{dt}\right)_0 + 6(\nu)_0 - 3Z_0\right]\frac{1}{1 - e\cos\varepsilon_0}$$

$$k_1 = -2\left(\frac{d\nu}{d\varepsilon}\right)_0 \frac{\sin\varepsilon_0}{1 - e\cos\varepsilon_0} - \left[4\left(\frac{d\delta z}{dt}\right)_0 + 6(\nu)_0 - 3Z_0\right]\frac{\cos\varepsilon_0}{1 - e\cos\varepsilon_0}$$

$$k_2 = 2\left(\frac{d\nu}{d\varepsilon}\right)_0 \frac{\cos\varepsilon_0 - e}{1 - e\cos\varepsilon_0} - \left[4\frac{d\delta z}{dt} + 6(\nu)_0 - 3Z_0\right]\frac{\sin\varepsilon_0}{1 - e\cos\varepsilon_0}$$

$$c = c_0 - (n_0 \delta z)_0 - k_1\left(\frac{2 - e^2}{2}\sin\varepsilon_0 - \frac{e}{2}\sin\varepsilon_0\cos\varepsilon_0\right) \\ + k_2\left(\frac{e}{4} + \cos\varepsilon_0 - \frac{e}{2}\cos^2\varepsilon_0\right)$$

$$l = -\left(\frac{u}{\cos i}\right)_0 \frac{\sin\varepsilon_0}{1 - e\cos\varepsilon_0} - \left(\frac{du}{\cos i d\varepsilon}\right)_0 \frac{\cos\varepsilon_0 - e}{1 - e\cos\varepsilon_0}$$

$$l_1 = -\left(\frac{u}{\cos i}\right)_0 \frac{\cos\varepsilon_0}{1 - e\cos\varepsilon_0} + \left(\frac{du}{\cos i d\varepsilon}\right)_0 \frac{\sin\varepsilon_0}{1 - e\cos\varepsilon_0}$$

$$C = -\tfrac{1}{6}(4k + ek_1 + 3Z_0)$$

$$(n) = n_0\left[1 + R(0,e) + k - \frac{e}{2}k_1\right].$$

Aus dem im Art. I angeführten Werte von c_0 nämlich $c_0 = 200\ 18'\ 13'',4$ fand sich $\varepsilon_0 = 198\ 47'\ 29'',2$ und hiermit $c' + \mu(\varepsilon - c_0) = 141\ 53'\ 20'',0$.

Hieraus ergab sich

$$k = -\ 77'',67 \qquad l = -22'',38$$
$$k_1 = -245'',55 \qquad l_1 = +31'',90$$
$$k_2 = -388'',44 \qquad C = +71'',02$$

$$c - c_0 = -27,43$$

und als der mittlere Wert der mittleren Bewegung

$$(n) = n_0 - 0'',41346 = 855'',41105.$$

Die Änderung von n gaben folgende Correctionen der Störungen (II, 98 f.).

$\varepsilon\ V$	$\Delta\frac{d\delta z}{dt}$		$2\Delta\frac{dv}{d\varepsilon}$		$\Delta\frac{du}{\cos i d\varepsilon}$	
	cos	sin	cos	sin	cos	sin
1—1	— 0,02	—	—	—	—	—
2—1	—	—	—	— 0,01	—	—
1—2	+ 0,07	—	—	—	—	—
2—2	+ 0,60	+ 0,01	− 0,01	+ 0,65	·	—
1—3	+ 0,21	+ 0,05	—	—	—	—
2—3	+ 0,24	— 0,03	+ 0,03	+ 0,25	+ 0,37	— 0,14
3—3	+ 0,06	—	—	+ 0,07	—	—
3—4	+ 0,01	—	—	+ 0,01	—	—
4—4	+ 0,01	—	—	+ 0,02	—	—
5—5	—	—	—	+ 0,01	—	—

ε V	Δndz		$2\Delta\nu$		$\frac{\Delta u}{\cos i}$	
	cos	sin	cos	sin	cos	sin
1—1	—	0,15	+ 0,09		—	—
2—1	—		+ 0,01	—	—	—
1—2	— 0,01	+ 0,41	— 0,14	—	—	—
2—2	− 0,01	+ 0,65	— 0,72	— 0,01	—	—
3—2		0,01	-	—	—	—
1—3	+ 1,90	— 8,40	— 0,30	— 0,07	— 0,01	— 0,03
2—3	+ 0,03	+ 0,23	0,24	+ 0,08	+ 0,14	+ 0,37
3—3	—	+ 0,05	0,02	—	—	—
3—4	—	—	— 0,01	—	—	—
4—4	—	+ 0,01	— 0,01	—		

Der Einfluss dieser Correctionen auf die Constanten wird

$$\Delta k = +0'',67 \qquad \Delta l = +0'',36$$
$$\Delta k_1 = +0'',63 \qquad \Delta l_1 = -0'',17$$
$$\Delta k_2 = -0'',31 \qquad \Delta C = -0'',42$$
$$c = c_0 - 19'',47$$

und $(n) = n - 0''41612 = 855'',40839$.

Vereinigt man jetzt die Constanten mit den übrigen Störungsgliedern der Abteilung $i' = 0$, so erhält man folgende von der mittleren Anomalie des störenden Planeten unabhängige Glieder:

nz	2ν	$\frac{u}{\cos i}$
$200^\circ\,17'\,53'',9$	$141'',20$	$-2'',24$
$+855'',4084\,t$	$+0'',0100\,nt$	$+0'',2434\,nt$
$-388'',57\cos\varepsilon - 238'',21\sin\varepsilon$	$+242'',49\cos\varepsilon + 388'',62\sin\varepsilon$	$+31'',07\cos\varepsilon - 20'',52\sin$
$-3'',2568\,nt\cos\varepsilon - 0'',1223\,nt\sin\varepsilon$	$+0'',1227\,nt\cos\varepsilon - 3'',2568\,nt\sin\varepsilon$	$-2'',9702\,nt\cos\varepsilon - 1'',308\,nt$
$-8'',22\cos 2\varepsilon + 5'',07\sin 2\varepsilon$	$-0'',32\cos 2\varepsilon - 0'',44\sin 2\varepsilon$	$+1'',43\cos 2\varepsilon + 0'',09\sin 2$
$+0'',0667\,nt\cos 2\varepsilon + 0'',0026\,nt\sin 2\varepsilon$		
$+0'',01\cos 3\varepsilon - 0'',01\sin 3\varepsilon$	$+0'',01\sin 3\varepsilon$	

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1900. N:o 9.
Stockholm.

Meddelanden från Lunds Astronomiska Observatorium. N:o 18.

On Periodic orbits.

By C. V. L. CHARLIER.

(Communicated 1900, November 14.)

We owe to Mr. HILL the introduction of the fertile idea of periodic orbits into celestial mechanics. He has himself shown how this theory may be applied with the greatest advantage to the theory of the moon, and an elaborated theory on these principles seems to be prepared for the next time.

This instance is alone sufficient to show the great practical advantages that may be expected from the theory of periodic orbits. Through the celebrated researches of M. POINCARÉ this theory has now obtained a rigorous and elegant mathematical foundation.

Meanwhile, the penetration into this new field of research is by no means easy. Though the purely analytical treatment of the problem is now to a great extent possible it seems that most astronomers, who have treated this subject, have preferred to apply the sure but very tardy method of mechanical integration to this problem. Mr. DARWIN indeed has succeeded in obtaining in this manner results of a general character and of the greatest interest.

Some of his results I will try to obtain in the following in a purely analytical manner.

It is known now, that in the problem of three bodies — one of the bodies being infinitesimal — there exist *seven* singular points, these points being distinguished by means of the existence of periodic solutions in their immediate vicinity. These

seven points are, firstly, the two finite masses themselves, in the vicinity of which there exist, as Mr. DARWIN has shown, several series of periodic orbits. The other 5 points agree with the points, where according to LAGRANGE there exist *exact* solutions to the problem of three bodies.

Of these points 3 lie in a straight line with the finite masses m_1 and m_2. Through any point in the vicinity of these points a periodic orbit can by drawn. The two remaining points lie on the vertices of the equilateral triangles, that can be described on $m_1 m_2$. Through any point in their vicinity it is possible, as will be shown in the following, to draw *two* different periodic orbits that satisfy the problem.

These two solutions only exist when one of the masses m_1 and m_2 is sufficiently small in proportion to the other.

In the other points one has periodic solutions for all values of the masses.

The singular points in straight line with the masses m_1 and m_2 have been the object of research from several authors. GYLDÉN has pointed out that the periodic orbits in the vicinity of one of these points may be appropriate to explain the singular phænomenon known by astronomers under the name of the »Gegenschein». Mr. MOULTON has independently and more fully developed the same idea in an elegant memoir in the Astronomical Journal N:o 483.

Previous to Mr. DARWIN the method of mechanical integration for the research of periodic orbits had been employed by Mr. BURRAU (Astr. Nachr. 3230 and 3251), who examined the subject when the masses m_1 and m_2 were equal. The periodic curves treated by him belong to the family *b* of oscillating satellites.

For comparison I have in the following applied the general formulæ to three different assumptions as to the masses, viz. $\mu = 1$, $\mu = 0.1$, $\mu = 1 : 320000$. The latter being assumed to be the mass of the earth.

It seems that the method used in this memoir may be applied also to the case, when all three bodies are of finite mass.

Let m_1 and m_2 be the two bodies revolving in circles about their centre of gravity G. The largest body m_1 is supposed to be of unit mass, m_2 has the mass μ. The quantity μ, which is consequently a proper fraction, may also be equal to unity.

Let r_1 and r_2 be the distances of m_1 and m_2 from the centre of gravity, and let the distance from m_1 to m_2 be equal to unity.

It is then

$$(1)\quad \begin{cases} r_1 + r_2 = 1 \\ r_1 - \mu r_2 = 0 . \end{cases}$$

The unit of time is so determined, that the gravitational constant is equal to unity. Hence the time T of a revolution of m_1 or m_2 round G is

$$(2)\quad T = \frac{2\pi}{\sqrt{1 + \mu}}$$

and the angular velocity n in this motion is

$$n = \sqrt{1 + \mu} .$$

In the plane determined by the motion of m_1 and m_2 moves a third body m of infinitesimal mass.

The coordinates x and y of this body are referred to rectangular axes moving with uniform angular velocity n, and having their origin in G and the x-axis directed towards m_1.

The equations of motion may thence be written

$$(3)\quad \begin{cases} \frac{d^1x}{dt^2} - 2n\frac{dy}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial x} \\ \frac{d^2y}{dt^2} + 2n\frac{dx}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial y} , \end{cases}$$

where

$$2\Omega = \varrho_1^2 + \frac{2}{\varrho_1} + \mu\left(\varrho_2^2 + \frac{2}{\varrho_2}\right) . \text{[1]}$$

[1]) This symmetrical form for the potential is given by Mr. DARWIN.

To these equations we have the JACOBIAN integral

$$V^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 2\Omega - C, \tag{4}$$

where C is a constant and V the velocity of m relatively to the rotating axes.

The function Ω is a uniform function of x and y in the whole plane with the exception of the points m_1 and m_2, the coordinates of which are respectively $x = r_1$ and $x = -r_2$, the y-coordinates being equal to zero.

Let $x = a$, $y = b$ be the coordinates of an arbitrary point, not coinciding with m_1 or m_2, it is evident that Ω and all its derivatives are susceptible of development in a convergent series in powers of $x - a$ and $y - b$. If x approaches sufficiently to a and y sufficiently to b, the terms of the lowest dimension in these developments must exceed the sum of the remaining terms in the series.

I will now seek to determine the situation of those points, for which, if we approach sufficiently near to them, periodic solutions of the problem exist, so that the mass m for all time can remain in the vicinity of these points, revolving in curves reentrant in themselves.

Let (a, b) be such a point and put

$$x = a + \xi$$
$$y = b + \eta.$$

It is then

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} - 2n\frac{d\eta}{dt} &= \frac{\partial\Omega}{\partial a} + \xi\frac{\partial^2\Omega}{\partial a^2} + \eta\frac{\partial^2\Omega}{\partial a\partial b} + \ldots \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} + 2n\frac{d\xi}{dt} &= \frac{\partial\Omega}{\partial b} + \xi\frac{\partial^2\Omega}{\partial b\partial a} + \eta\frac{\partial^2\Omega}{\partial b^2} + \ldots \end{aligned}\right. \tag{5}$$

The powers of ξ and η higher than the first in the development of $\frac{\partial\Omega}{\partial x}$ and $\frac{\partial\Omega}{\partial y}$ may be neglected, if we restrict our research to such periodic orbits, that are situated in the immediate vicinity of (a, b).

Indeed, if such an orbit exists, when only the first powers of ξ and η be retained, there exists also a corresponding periodic orbit, when *all* powers of these quantities are taken into consideration. On the contrary one can not be sure, that *all* periodic orbits corresponding to *finite* values of ξ and η will also occur, when these quantities are infinitesimal.

If we retain then only the first power of ξ and η in (5) it is obvious, that, in order that ξ and η may remain small quantities, we must have

$$\frac{\partial\Omega}{\partial a} = 0 = \frac{\partial\Omega}{\partial b}. \tag{6}$$

From these equations the position of the point (a, b) is determined.

The solution of these equations may be very simply obtained in the following manner.

It is

$$\varrho_1^2 = (a - r_1)^2 + b^2$$
$$\varrho_2^2 = (a + r_2)^2 + b^2,$$

and thence

$$0 = \frac{\partial\Omega}{\partial a} = \frac{\partial\Omega}{\partial\varrho_1}\frac{a - r_1}{\varrho_1} + \frac{\partial\Omega}{\partial\varrho_2}\frac{a + r_2}{\varrho_2}$$
$$0 = \frac{\partial\Omega}{\partial b} = \frac{\partial\Omega}{\partial\varrho_1}\frac{b}{\varrho_1} + \frac{\partial\Omega}{\partial\varrho_2}\frac{b}{\varrho_2}.$$

From these equations it follows, that it is either

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\varrho_1} = \frac{\partial\Omega}{\partial\varrho_2} = 0, \tag{7}$$

or

$$0 = \begin{vmatrix} \frac{a - r_1}{\varrho_1}, & \frac{a + r_2}{\varrho_2} \\ \frac{b}{\varrho_1}, & \frac{b}{\varrho_2} \end{vmatrix} = -\frac{b}{\varrho_1\varrho_2}(r_1 + r_2) = -\frac{b}{\varrho_1\varrho_2}. \tag{8}$$

The equations (7) may be written

$$\varrho_1 - \frac{1}{\varrho_1^2} = 0 = \varrho_2 - \frac{1}{\varrho_2^2},$$

hence

$$\varrho_1 = \varrho_2 = 1 .$$

This point (a, b) lies on the vertex of the equilateral triangle described om $m_1 m_2$.

There are evidently two such points, and these I will call (a_4, b_4) and (a_5, b_5), and we have

$$(9)\quad \begin{cases} a_4 = a_5 = \dfrac{r_1 - r_2}{2} = -\frac{1}{2} \cdot \dfrac{1-\mu}{1+\mu} \\ b_4 = -b_5 = \frac{1}{2}\sqrt{3} . \end{cases}$$

The points corresponding to the solution (8) must have $b = 0$, and are thence situated on the x axis. The value of a for these points are determined by the equation

$$(10)\qquad \frac{\partial \Omega}{\partial \varrho_1} \frac{a - r_1}{\varrho_1} + \frac{\partial \Omega}{\partial \varrho_2} \frac{a + r_2}{\varrho_2} = 0 .$$

In calculating the roots of this equation we may properly distinguish between three different cases:

$$\begin{aligned} &1) \quad a < -r_2 \\ &2) \quad -r_2 < a < r_1 \\ &3) \quad r_1 < a . \end{aligned}$$

And it is now:

$$\begin{aligned} &1) \quad a - r_1 = -\varrho_1 ; \quad a + r_2 = -\varrho_2 \\ &2) \quad a - r_1 = -\varrho_1 ; \quad a + r_2 = +\varrho_2 \\ &3) \quad a - r_1 = +\varrho_1 ; \quad a + r_2 = +\varrho_2 . \end{aligned}$$

The equation (10) assumes in these 3 cases the following form:

$$1) \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \varrho_1} + \frac{\partial \Omega}{\partial \varrho_2} = 0 ; \quad \varrho_1 = \varrho_2 + 1$$

$$2) \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \varrho_1} - \frac{\partial \Omega}{\partial \varrho_2} = 0 ; \quad \varrho_1 = 1 - \varrho_2$$

$$3) \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \varrho_1} + \frac{\partial \Omega}{\partial \varrho_2} = 0 ; \quad \varrho_1 = \varrho_2 - 1 .$$

In all cases we get an algebraic equation of the 5th degree to determine ϱ_1 or ϱ_2. These equations are

$$(10^*)\begin{cases} 1)\ (1+\mu)\varrho_2^5+(3+2\mu)\varrho_2^4+(3+\mu)\varrho_2^3-\mu\varrho_2^2-2\mu\varrho_2-\mu=0\,. \\ 2)\ (1+\mu)\varrho_2^5-(3+2\mu)\varrho_2^4+(3+\mu)\varrho_2^3-\mu\varrho_2^2+2\mu\varrho_2-\mu=0\,. \\ 3)\ (1+\mu)\varrho_1^5+(2+3\mu)\varrho_1^4+(1+3\mu)\varrho_1^3-\varrho_1^2-2\varrho_1-1=0\,. \end{cases}$$

Each one of these eqvations has a real positive root; the 4 other roots are imaginary.

For very small values of μ these roots have the following limiting values:

$$1)\quad \varrho_2=\sqrt[3]{\frac{\mu}{3}}$$

$$2)\quad \varrho_2=\sqrt[3]{\frac{\mu}{3}}$$

$$3)\quad \varrho_1=1-\tfrac{7}{12}\mu\,.$$

Hence there are generally 5 different points, where small periodic orbits may be generated. These points agree with those points where according to LAGRANGE it exists an exact solution of the problem of three bodies. With GYLDÉN I will call these points *centres of libration* and design them with L_1, L_2, L_3, L_4 and L_5, where L_4 and L_5 are the points at the vertex of an equilateral triangle on m_1m_2 and L_2, L_1, L_3 are respectively the points, that are determined by the algebraic equations 1), 2), 3) above.

It is to be observed that periodic orbits may occur also in the vicinity of m_1 and m_2.

I will now go to consider the differential equations of the periodic orbits in the vicinity of the centres of libration.

These equations have the form:

$$(11)\begin{cases} \dfrac{d^2\xi}{dt^2}-2n\dfrac{d\eta}{dt}=\dfrac{\partial^2\Omega}{\partial a^2}\xi+\dfrac{\partial^2\Omega}{\partial a\,\partial b}\eta\,, \\ \dfrac{d^2\eta}{dt^2}+2n\dfrac{d\xi}{dt}=\dfrac{\partial^2\Omega}{\partial a\,\partial b}\xi+\dfrac{\partial^2\Omega}{\partial b^2}\eta\,, \end{cases}$$

and are thence linear differential equations with constant coefficients.

A solution may then be written

$$\xi = Ae^{\lambda t}, \quad \eta = Be^{\lambda t},$$

where A and B are determined by the equations

$$(12) \quad \begin{cases} A\left(\lambda^2 - \dfrac{\partial^2\Omega}{\partial a^2}\right) - B\left(2n\lambda + \dfrac{\partial^2\Omega}{\partial a\,\partial b}\right) = 0 \\ A\left(2n\lambda - \dfrac{\partial^2\Omega}{\partial a\,\partial b}\right) + B\left(\lambda^2 - \dfrac{\partial^2\Omega}{\partial b^2}\right) = 0. \end{cases}$$

From these equations we obtain the following equation for λ

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 - \dfrac{\partial^2\Omega}{\partial a^2}, & -\left(2n\lambda + \dfrac{\partial^2\Omega}{\partial a\,\partial b}\right) \\ 2n\lambda - \dfrac{\partial^2\Omega}{\partial a\,\partial b}, & \lambda^2 - \dfrac{\partial^2\Omega}{\partial b^2} \end{vmatrix} = 0,$$

or

$$(13) \quad \lambda^4 - \lambda^2\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial a^2} + \frac{\partial^2\Omega}{\partial b^2} - 4(1+\mu)\right) + \frac{\partial^2\Omega}{\partial a^2}\frac{\partial^2\Omega}{\partial b^2} - \left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial a\,\partial b}\right)^2 = 0.$$

Now the nature of the motion depends on the values of the roots of this equation. If λ^2 receives a real and negative value, there exists a periodic solution. If there is no such value, it follows that m can only remain a finite time in the vicinity of the point (a, b).

Hence it is necessary to determine the values of the second derivatives of Ω for the 5 different centres of libration.

It is

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial a^2} = \frac{\partial^2\Omega}{\partial \varrho_1^2}\left(\frac{\partial \varrho_1}{\partial a}\right)^2 + \frac{\partial\Omega}{\partial \varrho_1}\frac{\partial^2 \varrho_1}{\partial a^2} + \frac{\partial^2\Omega}{\partial \varrho_2^2}\left(\frac{\partial \varrho_2}{\partial a}\right)^2 + \frac{\partial\Omega}{\partial \varrho_2}\frac{\partial^2 \varrho_2}{\partial a^2}.$$

A similar relation exists for $\dfrac{\partial^2\Omega}{\partial b^2}$.

For the remaining derivative we have the value

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial a\,\partial b} = \frac{\partial^2\Omega}{\partial \varrho_1^2}\frac{\partial \varrho_1}{\partial a}\frac{\partial \varrho_1}{\partial b} + \frac{\partial\Omega}{\partial \varrho_1}\frac{\partial^2 \varrho_1}{\partial a\,\partial b}$$

$$+ \frac{\partial^2\Omega}{\partial \varrho_2^2}\frac{\partial \varrho_2}{\partial a}\frac{\partial \varrho_2}{\partial b} + \frac{\partial\Omega}{\partial \varrho_2}\frac{\partial^2 \varrho_2}{\partial a\,\partial b}.$$

From these expressions we get the following values of these coefficients for the different points.

Tab. I.

	$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial a^2}$	$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial b^2}$	$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial a \partial b}$
L_1	$1+\mu+\frac{2}{\varrho_1^3}+\frac{2\mu}{\varrho_2^3}$	$1+\mu-\frac{1}{\varrho_1^3}-\frac{\mu}{\varrho_2^3}$	0
L_2	»	»	0
L_3	»	»	0
L_4	$\frac{3}{4}(1+\mu)$	$\frac{9}{4}(1+\mu)$	$-\frac{3}{4}\sqrt{3}(1-\mu)$
L_5	»	»	$+\frac{3}{4}\sqrt{3}(1-\mu)$

The values of ϱ_1 and ϱ_2 are for the three points L_1, L_2 and L_3 to be taken from the three equations (10*).

If we put

$$2f = \frac{1}{\varrho_1^3} + \frac{\mu}{\varrho_2^3}, \tag{14}$$

then the roots of (13) corresponding to the points L_1, L_2 and L_3 are given through the formula:

$$\lambda^2 = -(1 + \mu - f) \pm \sqrt{9f^2 - 4(1 + \mu)f}. \tag{15}$$

One of these roots is positive, the other negative. That is what I have found through numerical calculation for different values of μ, an algebraic demonstration of this fact seeming to be somewhat complicated.

The result of this calculation is the following.

Tab. II.

L_1

μ	ϱ_1	ϱ_2	f	λ^2	
1	0.5000	0.5000	+ 8.000	+ 28.63	— 16.63
0.1	0.7175	0.2825	+ 3.572	+ 12.426	— 7.482
1 : 320000	0.9899	0.0101	+ 2.030	+ 6.418	— 4.353

L_2

μ	ϱ_1	ϱ_2	f	λ^2	
1	1.6984	0.6984	+ 1.570	+ 2.671	— 3.531
0.1	1.8470	0.8470	+ 1.402	+ 4.695	— 3.091
1 : 320000	1.0101	0.0101	+ 1.971	+ 6.176	— 4.234

L_3

μ	ϱ_1	ϱ_2	f	λ^2	
1	0.6984	1.6984	+ 1.570	+ 2.671	— 3.531
0.1	0.9469	1.9464	+ 0.596	+ 0.258	— 1.261
1 : 320000	1.0000	2.0000	+ 0.500	0.000	— 1.000

The limiting values of the roots for evanescent value of μ are given by the expressions:

$$\lambda^2 = 1 \pm \sqrt{28}$$

for L_1 and L_2, and

$$\lambda^2 = -0.5 \pm 0.5$$

for L_3.

As to the points L_4 and L_5 the discussion is more easy. With the values of the derivatives in these points we get for both the same equation in λ, namely

$$4\lambda^4 + 4(1 + \mu)\lambda^2 + 27\mu = 0\,. \tag{16}$$

The roots of this equation are real, if

$$(1 + \mu)^2 > 27\mu\,,$$

that is for

$$\mu < 0.0401\,. \tag{17}$$

If μ is smaller than this limiting value, then the values of λ^2 are both negative and there are two different classes of periodic solutions. If on the contrary $\mu > 0.0401$, then no periodic solutions are to be found.

Mr. BURRAU has made some numerical researches to find periodic orbits, taking $\mu = 1$, in the vicinity of L_4 and failed

to find them, a necessary result indeed, there being no such orbits for this value of μ.

Hence, in the points L_4 and L_5, there are periodic solutions only for small values of μ. It is then advicable to expand λ in powers of μ. From (16) we obtain now for one root

(18) $$\lambda^2 = - 6.75\,\mu - 116.9375\,\mu^2$$

and for the other

(19) $$\lambda^2 = - 1 + 5.75\,\mu + 116.9375\,\mu^2 .$$

For each value of λ we get a corresponding value of $A : B$, and the general integral has the form

(20) $$\left\{\begin{aligned} \xi &= \sum_{i=1}^{4} A_i e^{\lambda_i t} \\ \eta &= \sum B_i e^{\lambda_i t} , \end{aligned}\right.$$

the values of A_i and B_i being connected through

(21) $$\frac{A_i}{B_i} = \frac{2\sqrt{1 + \mu}\lambda_i + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial a \partial b}}{\lambda_i^2 - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial a^2}} .$$

Four of the coefficients A_i and B_i are arbitrary. I will regard B_1, B_2, B_3 and B_4 as those arbitrary constants. The corresponding values of A_i are then obtained through (21).

Now let λ_1 and λ_2 be two conjugated purely imaginary roots, and put

$$\nu^2 = - \lambda^2 ,$$

so that ν_1 and ν_2 are real. It is then

$$\frac{A_1}{B_1} = - \frac{\frac{\partial^2 \Omega}{\partial a \partial b}}{\nu^2 + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial a^2}} - \frac{2\sqrt{1 + \mu}\,\nu_1}{\nu^2 + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial a^2}} \sqrt{-1}$$

$$\frac{A_2}{B_2} = - \frac{\frac{\partial^2 \Omega}{\partial a \partial b}}{\nu^2 + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial a^2}} - \frac{2\sqrt{1 + \mu}\,\nu_2}{\nu^2 + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial a^2}} \sqrt{-1} ,$$

where $\nu_2 = - \nu_1$.

If we now divide A_1 and A_2 in their real and imaginary parts putting

$$A_1 = \alpha_1 + \alpha_2\sqrt{-1}$$
$$A_2 = \alpha_1 - \alpha_2\sqrt{-1},$$

we may put also

$$B_1 = \beta_1 + \beta_2\sqrt{-1}$$
$$B_2 = \beta_1 - \beta_2\sqrt{-1},$$

and we have then

$$A_1 e^{\nu_1 t} + A_2 e^{\nu_2 t} = 2\alpha_1 \cos \nu_2 t + 2\alpha_2 \sin \nu_2 t .$$

If the arbitrary constants are so determined that $B_3 = B_4 = 0$, we have now a periodic solution of the form

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi = 2\alpha_1 \cos \nu_2 t + 2\alpha_2 \sin \nu_2 t \\ \eta = 2\beta_1 \cos \nu_2 t + 2\beta_2 \sin \nu_2 t , \end{array} \right.$$

and between the coefficients α and β there are now the relations:

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\nu_2^2 + \frac{\partial^2\Omega}{\partial a^2}\right)\alpha_1 = -\frac{\partial^2\Omega}{\partial a \partial b}\beta_1 - 2n\nu_2\beta_2 \\ \left(\nu_2^2 + \frac{\partial^2\Omega}{\partial a^2}\right)\alpha_2 = \quad 2n\nu_2\beta_1 - \frac{\partial^2\Omega}{\partial a \partial b}\beta_2 , \end{array} \right.$$

and the equation (13) becomes

$$(13^*) \qquad \left(\nu^2 + \frac{\partial^2\Omega}{\partial a^2}\right)\left(\nu^2 + \frac{\partial^2\Omega}{\partial b^2}\right) = 4n^2\nu^2 + \left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial a \, \partial b}\right)^2 .$$

From (23) in connection with (13*) we obtain

$$\left(\nu_2^2 + \frac{\partial^2\Omega}{\partial a^2}\right)(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2) = -\frac{\partial^2\Omega}{\partial a \partial b}(\beta_1^2 + \beta_2^2)$$

$$\left(\nu_2^2 + \frac{\partial^2\Omega}{\partial a^2}\right)(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) = -2n\nu_2(\beta_1^2 + \beta_2^2)$$

$$\left(\nu_2^2 + \frac{\partial^2\Omega}{\partial a^2}\right)(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) = \left(\nu_2^2 + \frac{\partial^2\Omega}{\partial b^2}\right)(\beta_1^2 + \beta_2^2) .$$

The equation of the orbit may be obtained through eliminating the time between the expressions for ξ and η. We thus get:

$$(24) \qquad 4\begin{vmatrix} \alpha_1, & \alpha_2 \\ \beta_1, & \beta_2 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} \xi, & \alpha_2 \\ \eta, & \beta_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \alpha_1, & \xi \\ \beta_1, & \eta \end{vmatrix}^2,$$

or

$$4(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^2 = \left(\beta_1^2 + \beta_2^2\right)\xi^2 + \left(\alpha_1^2 + \alpha_2^2\right)\eta^2 - 2(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2)\xi\eta.$$

If we now eliminate the α and the β, we get the following equation of the curve

$$(25) \qquad r^2 = \left(\nu^2 + \frac{\partial^2\Omega}{\partial a^2}\right)\xi^2 + \left(\nu^2 + \frac{\partial^2\Omega}{\partial b^2}\right)\eta^2 + 2\frac{\partial^2\Omega}{\partial a\partial b}\xi\eta$$

and here is

$$r^2 = \frac{16n^2\nu^2}{\nu^2 + \frac{\partial^2\Omega}{\partial a^2}}\left(\beta_1^2 + \beta_2^2\right).$$

Taking into consideration the values of the derivatives, we find that for all centres of libration the curve (25) represents an ellipse.

In the points L_1, L_2 and L_3 we have

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial a\partial b} = 0$$

and one axis of the ellipse then coincides with the axis of the ξ-coordinates. I will return to these curves later on.

In L_4 and L_5 the axis of the coordinates may be turned in order to coincide with the axis of the ellipse. We therefore substitute

$$\xi = x\cos\theta - y\sin\theta$$
$$\eta = x\sin\theta + y\cos\theta,$$

and obtain for the angle θ the value

$$(26) \qquad \operatorname{tg} 2\theta = \frac{2\frac{\partial^2\Omega}{\partial a\partial b}}{\frac{\partial^2\Omega}{\partial a^2} - \frac{\partial^2\Omega}{\partial b^2}}.$$

With the values of the derivatives in L_4 and L_5 this equation becomes

$$(27) \qquad \operatorname{tg} 2\theta = \pm\sqrt{3}\,\frac{1-\mu}{1+\mu},$$

where the sign $+$ relates to L_4, the sign $-$ to L_5.

The minor mass μ being always smaller than 0.04, if a periodic orbit shall exist, it is evident from (27) that the angle θ deviates but little from $\pm 30°$.

Hence one axis of the ellipse is nearly directed to the greater mass (m_1), the other being rectangular to this line.

For the axes a and b of the ellipse we obtain the values

$$\frac{r^2}{a^2} = \left(\nu^2 + \frac{\partial^2\Omega}{\partial a^2}\right)\cos^2\theta + \left(\nu^2 + \frac{\partial^2\Omega}{\partial b^2}\right)\sin^2\theta + \sin 2\theta \frac{\partial^2\Omega}{\partial a\,\partial b}$$

$$\frac{r^2}{b^2} = \left(\nu^2 + \frac{\partial^2\Omega}{\partial a^2}\right)\sin^2\theta + \left(\nu^2 + \frac{\partial^2\Omega}{\partial b^2}\right)\cos^2\theta - \sin 2\theta \frac{\partial^2\Omega}{\partial a\,\partial b},$$

which expressions through (26) may be written

$$(28)\quad \begin{cases} \dfrac{r^2}{a^2}\cos 2\theta = \left(\nu^2 + \dfrac{\partial^2\Omega}{\partial a^2}\right)\cos^2\theta - \left(\nu^2 + \dfrac{\partial^2\Omega}{\partial b^2}\right)\sin^2\theta \\ \dfrac{r^2}{b^2}\cos 2\theta = \left(\nu^2 + \dfrac{\partial^2\Omega}{\partial b^2}\right)\cos^2\theta - \left(\nu^2 + \dfrac{\partial^2\Omega}{\partial a^2}\right)\sin^2\theta\,. \end{cases}$$

The exact values of the half-axes may hence be easily found. In consideration of the small value of μ for the periodic orbits it is meanwhile preferable to expand the quantities in powers of μ. We obtain now to the first degree of μ:

$$\cos 2\theta = \tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{4}\mu$$

$$\cos^2\theta = \tfrac{3}{4} + \tfrac{3}{8}\mu$$

$$\sin^2\theta = \tfrac{1}{4} - \tfrac{3}{8}\mu\,.$$

Further is (exactly)

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial a^2} = \tfrac{3}{4} + \tfrac{3}{4}\mu$$

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial b^2} = \tfrac{9}{4} + \tfrac{9}{4}\mu\,.$$

As to ν^2 we must distinguish between two cases corresponding to the two different roots of (13*).

$$1)\quad \nu^2 = 6.75\,\mu\,.$$

We then have

$$r^2 = 144\mu\left(\beta_1^2 + \beta_2^2\right)$$

$$a^2 = 16\left(\beta_1^2 + \beta_2^2\right)$$

$$b^2 = 48\mu\left(\beta_1^2 + \beta_2^2\right).$$

Hence we have

$$b = \sqrt{3\mu}\, a\,.$$

The excentricity is in value near to unity. The greatest value of the quotient $b : a$ is

$$\max. \frac{b}{a} = \sqrt{0.12} = 0.35\,.$$

If μ designs the earth, hence

$$\mu = 1 : 320000\,,$$

then

$$\frac{b}{a} = 0.00306\,.$$

Is μ the mass of *Jove*, then the major axis is 19 times the minor one.

If we take the other root

$$2) \quad \nu^2 = 1 - 5.75\,\mu\,,$$

then

$$r^2 = \tfrac{64}{7} - \tfrac{848}{49}\,\mu\,,$$

and we become:

$$a^2 = \tfrac{64}{7}\left(\beta_1^2 + \beta_2^2\right)$$

$$b^2 = \tfrac{16}{7}\left(\beta_1^2 + \beta_2^2\right).$$

Both axes remain finite for evanescent values of μ. The major axis is the double of the minor one.

Hence it is through any point sufficiently near to L_4 or L_5 possible to draw two curves, corresponding to two different periodic solutions of the problem. It is to be observed, that the values of the half-axes of the ellipses in the two cases 1) and 2) are not directly comparable with another, β_2 being indeed dependent not only on the initial coordinates, but also on the value of the root ν, that has, in the two cases, different values.

It is easy to express a and b directly as fonctions of the initial coordinates.

Let these be ξ_0 and η_0, then we have from (25)

$$\frac{16n^2\nu^2}{\nu^2 + \frac{\partial^2\Omega}{\partial a^2}}\left(\beta_1^2+\beta_2^2\right) = r^2 = \left(\nu^2 + \frac{\partial^2\Omega}{\partial a^2}\right)\xi_0^2 + \left(\nu^2 + \frac{\partial^2\Omega}{\partial b^2}\right)\eta_0^2 + 2\,\frac{\partial^2\Omega}{\partial a\,\partial b}\,\xi_0\eta_0\,.$$

Take for brevity $\eta_0 = 0$, so that

$$(29)\qquad 16n^2\nu^2\left(\beta_1^2 + \beta_2^2\right) = \left(\nu^2 + \frac{\partial^2\Omega}{\partial a^2}\right)^2\xi_0^2\,.$$

It is hence in the case 1)

$$\beta_1^2 + \beta_2^2 = \frac{1}{192\mu}\xi_0^2\,.$$

And in the case 2)

$$\beta_1^2 + \beta_2^2 = \frac{49}{256}\xi_0^2\,.$$

The values of a and b are now:

$$1)\quad \begin{cases} a^2 = \dfrac{1}{12\mu}\xi_0^2 \\ b^2 = \tfrac{1}{4}\,\xi_0^2 \end{cases}$$

and

$$2)\quad \begin{cases} a^2 = \tfrac{7}{4}\,\xi_0^2 \\ b^2 = \tfrac{7}{16}\,\xi_0^2\,. \end{cases}$$

And in all these formulae ξ_0 has the same designation, viz. the coordinate of that point, where the curve cuts the ξ axis.

It is to be observed that for all curves of the same family the excentricity is the same, namely for 1) $\sqrt{1-3\mu}$ and for 2) $\sqrt{\tfrac{3}{4}}$.

Hence the minor axes in both curvus are both finite; the major axis of 2) is so also; but the major axis of 1) increases as 1: $\sqrt{\mu}$. The former expressions for a and b were not so conspicuous, owing to the fact that $\beta_1^2 + \beta_2^2$ was infinite when μ becomes evanescent.

It is interesting to classify the periodic curves with regard to the values of the constant of JACOBI C. It is, namely, a

singular fact that to each value of C there exists at most a single curve of each family.

To demonstrate this I recall the integral of JACOBI (4). This is

$$\xi'^2 + \eta'^2 = 2\Omega - C. \tag{30}$$

It is easy to express C trough the initial values ξ_0 and η_0. We have

$$\xi = 2\alpha_1 \cos \nu_2 t + 2\alpha_2 \sin \nu_2 t$$
$$\eta = 2\beta_1 \cos \nu_2 t + 2\beta_2 \sin \nu_2 t.$$

Hence

$$\xi' = -2\nu_2\alpha_1 \sin \nu_2 t + 2\nu_2\alpha_2 \cos \nu_2 t$$
$$\eta' = -2\nu_2\beta_1 \sin \nu_2 t + 2\nu_2\beta_2 \cos \nu_2 t.$$

If we put in these equations $t = 0$, we get

$$\left\{\begin{aligned} \xi_0 &= 2\alpha_1 \\ \eta_0 &= 2\beta_1 \\ \xi'_0 &= 2\nu_2\alpha_2 \\ \eta'_0 &= 2\nu_2\beta_2, \end{aligned}\right. \tag{31}$$

and with the aid of (23) we can now express ξ'_0 and η'_0 through α_1 and β_1 and hence also through ξ_0 and η_0. We have

$$2n\nu_2\alpha_2 = \frac{\partial^2\Omega}{\partial a\,\partial b}\alpha_1 + \left(\nu^2 + \frac{\partial^2\Omega}{\partial b^2}\right)\beta_1$$
$$2n\nu_2\beta_2 = -\left(\nu_2^2 + \frac{\partial^2\Omega}{\partial a^2}\right)\alpha_1 - \frac{\partial^2\Omega}{\partial a\,\partial b}\beta_1.$$

It is thence

$$2n\xi'_0 = \frac{\partial^2\Omega}{\partial a\,\partial b}\xi_0 + \left(\nu^2 + \frac{\partial^2\Omega}{\partial b^2}\right)\eta_0$$
$$2n\eta'_0 = -\left(\nu_2^2 + \frac{\partial^2\Omega}{\partial a^2}\right)\xi_0 - \frac{\partial^2\Omega}{\partial a\,\partial b}\eta_0.$$

And from these equations we get

$$\begin{aligned} 4n^2(\xi'^2_0 + \eta'^2_0) = & \left[\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial a\,\partial b}\right)^2 + \left(\nu^2 + \frac{\partial^2\Omega}{\partial a^2}\right)^2\right]\xi_0^2 \\ & + \left[\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial a\,\partial b}\right)^2 + \left(\nu^2 + \frac{\partial^2\Omega}{\partial b^2}\right)^2\right]\eta_0^2 \\ & + \left[\nu^2 + \frac{\partial^2\Omega}{\partial a^2} + \nu^2 + \frac{\partial^2\Omega}{\partial b^2}\right] 2\,\frac{\partial^2\Omega}{\partial a\,\partial b}\,\xi_0\eta_0. \end{aligned}$$

If we expand also Ω in powers of ξ and η we get, owing to the relations (6),

$$2\Omega = 2\Omega_0 + \frac{\partial^2\Omega}{\partial a^2}\xi_0^2 + \frac{\partial^2\Omega}{\partial b^2}\eta_0^2 + 2\frac{\partial^2\Omega}{\partial a\,\partial b}\xi_0\eta_0,$$

where Ω_0 designs the value of Ω in the centre of libration, that is in question.

For the sake of brevity we can choose the point (ξ_0, η_0) in such a manner, that η_0 is zero, and we have now

$$(32) \qquad C = 2\Omega_0 + \left[\frac{\partial^2\Omega}{\partial a^2} - \frac{1}{4n^2}\left(\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial a\,\partial b}\right)^2 + \left(\nu^2 + \frac{\partial^2\Omega}{\partial a^2}\right)^2\right)\right]\xi_0^2.$$

Using the values already given of the derivatives and of the roots we now have in L_4 and L_5.

$$1) \quad C = 2\Omega_0 + \tfrac{3}{16}\xi_0^2$$

$$2) \quad C = 2\Omega_0 - \tfrac{1}{16}\xi_0^2.$$

We learn from these expressions that values of C somewhat greater than $2\Omega_0$ belong to the series 1) of curves, or to the family d of curves as I will call these, and for values of C less than $2\Omega_0$ we have the family e of curves corresponding to the second root of the equation for ν.

To any value of ξ_0 we have two values of C and to any value of C (not differing much from $2\Omega_0$) there is only one single value of ξ_0^2.

As to $2\Omega_0$, its value in L_4 and L_5 is

$$(33) \qquad 2\Omega_0 = 3(1+\mu).$$

This is the least value of C, for which there exist real branches of the curve

$$(34) \qquad 2\Omega - C = 0,$$

which, as M. Hill has first shown, divides the plane in portions, where no motion of a particle can exist, and other portions, where such a motion is possible.

I will call this curve the *limiting curve* of motion.

For such values of C, which are a little greater than this minimum value (33), the limiting curve consists of two ellipse-like branches surrounding the points L_4 and L_5, the equation of which are

$$C - 3(1 + \mu) = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial a^2} \xi^2 + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial b^2} \eta^2 + 2 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial a \partial b} \xi\eta . \tag{35}$$

In comparing this ellipse with the ellipse (25) we find that the axis of the ellipse are in the same direction as the axes of the ellipse (25). We find thence, that the periodic curves d surround the ellipses, which constitute the limiting curve for values of C somewhat greater than $3(1 + \mu)$.

Meanwhile it is also to be observed, that when $C < 3(1 + \mu)$, when there is no limiting curve, there are, nevertheless, periodic curves namely the family e of orbits.

M. BURRAU has first observed that the existance of a limiting curve is not a necessary condition for the appearance of periodic orbits.

The period of a revolution of the little mass m in its orbit may easily be found.

Designing the time of a revolution in any curve of the family d with τ_4 and in a curve of the family e with τ_5, we have generally

$$\tau = \frac{2\pi}{\nu},$$

whereas the time T of revolution of m_1 or m_2 around the centre of gravity is given through the equation

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{1 + \mu}} .$$

It is hence generally

$$\tau = \frac{\sqrt{1 + \mu}}{\nu} \cdot T . \tag{36}$$

If we substitute in this equation the values of ν corresponding to the cases d and e, we find the following approximate values for the periods.

(37) $$\tau_4 = \frac{T}{\sqrt{6.75\,\mu}}$$

(38) $$\tau_5 = T(1 + 3.375\,\mu)\,.$$

The period of revolution is the same for all curves of the same family.

For the family e of orbits the period is nearly equal to T, for the family d the period is very long.

Taking for instance

$$\mu = 1 : 320000\,,$$

so that m_2 designs the earth, m_1 being the sun. Then we have

$$\tau_4 = 217.8 \text{ years}$$
$$\tau_5 = 1 \text{ year} + 5.546 \text{ minutes}.$$

Returning now to the periodic curves in the vicinity of L_1, L_2 and L_3, we have already found, that their equations are

$$r^2 = \left(\nu^2 + \frac{\partial^2\Omega}{\partial a^2}\right)\xi^2 + \left(\nu^2 + \frac{\partial^2\Omega}{\partial b^2}\right)\eta^2\,,$$

where r^2 has the same expression as before. The half axes of the ellipses are

$$a^2 = \frac{16n^2\nu^2}{\left(\nu^2 + \frac{\partial^2\Omega}{\partial a^2}\right)^2}\left(\beta_1^2 + \beta_2^2\right)$$

$$b^2 = \frac{16n^2\nu^2}{\left(\nu^2 + \frac{\partial^2\Omega}{\partial a^2}\right)\left(\nu^2 + \frac{\partial^2\Omega}{\partial b^2}\right)}\left(\beta_1^2 + \beta_2^2\right)$$
$$= 4\left(\beta_1^2 + \beta_2^2\right)$$

in consequence of (13*).

If we here use the expression (29) of $\beta_1^2 + \beta_2^2$ through ξ_0, then these relations are

(39) $$\begin{cases} a^2 = \xi_0^2 \\ b^2 = \dfrac{\left(\nu^2 + \frac{\partial^2\Omega}{\partial a^2}\right)^2}{4n^2\nu^2}\xi_0^2 = \dfrac{\nu^2 + \frac{\partial^2\Omega}{\partial a^2}}{\nu^2 + \frac{\partial^2\Omega}{\partial b^2}}\xi_0^2\,. \end{cases}$$

The excentricity of these curves is also independent of ξ_0 and is thence the same for the whole family of orbits surrounding each one of the points L_1, L_2 and L_3.

From the expressions for the derivatives its follows that

$$\nu^2 + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial a^2} > \nu^2 + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial b^2}$$

and hence we find that b is the major axis of the ellipse.

The minor axis a is equal to ξ_0 as might be expected.

By using the values of the derivatives, that are given in Tab. I we get the following numerical values of the caracteristics of the ellipses in L_1, L_2 and L_3 for $\mu = 1$, $\mu = 0.1$ and $\mu = 1:320000$ resp.

Tab. III.

L_1

Family a of oscillating satellites.

	$\mu = 1$	$\mu = 0.1$	$\mu = 1:320000$
$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial a^2}$	+ 34.000	+ 15.388	+ 9.120
$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial b^2}$	— 14.000	— 6.044	— 3.060
ν^2	+ 16.63	+ 7.482	+ 4.353
$\nu^2 + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial a^2}$	+ 50.63	+ 22.87	+ 13.473
$\nu^2 + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial b^2}$	+ 2.63	+ 1.438	+ 1.293
$b : a$	4.387	3.988	3.227
e	0.974	0.968	0.951
$\tau : T$	0.347	0.384	0.479
τ°	124°.8	138°.0	172°.6

L_2

Family b of oscillating satellites.

	$\mu = 1$	$\mu = 0.1$	$\mu = 1:320000$
$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial a^2}$	+ 8.280	+ 6.708	+ 8.884
$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial b^2}$	— 1.140	— 1.704	— 2.942
ν^2	+ 3.581	+ 3.091	+ 4.284
$\nu^2 + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial a^2}$	+ 11.811	+ 9.799	+ 13.118
$\nu^2 + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial b^2}$	+ 2.391	+ 1.387	+ 1.292
$b : a$	2.221	2.659	3.187
e	0.893	0.929	0.951
$\tau : T$	0.752	0.597	0.486
τ°	270°.9	214°.8	175°.0

L_3

Family c of oscillating satellites.

	$\mu = 1$	$\mu = 0.1$	$\mu = 1:320000$
$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial a^2}$	+ 8.280	+ 3.484	+ 3.000
$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial b^2}$	— 1.140	— 0.092	0.000
ν^2	+ 3.581	+ 1.261	+ 1.000
$\nu^2 + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial a^2}$	+ 11.811	+ 4.745	+ 4.000
$\nu^2 + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial b^2}$	+ 2.391	+ 1.169	+ 1.000
$b : a$	2.221	2.015	2.000
e	0.893	0.869	0.867
$\tau : T$	0.752	0.934	1.000
τ°	270°.9	336°.2	360°.0

It remains to determine the direction in which the motion in the different curves takes place. It is sufficient for this pur-

pose to put $\eta_0 = 0$, and the direction is thence determined by the sign of η'_0. We now easily become

$$2n\eta'_0 = -\left(\nu^2 + \frac{\partial^2\Omega}{\partial a^2}\right)\xi_0 .$$

The sign of $\nu^2 + \frac{\partial^2\Omega}{\partial a^2}$ is positive for all the curves, and thence the orbits are described in the opposite direction — seen from the corresponding centre of libration — to the direction of the motion of m_1 and m_2 round their common centre of gravity.

With the help of (32) we can express the relation between the JACOBIAN constant and the initial coordinate ξ_0 for the different points. We thus get:

Tab. IV.

Values of the Jacobian constant.

	$\mu = 1$	$\mu = 0.1$	$\mu = 1:320000$
L_1	$8.500 - 286\ \xi_0^2$	$4.0182 - 103.5\ \xi_0^2$	$3.0009264 - 36.22\ \xi_0^2$
L_2	$7.412 - 9.16\ \xi_0^2$	$3.8876 - 15.12\ \xi_0^2$	$3.0009227 - 34.16\ \xi_0^2$
L_3	$7.412 - 9.16\ \xi_0^2$	$3.4905 - 1.68\ \xi_0^2$	$3.0000156 - 1.00\ \xi_0^2$
L_4	6.000	3.3000	3.0000094

For L_4 (and L_5) the values of C for different values of ξ_0 is already given.

For those curves that lie sufficiently near to the centres of libration I get with this formulæ a good agreement with the results of Mr. DARWIN.

Seek for instance the periodic orbit of the family a corresponding to $C = 4.0000$.

Tab. IV gives: $\xi_0 = \pm 0.0133$; Mr. DARWIN obtains $\xi_0 = \begin{cases} -0.0125 \\ +0.0147 \end{cases}$

Tab. III » : $\tau^\circ = 138^\circ.0$; » » » $\tau^\circ = 138^\circ.3$

Tab. IV » : $b = 0.0531$; » » » $y_{max} = 0.0531$.

It follows from the values of the roots of the equation for λ that all curves of the families a, b and c are unstable. The orbits d and e in the vicinity of L_4 and L_5 are, on the contrary, stable, owing to the fact that all the values of λ^2 in these points are real and negative. A small body, moving in a periodic orbit of the family d or e and exposed to small disturbances from a foreign body, will describe a curve, the coordinates of which may be regarded as composed of the coordinates of the two ellipses d and e.

ÖFVERSIGT AF K. SV. VET.-AKAD. FÖRHANDL. 1901. N:o 9.

MEDDELANDEN

FRÅN

LUNDS ASTRONOMISKA OBSERVATORIUM

N:o 19.

CONTRIBUTIONS TO THE THEORY OF THE SECULAR PERTURBATIONS OF THE PLANETS

BY

C. B. S. CAVALLIN

(COMMUNICATED 13 NOVEMBER 1901 BY C. V. L. CHARLIER.)

The fundamental formulas, from which this research issues, are the following:

$$\left.\begin{aligned} e\cos\pi &= \sum_{i=1}^{n} A_i \cos(g_i t + \beta_i) \\ \text{and} \quad e\sin\pi &= \sum_{i=1}^{n} A_i \sin(g_i t + \beta_i) \end{aligned}\right\}, \qquad \text{(I)}$$

where e denotes the excentricity and π the longitude of the perhelion of the planet in question, t the time and the A, g and β are certain real constants, the former being positive.

The question is to determine e and π as functions of t.

When one of the constants A, say A_r, satisfies the condition

$$A_r > A_1 + A_2 + \ldots + A_{r-1} + A_{r+1} + \ldots + A_n \qquad \text{(I')}$$

it is easy to show that, for all t,

$$\pi = g_r t + \text{a finite function.} \qquad \text{(I'')}$$

In this case g_r is the mean velocity with which π increases with t.

The condition (I′) is valid, and therefore also the formula (I″), for all planets within our system, with the exception of the Earth, Venus and about a dozen of the small planets.

Again, when the condition (I′) is not satisfied, no explicite formula is up to this time given for the determination of the mean motion.

Generally it is said, that no mean motion exists in this case.

In the following it will however be demonstrated, that at all events there exists a mean motion, limited by the greatest and the least g_i. Methods will also be given for its determination.

The solution of the above system of equations (I) is a special case of the solution of the following purely mathematically formulated question:

When

$$re^{i\theta} = \sum_{r=1}^{n} A_r e^{ig_r t}, \tag{1}$$

where the constants A_r are all significative and in general imaginary, the constants g all real and t a real variable; to determine the modulus r and the argument θ as functions of t.

No loss of generality arises, if we assume the constants g_r all unequal, for if two or more terms contain the same g, these terms may be joined to one.

Besides we at first assume all the g positive and put

$$g_1 > g_2 \cdots > g_n \,. \tag{2}$$

As convergents to the constants

$$g_1\,,\ g_2\,,\ \ldots,\ g_n \tag{3}$$

we assume the fractions with common denominator

$$\frac{m_1}{m}\,,\ \frac{m_2}{m}\,,\ \ldots,\ \frac{m_n}{m}\,, \tag{4}$$

which we suppose to be reduced to their lowest terms.

Moreover we assume these convergents to be so accurate that conformably to (2) the unequalities

$$m_1 > m_2 \ldots > m_n \tag{5}$$

also take place.

Further we assume

$$r_1 e^{i\vartheta_1} = \sum_{r=1}^{n} A_r e^{i\frac{m_r}{m}t} \tag{6}$$

so that, when the convergents (4) converge against the values (3), the modulus r_1 and the argument ϑ_1 converge against the modulus r and the argument ϑ, and the equation (6) thus in the limit coincides with the equation (1).

Putting

$$z = e^{i\frac{t}{m}}$$

the right member of the equation (6) is changed into the rational polynomial in respect to z:

$$A_1 z^{m_1} + A_2 z^{m_2} + \ldots + A_n z^{m_n}$$
$$= A_1 z^{m_n}\left\{z^{\mu_1} + \frac{A_2}{A_1} z^{\mu_2} + \ldots + \frac{A_n}{A_1}\right\}, \tag{7}$$

where we have assumed

$$\mu_1 = m_1 - m_n\,,\ \mu_2 = m_2 - m_n\,,\ \ldots,\ \mu_{n-1} = m_{n-1} - m_n\,, \tag{8}$$

from which it further follows according to (5).

$$\mu_1 > \mu_2 \ldots > \mu_n\,. \tag{9}$$

The expression within brackets in (7) is thus a rational polynomial of the degree μ_1.

As the equation

$$A_1 u^{\mu_1} + A_2 u^{\mu_2} + \ldots + A_n = 0 \tag{10}$$

can not have any root equal to zero, all the coefficients A being assumed significative, its roots may be denoted by

$$e^{i\frac{\lambda_1}{m}},\ e^{i\frac{\lambda_2}{m}},\ \ldots,\ e^{i\frac{\lambda_{\mu_1}}{m}}, \tag{11}$$

and hence it follows by (6) and (7)

$$r_1 e^{i\theta_1} = A_1 e^{i\frac{m_n}{m}t} \prod_{r=1}^{\mu_1} \left(e^{i\frac{t}{m}} - e^{i\frac{\lambda_r}{m}}\right) \tag{12}$$

$$= A_1 e^{i\frac{m_n}{m}t} \prod_{r=1}^{\mu_1} 2ie^{i\frac{t+\lambda_r}{2m}} \frac{e^{i\frac{t-\lambda_r}{2m}} - e^{-i\frac{t-\lambda_r}{2m}}}{2i}$$

$$= Ce^{i\frac{2m_n+\mu_1}{2m}t} \prod_{r=1}^{\mu_1} \sin\frac{t-\lambda_r}{2m},$$

where C is a constant the value of which we do not need to determine.

Thus we get since by (8)

$$2m_n + \mu_1 = 2m_n + m_1 - m_n = m_1 + m_n,$$

$$r_1 e^{i\theta_1} = Ce^{i\frac{m_1+m_n}{2m}} \prod_{r=1}^{\mu_1} \sin\frac{t-\lambda_r}{2m}. \tag{13}$$

By logarithmic differentiation of both members of (13) we get

$$\frac{1}{r_1}\frac{dr_1}{dt} + i\frac{d\theta_1}{dt} = i\frac{m_1 + m_n}{2m} + \frac{1}{2m}\sum_{r=1}^{\mu_1} \cot\frac{t-\lambda_r}{2m}. \tag{14}$$

As r_1 and θ_1 respectively constitute the modulus and the argument of the right member of (6) they are both real and thus also $\frac{dr_1}{dt}$ and $\frac{d\theta_1}{dt}$.

Comparing real and imaginary parts in both members of (14) we arrive at the formulas

$$\frac{1}{r_1}\frac{dr_1}{dt} = \frac{1}{2m} R \sum_{r=1}^{\mu_1} \cot\frac{t-\lambda_r}{2m} \tag{15}$$

and

$$\frac{d\theta_1}{dt} = \frac{m_1 + m_n}{2m} + \frac{1}{2m} R \frac{1}{i} \sum_{r=1}^{\mu_1} \cot\frac{t-\lambda_r}{2m}, \tag{16}$$

where the symbol R has the meaning: »the real part of».

If we had differentiated the equation (6) directly in the same manner we should have obtained

$$\frac{1}{r_1}\frac{dr_1}{dt} = Ri\varphi\left(e^{i\frac{t}{m}}\right) \tag{17}$$

and

$$\frac{d\theta_1}{dt} = \frac{m_1 + m_u}{2m} + R\varphi\left(e^{i\frac{t}{m}}\right), \tag{18}$$

where we have introduced the abridged notation

$$\varphi\left(e^{i\frac{t}{m}}\right) = \frac{\sum_{r=1}^{\mu_1} A_r \frac{m_r}{m} e^{i\frac{m_r}{m}t}}{\sum_{r=1}^{\mu_1} A_r e^{i\frac{m_r}{m}t}}, \tag{19}$$

because this function will be frequently used in the following.

The points of infinity of the cotangent being all real, $\cot\frac{t-\lambda_r}{2m}$ can only become infinite, when λ_r is real — t being a real quantity.

But when λ_r is real we have

$$R\frac{1}{i}\cot\frac{t-\lambda_r}{2m} = 0$$

and hence the sum in the right member of (16) *always has a finite value.*

When λ_r is real the modulus of $e^{i\frac{\lambda_r}{m}}$ is unity. On the contrary for λ_r imaginary the modulus of the corresponding root is greater or less than unity according as $Ri\lambda_r$ is positive or negative.

In order to find a development of $\cot\frac{t-\lambda_r}{2m}$ when λ_r is imaginary we start from the relations

$$\cot\frac{t-\lambda_r}{2m} = \pm i\,\frac{1 + e^{\mp i\frac{t-\lambda_r}{m}}}{1 - e^{\mp i\frac{t-\lambda_r}{m}}}.$$

Using the relation

$$\frac{1+z}{1-z} = 1 + 2z + 2z^2 + \ldots + 2z^{n-1} + 2\frac{z^n}{1-z}$$

we thus get

$$\cot\frac{t-\lambda_r}{2m}$$

$$= \pm i \pm 2i\left\{e^{\mp i\frac{t-\lambda_r}{m}} + e^{\mp 2i\frac{t-\lambda_r}{m}} + \ldots + e^{\mp(n-1)i\frac{t-\lambda_r}{m}}\right\}$$

$$\pm 2i\frac{e^{\mp ni\frac{t-\lambda_\lambda}{m}}}{1-e^{\mp ni\frac{t-\lambda_r}{m}}},$$

where we take the upper or lower sign according as $\left|e^{i\frac{\lambda_r}{m}}\right|$ is less or greater than unity.

In both cases the remainder vanishes for $n = \infty$ and we obtain

$$\cot\frac{t-\lambda_r}{2m} = \pm i \pm 2i\sum_{n=1}^{\infty} e^{\mp ni\frac{t-\lambda_r}{m}}. \tag{20}$$

With the aid of the relation (20) the equation (16) is transformed into

$$\frac{d\theta_1}{dt}$$

$$= M + \frac{1}{m}R\Sigma'\sum_{n=1}^{\infty} e^{ni\frac{\lambda_r}{m}} e^{-ni\frac{t}{m}} - \frac{1}{m}R\Sigma''\sum_{n=1}^{\infty} e^{-ni\frac{\lambda_r}{m}} e^{ni\frac{t}{m}}, \tag{21}$$

where

$$M = \frac{m_1 + m_n + l' - l''}{2m} \tag{21'}$$

and l' and l'' each denote the number of roots the modulus of which is less or greater than unity, and the symbols of summation, Σ' and Σ'', have reference to such roots respectively.

From the significations of the integers l' and l'' it follows that they must satisfy the unequalities

$$0 \leqq l',\ l'' \leqq \mu_1 = m_1 - m_n. \tag{22}$$

The greatest value of M occurs according to (21′) and (22) when $l' = m_1 - m_n$ and $l'' = 0$, with $\frac{m_1}{m}$; the least value for $l' = 0$ and $l'' = m_1 - m_n$, with $\frac{m_n}{m}$.

Thus: *the greatest and the least M coincides with the greatest and the least of the convergents* (4).

For $l' = l''$, thus specially when $l' = l'' = 0$, with other words in the latter case when all the roots have unity as modulus, we have

$$M = \frac{m_1 + m_n}{2m}. \tag{23}$$

When the equation (10) has an even number of roots, the modulæ of which are not unity, and amongst these the modulus of one root always is the inverse of the modulus of another, then the formula (23) holds good. Particularly this occurs when the equation (10) is reciprocal.

When the right member of the equation (6) consists of two terms we have an excellent example for illustrating the last three results gained, as they are all here represented.

In this case assuming

$$|A_1| > |A_2|, \tag{24}$$

the modulæ of all the roots are less than unity and therefore

$$M = \frac{m_1}{m}. \tag{24'}$$

On the contrary if

$$|A_1| < |A_2| \tag{25}$$

the modulæ of all the roots are greater than unity and thus

$$M = \frac{m_2}{m}. \tag{25'}$$

Finally if

$$|A_1| = |A_2| \tag{26}$$

the modulæ of all the roots are unity, so that by (23)

$$M = \frac{m_1 + m_2}{2m}. \tag{26'}$$

Generally we may anticipate the possibility of determining M as often as the equation (10) is possible to solve. Therefore it ought to be practicable to determine M, when the right member of (6) consists of three terms with the aid of the solution newly found of a trinomical equation.

Integrating both members of (20) between the limits $t = 0$ and $t = t$ and denoting by $\theta_{1,0}$ the value of θ_1 for $t = 0$, we obtain

$$\theta_1 - \theta_{1,0} \tag{27}$$

$$= Mt - R\frac{1}{i}\Sigma' \sum_{n=1}^{\infty} e^{ni\frac{\lambda_r}{m}} \frac{e^{-ni\frac{t}{m}} - 1}{n} - R\frac{1}{i}\Sigma'' \sum_{n=1}^{\infty} e^{-ni\frac{\lambda_r}{m}} \frac{e^{ni\frac{t}{m}} - 1}{n}.$$

The series in the right member of (27) having a finite value för all t we thus conclude

$$\lim_{t=\infty} \frac{\theta_1}{t} = M. \tag{28}$$

Now let us introduce a new system of convergents to the constants (3) by changing the convergents (4) into

$$\frac{m'_1}{m'}, \frac{m'_2}{m'}, \ldots, \frac{m'_n}{m'} \tag{29}$$

and r_1 and θ_1 into r'_1 and θ'_1.

Besides we assume these convergents to be so accurate that in accordance with (4) we also have

$$m'_1 > m'_2 \ldots > m'_n,$$

and moreover we assume the convergents (4) to be maximi- and the convergents (29) minimi-convergents, so that

$$\frac{m_1}{m} \geqq g_1 \geqq \frac{m'_1}{m'}, \quad \frac{m_2}{m} \geqq g_2 \geqq \frac{m'_2}{m'}, \quad \ldots, \quad \frac{m_n}{m} \geqq g_n \geqq \frac{m'_n}{m'}.$$

According to (28) we have

$$\lim_{t=\infty} \frac{\theta'_1}{t} = M',$$

where M' has a signification analogous to that of M.

If the convergents (4) and (29) are taken accurate enough, θ will be situated between θ_1 and θ'_1 and hence

$$\lim \frac{\theta}{t} = \lim M = \lim M' = G.$$

Therefrom we draw the consequence that θ for all t can be expressed in the form

$$\theta = Gt \tag{30}$$

+ one between fixed limits oscillating function.

Also it follows immediately from the preceding *that G is confined between g_1 and g_n as limits.*

Herewith we have decided a question, about which, in its general form, hitherto uncertainty has prevailed.

Owing to the periodicity of the series in the right member of (27) we get

$$M = \frac{\theta_1(t + 2\pi ml) - \theta_1(t)}{2\pi ml} \tag{31}$$

where l denotes some positive or negative integer and $\theta_1(t)$ is identical with θ_1.

Assuming $n = 2$ in (1) we get

$$re^{i\theta} = A_1 e^{ig_1 t} + A_2 e^{ig_2 t},$$

and thus according as we admit the condition (24), (25) or (26) we immediately receive by passing to the limit in (24'), (25') or (26')

$$G = g_1, \quad G = g_2 \text{ or } G = \frac{g_1 + g_2}{2}. \tag{32}$$

When the modulus of one of the coefficients A, say A_q, is greater than the sum of the remaining A, it is easy to determine G.

Let ε denote a function, whose value is 0 for $r = q$ and $+1$ for $r = 1, 2, \ldots, q-1, q+1, \ldots, n$; then this condition can be written

$$|A_q| > \sum_{r=1}^{n} \varepsilon_r |A_r|. \tag{33}$$

We have

$$R \frac{1}{i} \frac{d}{dt} \log \sum_{r=1}^{n} A_r e^{i \frac{m_r}{m} t}$$

$$= R \frac{1}{i} \frac{d}{dt} \log \left\{ A_q e^{i \frac{m_g}{m} t} + \sum_{r=1}^{n} \varepsilon_r A_r e^{i \frac{m_r}{m} t} \right\}$$

$$= \frac{m_q}{m} + R \frac{1}{i} \frac{d}{dt} \log \left\{ 1 + \frac{e^{-i \frac{m_g}{m} t} \sum\limits_{r=1}^{n} \varepsilon_r A_r e^{i \frac{m_r}{m} t}}{A_q} \right\}. \tag{34}$$

But in consequence of the condition (33) is

$$\left| \frac{e^{-i \frac{m_q}{m} t} \sum\limits_{r=1}^{n} \varepsilon_r A_r e^{i \frac{m_r}{m} t}}{A_q} \right| 1 .$$

Consequently the logarithm in (34) can be developed in a convergent series in the manner that we get instead of (34)

$$\frac{m_q}{m} + R \frac{1}{i} \frac{1}{A_q} \frac{d}{dt} \left\{ e^{-i \frac{m_q}{m} t} \sum_{r=1}^{n} \varepsilon_r A_r e^{i \frac{m_r}{m} t} \right\}$$

$$- \tfrac{1}{2} R \frac{1}{i} \frac{1}{A_q^2} \frac{d}{dt} \left\{ e^{-i \frac{m_q}{m} t} \sum_{r=1}^{n} \varepsilon_r A_r e^{i \frac{m_r}{m} t} \right\}$$

$$+ \ldots,$$

where the series in the right member, dependent on the symbol R, after the differentiations are performed only contains terms involving dignities of $e^{\pm i \frac{t}{m}}$.

Hence according to the definition before given to M and by (18) and (19) it follows in the present case

$$M = \frac{m_q}{m} \tag{35}$$

and therefore by passing to the limit

$$G = g_q, \tag{36}$$

which is the result in (I″) before and in another manner given by LAGRANGE and LAPLACE.

From the value of M given in (21′) we see, that if the coefficients in the equation (10) are altered, while the exponents of z remain unchanged, then M only could be altered by means of an alteration of the difference, $l' - l''$, between the number of roots, whose modulæ are respectively less and greater than unity.

We assume, that all the roots, the roots with a modulus equal to unity included, in respect to the magnitude of their modulus can be divided in s groups, the number within each of these groups being assumed to be

$$\sigma_1, \ \sigma_2, \ \ldots, \ \sigma_s,$$

so that

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_s = \mu_1 . \tag{37}$$

The modulæ of the roots within the same groups we denote with

$$|\varrho_{\sigma_1}|, \ |\varrho_{\sigma_2}|, \ \ldots, \ |\varrho_{\sigma_s}|$$

and assume that they are subject to the conditions

$$|\varrho_{\sigma_1}| > |\varrho_{\sigma_2}| \cdots > |\varrho_{\sigma_s}| . \tag{38}$$

Now let a be an arbitrary complex quantity and let the coefficients in the right number of (6) be changed into

$$A_1 a^{m_1}, \ \ A_2 a^{m_2}, \ \ \ldots, \ A_n a^{m_n}, \tag{39′}$$

whereby thus the equation (10) is changed into

$$A_1 a^{\mu_1} u^{\mu_1} + A_2 a^{\mu_2} u^{\mu_2} + \ldots + A_n = 0 . \tag{39}$$

Accordingly this equation by (11) possesses the roots

$$\frac{e^{i\frac{\lambda_1}{m}}}{a}, \ \frac{e^{i\frac{\lambda_2}{m}}}{a}, \ \ldots, \ \frac{e^{i\frac{\lambda_{\mu_1}}{m}}}{a} . \tag{40}$$

If $|a|$ differs from unity, we see that none of these roots can have a modulus equal to unity. That is: the equation (39)

can not be satisfied by any root the modulus of which is unity.

From the unequalities (38) it follows corresponding to the roots (40) the unequalities

$$\left|\frac{\varrho_{\sigma_1}}{a}\right| > \left|\frac{\varrho_{\sigma_2}}{a}\right| \ldots > \left|\frac{\varrho_{\sigma_s}}{a}\right|. \tag{41}$$

Assuming

$$|a| = \left|\varrho_{\sigma_\lambda}\right|$$

these unequalities are transformed into

$$\left|\frac{\varrho_{\sigma_1}}{\varrho_{\sigma_\lambda}}\right| > \left|\frac{\varrho_{\sigma_2}}{\varrho_{\sigma_\lambda}}\right| \ldots > \left|\frac{\varrho_{\sigma_{\lambda-1}}}{\varrho_{\sigma_\lambda}}\right| > 1 > \left|\frac{\varrho_{\sigma_{\lambda+1}}}{\varrho_{\sigma_\lambda}}\right| \ldots > \left|\frac{\varrho_{\sigma_s}}{\varrho_{\sigma_\lambda}}\right|.$$

Thus we se that the number of roots in (40) possessing a modulus greater than unity is

$$l''\left(\varrho_{\sigma_\lambda}\right) = \sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_{\lambda-1}$$

and a modulus les than unity

$$l'\left(\varrho_{\sigma_\lambda}\right) = \mu_1 - (\varrho_1 + \varrho_2 + \ldots + \varrho_\lambda),$$

from which thus follows

$$l'\left(\varrho_{\sigma_\lambda}\right) - l''\left(\varrho_{\sigma_\lambda}\right)$$
$$= \mu_1 - 2\left(\varrho_1 + \varrho_2 + \ldots + \varrho_{\lambda-1}\right) - \varrho_{\sigma\lambda} \tag{42}$$

and

$$l'\left(\varrho_{\sigma_{\lambda+1}}\right) - l''\left(\varrho_{\sigma_{\lambda+1}}\right)$$
$$= \mu_1 - 2(\varrho_1 + \varrho_2 + \ldots + \varrho_\lambda) - \varrho_{\lambda+1}. \tag{42'}$$

If a has such a value that

$$\left|\varrho_{\sigma_\lambda}\right| > |a| > \left|\varrho_{\sigma_{\lambda+1}}\right|$$

the unequalities (41) immediately show that

$$l'(a) - l''(a)$$
$$= \mu_1 - 2(\varrho_1 + \varrho_2 + \ldots + \varrho_\lambda). \tag{43}$$

A mere glance upon the relations (42), (42') and (43) at once shows that

$$l'\left(\varrho_{\sigma_\lambda}\right) - l''\left(\varrho_{\sigma_\lambda}\right) > l'(a) - l''(a) > l'\left(\varrho_{\sigma_{\lambda+1}}\right) - l''\left(\varrho_{\sigma_{\lambda+1}}\right)$$

and hence from (21′) it follows that

$$M\left(\varrho_{\sigma_\lambda}\right) > M(a) > M\left(\varrho_{\sigma_{\lambda+1}}\right). \tag{44}$$

From (42) it follows that $M(a)$ increases discontinously in the same time as $|a|$ continously increases from

$$|a| < |\varrho_{\sigma_s}| \text{ to } |a| > |\varrho_{\sigma_1}|,$$

and for the rest, as a consequence from (37) and the preceeding, with limits for $M(a)$ of

$$M(0) = \frac{m_n}{m} \text{ and } M(\infty) = \frac{m_1}{m}.$$

Thus particularly is

$$M(a_1) \geqq M \geqq M(a_2), \tag{45}$$

when

$$|a_1| > 1 > |a_2|. \tag{45'}$$

It is therefore possible to obtain limits for M, when it succeeds to determine $M(a_1)$ and $M(a_2)$, for instance by (35).

Assuming

$$|\varrho_{\sigma_{\lambda-1}}| > |a| > |\varrho_{\sigma_\lambda}| > |a_2| > |\varrho_{\sigma_{\lambda+1}}|$$

the relation (43) gives

$$\frac{[l'(a_1) - l''(a_1)] + [l'(a_2) - l''(a_2)]}{2} = \mu_1 - 2(\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_{\lambda-1}) - \sigma_\lambda$$

and hence by (42)

$$l'(\varrho_{\sigma_\lambda}) - l''(\varrho_{\sigma_\lambda}) = \frac{[l'(a_1) - l''(a_2)] + [l'(a_2) - l''(a_2)]}{2}$$

and further from (21′)

$$M(\varrho_{\sigma_\lambda}) = \frac{M(a_1) + M(a_2)}{2}. \tag{46}$$

For the rest we see that the relation

$$M(a) = \frac{M(a_1) + M(a_2)}{2} \tag{47}$$

always holds good when

$$|a_1| > |a| > |a_2|, \tag{47'}$$

$|a|$ may by the modulus of a root or not, provided that $|a_1|$ and $|a_2|$ are situated sufficiently near to $|a|$.

For, if $|a|$ is not the modulus of a root, then as a consequence of (43)

$$M(a_1) = M(a_2) = M(a).$$

Particularly it follows from (47) and (47′)

$$M = \frac{M(a_1) + M(a_2)}{2} \tag{48}$$

with the condition

$$|a_1| > 1 > |a_2|, \tag{48'}$$

when $|a_1|$ and $|a_2|$ are situated sufficiently near to unity.

All the propositions we have deduced concerning $M(a)$ also hold for $G(a)$, as immediately follows by passing to the limit.

Thus assuming the condition (48′) it follows from (45)

$$G(a_1) \geq G \geq G(a_2) \tag{49}$$

and from (48)

$$G = \frac{G(a_1) + G(a_2)}{2}. \tag{49'}$$

Assume in (1) that the right member consists of two terms, and also that the condition

$$|A_1| = |A_2|$$

holds.

Because $g_1 > g_2$, we have then

$$\left|A_1 a_1^{g_1}\right| > \left|A_2 a_1^{g_2}\right|$$

and

$$\left|A_1 a_2^{g_2}\right| < \left|A_2 a_2^{2}\right|$$

and therefore from the first and second formula in (32)

$$G(a_1) = g_1 \text{ and } G(a_2) = g_2,$$

and hence by (49)

$$G = \frac{g_1 + g_2}{2}, \tag{50}$$

agreeing with the last result in (32).

If we have several polynomials such as

$$F(t) = \sum_{r=1}^{n} A_r e^{ig_r t},$$

$$F_1(t) = \sum_{r=1}^{n} A_{1,\,r} e^{ig_{1,\,r} t}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$F_s(t) = \sum_{r=1}^{n} A_{s,\,r} e^{ig_{s,\,r} t}$$

and the relation

$$F(t) = F_1(t) F_2(t) \ldots F_s(t)$$

holds, and M_1, M_2, $\ldots$, M_s have the same significations in respect to $F_1(t)$, $F_2(t)$, $\ldots$, $F_s(t)$ as M has relating to $F(t)$, then it follows immediately from the preceding that the relation

$$M = M_1 + M_2 + \ldots + M_s \tag{51}$$

also holds.

Now the results in (24′) and (25′) follow from (35) and the result in (26′) from (48) with the aid of the two former results. Thus upon the whole the propositions in (24′), (25′) and (26′) are derivable without the assistance of the formula (21).

From this reason it is possible to determine M in (21′) independent of (21).

Indeed, the M corresponding to the elementary factor

$$e^{i\frac{1}{m}t} - e^{i\frac{\lambda_r}{m}} = e^{i\frac{1}{m}t} - e^{i\frac{\lambda_r}{m}} e^{i\frac{0}{m}t}$$

in (12), according to (24′), (25′) and (26′), has the values $\frac{1}{m}$, 0, $\frac{1}{2m}$ according as $\left| e^{i\frac{\lambda_r}{m}} \right|$ is less, greater or equal to unity.

Also the M corresponding to the factor $e^{i \frac{m_n}{m} t}$ is $\frac{m_n}{m}$.

Then if l', l'' and l''' denote the number of roots, whose modulæ are respectively less, greater and equal to unity, we get in consequence of (51)

$$\begin{aligned} M & \\ &= \frac{m_n}{m} + l' \cdot \frac{1}{m} + l'' \cdot 0 + l''' \cdot \frac{1}{2m} \\ &= \frac{2m_n + 2l' + l''}{2m} \\ &= \frac{m_1 + m_n + l' - l''}{2m}, \end{aligned}$$

because

$$l' + l'' + l''' = m_1 - m_n.$$

We will now give general formulas for the calculation of $M(a)$.

Changing the coefficients A into the coefficients (39′) the roots (11) of the equation (10) are changed into the roots (40) of the equation (39).

In stead of (21) we then obtain according to (18) and (19)

$$\left.\begin{aligned} & R\varphi\left(ae^{i\frac{t}{m}}\right) \\ = M(a) + \frac{1}{m} R \Sigma^{a'} \sum_{n=1}^{\infty} a^{-n} e^{ni\frac{\lambda_r}{m}} e^{-ni\frac{t}{m}} & - \frac{1}{m} R \Sigma^{a'} \sum_{n=1}^{\infty} a^{n} e^{-ni\frac{\lambda_r}{m}} e^{ni\frac{t}{m}}, \end{aligned}\right\} \quad (52)$$

where the symbols of summation, $\Sigma^{a'}$ and $\Sigma^{a''}$, operate on those terms respectively in which $\left|e^{i\frac{\lambda_r}{m}}\right|$ is less or greater than unity.

In this equation we put successively $a\sigma_1, a\sigma_2, \ldots, a\sigma_k$ in steed of a, where $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$ are the k roots of unity, and add all the equations thus formed.

Owing to the properties of symmetrical functions of roots of unity, and because

$$M(a\sigma_1) = M(a\sigma_2) = \ldots = M(a\sigma_k) = M(a),$$

we thus obtain

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{k}R\sum_{l=1}^{k}\varphi\left(a\sigma_l e^{i\frac{t}{m}}\right)\\ &= M(a)+\frac{1}{m}R\Sigma^{a'}\sum_{n=1}^{\infty}a^{-nk}e^{nki\frac{\lambda_r}{m}}e^{-nki\frac{t}{m}}\\ &-\frac{1}{m}R\Sigma^{a''}\sum_{n=1}^{\infty}a^{nk}e^{-nki\frac{\lambda_r}{m}}e^{nki\frac{t}{m}}\end{aligned}\right\} \quad (53)$$

and hence

$$M(a)=\lim_{k=\infty}\cdot\frac{1}{k}R\sum_{l=1}^{k}\varphi\left(a\sigma_l e^{i\frac{t}{m}}\right) \quad (54)$$

or

$$M(a)=\int_0^1 R\varphi\left(ae^{2\pi ix}e^{\frac{t}{m}}\right)dx\,. \quad (55)$$

As a convergent to $M(a)$ and therefore to $G(a)$ we may legitimately assume

$$\frac{1}{k}R\sum_{l=1}^{k}\varphi\left(a\sigma_l e^{i\frac{t}{m}}\right), \quad (56)$$

or, as this expression for $k=\infty$ must be independent of t, with greater simplicity

$$\frac{1}{k}R\sum_{l=1}^{k}\varphi(a\sigma_l)\,. \quad (57)$$

The convergent in (56) can with omission of the factor $\frac{1}{k}$ be written

$$R\frac{1}{i}\frac{d}{dt}\log\prod_{l=1}^{k}\sum_{r=1}^{n}A_r a^{m_r}\sigma_l^{m_r}e^{i\frac{m_r}{m}t}\,.$$

The product

$$\prod_{l=1}^{k}\sum_{r=1}^{n}A_r a^{m_r}\sigma_l^{m_r}e^{i\frac{m_r}{m}t}$$

entering in the last expression is a polynomial of the degree μ_1 with respect to $(az)^k$, where $z=e^{i\frac{t}{m}}$.

In fact, by (12)

$$\sum_{r=1}^{n} A_r a^{m_r} e^{i\frac{m_r}{m}t}$$

$$= A_1 a^{\mu_1} e^{i\frac{m_n}{m}t} \prod_{r=1}^{\mu_1} \left(e^{i\frac{t}{m}} \quad e^{i\frac{\lambda_r}{m}} \right)$$

and hence

$$\prod_{l=1}^{k} \sum_{r=1}^{n} A_r a^{m_r} \sigma_l^{m_r} e^{i\frac{m_r}{m}t}$$

$$= A_1^k a^{k\mu_1} \prod_{r=1}^{k} \left\{ e^{i\frac{kt}{m}} - \frac{e^{i\frac{k\lambda_r}{m}}}{a^k} \right\}$$

$$= A_1^k \prod_{r=1}^{k} \left(\overline{az^k} - e^{i\frac{k\lambda_r}{m}} \right),$$

a polynomial of the degree μ_1 in respect to $\overline{az^k}$.

The coefficients in the polynomial

$$\prod_{r=1}^{\mu_1} \left(\overline{az^k} - e^{i\frac{k\lambda_r}{m}} \right)$$

can by the aid of the formulas of NEWTON be expressed in function of the sum of powers of the roots of the original equation (10) and the latter in their order by means of the formula of WARING directly in function of the coefficients of the same equation.

In this manner we obtain according to (56) a convergent to $M(a)$, in which after the operations are performed we may put $t = 0$, the more accurate the greater k is.

Next we will deduce a relation between $M(a)$ and known functions.

To this purpose we commence by deducing some general propositions.

Asume

$$F(y) = \sum_{s=1}^{\infty} f(sy), \tag{58}$$

where the series is supposed to be absolutely convergent for $y \geq 1$. A first condition for convergence is of course $f(\infty) = 0$.

If d_s denotes the number of divisors in the integer s, the number itself and unity being reckoned amongst them, we immediately find from (58)

$$\sum_{s=1}^{\infty} F(sy) = \sum_{s=1}^{\infty} d_s f(sy). \tag{59}$$

Thus the series

$$\sum_{s=1}^{\infty} s f(sy)$$

converges absolutely, because the series in (58) does so, and as $d_s \leq s$ the series

$$\sum_{s=1}^{\infty} d_s f(sy)$$

and therefore also by (59) the series

$$\sum_{s=1}^{\infty} F(sy) \tag{60}$$

is absolutely convergent.

Now let $\mu(s)$ denote MÖBIUS' coefficient corresponding to the integer s, so that $\mu(s)$ has the value $+1$ for $s = 1$ and the value $(-1)^k$, when $s = q_1 q_2 \ldots q_k$, $q_1, q_2, \ldots, q_k$ being unequal prime numbers and the value 0 in all other cases, which amounts to assume that s contains a quadratic factor.

Converting both members of (58) we thus obtain

$$\sum_{s=1}^{\infty} \mu(s) F(sy) = f(y), \tag{61}$$

where the series converges absolutely and more rapid than the series (60).

Let us now assume

$$\left.\begin{aligned} &F(y) \\ &= R\Sigma^{a'} \sum_{n=1}^{\infty} a^{-sy} e^{syi\frac{\lambda_r}{m}} e^{-syi\frac{t}{m}} - R\Sigma^{a''} \sum_{n=1}^{\infty} a^{sy} e^{-syi\frac{\lambda_r}{m}} e^{syi\frac{t}{m}}, \end{aligned}\right\} \tag{62}$$

where $y \geqq 1$, and where, when y is not a whole number, to avoid ambiguousity the principal value is supposed to be taken.

The series in the right member of (62) converges absolutely, and swifter than the series in the right member of (53) when $y > 1$.

The series in (62) is of the same form as the series in (58) and thus by converting both members of the former in accordance with (61) we arrive at the result

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{s=1}^{\infty} \mu(s) F(s) \\ &= R\Sigma^{a'} a^{-1} e^{i\frac{\lambda_r}{m}} e^{-i\frac{t}{m}} - R\Sigma^{a''} a e^{-i\frac{\lambda_r}{m}} e^{i\frac{t}{m}}, \end{aligned}\right\} \quad (63)$$

after having put $y = 1$.

But the value of $F(s)$ is found according to (53) and (62) to be

$$m\left\{\frac{1}{s} R \sum_{l=1}^{s} \varphi\left(a\sigma_l e^{i\frac{t}{m}}\right) - M(a)\right\}, \quad (63')$$

and hence by (63)

$$m \sum_{s=1}^{\infty} \mu(s)\left\{\frac{1}{s} R \sum_{l=1}^{s} \varphi\left(a\sigma_l e^{i\frac{t}{m}}\right) - M(a)\right\}$$
$$= R\Sigma^{a'} a^{-1} e^{i\frac{\lambda_r}{m}} e^{-i\frac{t}{m}} - R\Sigma^{a''} a e^{i\frac{\lambda_r}{m}} e^{i\frac{t}{m}}.$$

If in this equation we put $-t$ in stead of t and so add the two equations, then $\cos\frac{t}{m}$ will be a factor in the second member, which thus disappears when $t = \frac{m\pi}{2}$.

In this manner we arrive at the relation

$$\sum_{s=1}^{\infty} \mu(s)\left\{\frac{1}{s} R \sum_{l=2}^{s} [\varphi(a\sigma_l i) + \varphi(-a\sigma_l i)] - 2M(a)\right\} = 0.$$

We can not solve this equation in respect to $M(a)$; the convergency of the series should be destroyed if we endeavoured to separate $M(a)$ from the connection in which it is situated.

Nevertheless the relation may claim some interest, because of its simplicity and perhaps the alone existing of this kind. For the rest this relation may be of use as a formula of control for a calculated $M(a)$.

Hitherto we have assumed the constants (3) positive and as a consequence thereof their convergents (4).

We now assume that these constants are capable of positive as well as negative values, and also that the unequalities (2) yet subsist.

Multiplying both members of (1) by e^{iht} we get

$$re^{i(\theta+h)} = \sum_{r=1}^{n} A_r e^{i(h+g_r)} . \tag{64}$$

Now we assume this h to be positive and sufficiently great in order to ensure that all the $(h + y_r)$ are positive. Thus the preceding theories become applicable to the equation (64).

If we call G_h the G corresponding to the right member of (64), this can be determined according to (21'), and the generalized G becomes

$$G = G_h - h .$$

When M is known it is easy to determine θ_r.

The equation (1) can be written in the form

$$r_1(t)e^{i\theta_1(t)} = R\sum_{r=1}^{n} A_r e^{i\frac{m_r}{m}t} + iR\frac{1}{i}\sum_{r=1}^{n} A_r e^{i\frac{m_r}{m}t} \tag{65'}$$

and hence

$$\theta_1(t) = \operatorname{arctg} \frac{R\frac{1}{i}\sum_{r=1}^{n} A_r e^{i\frac{m_r}{m}t}}{R\sum_{r=1}^{n} A_r e^{i\frac{m_r}{m}t}} + \pi k(t) , \tag{65}$$

where $k(t)$ is some positive or negative integer or zero, depending on t.

The first term in the right member of (65) has the period $2\pi m$, and thus it follows

$$\theta_1(t + 2ml\pi) - \theta_1(t) = \pi \{k(t + 2ml\pi) - k(t)\},$$

where l is some positive or negative integer or zero.

In the same manner we get from (27), because the series in the right member after the term Mt has the period $2\pi m$,

$$\theta_1(t + 2ml\pi) - \theta_1(t) = 2ml\pi M$$

and thus by comparison with the last relation

$$k(t + 2ml\pi) - k(t) = 2mlM$$

or particularly

$$k(2ml\pi) - k(0) = 2mlM.$$

Here $k(0)$ in so far is arbitrary, as it can signify a positive or negative integer whichsoever or zero. Amongst these innumberable determinations we select

$$k(0) = 0,$$

from which by (64) follows

$$\theta_1(0) = \operatorname{arctg} \frac{\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{i} A_r}{\sum_{r=1}^{n} A_r}$$

and

$$k(2ml\pi) = 2mlM, \tag{66}$$

where $k(2ml\pi)$ has the same sign as lM.

Assuming t positive and

$$2m(l + 1)\pi > t \geqq 2ml\pi$$

$$l = E\frac{t}{2m\pi}$$

and thus by (66)

$$k(t) = 2mE\frac{t}{2m\pi} \cdot M.$$

If t had been negative we should have obtained

$$k(t) = -2mE\frac{-t}{2m\pi} \cdot M.$$

If ι denotes the positive or negative unity these both relations can be combined into the one

$$k(t) = 2m\tau E\frac{\tau t}{2m\pi}\cdot M.$$

Hence we finally obtain by means of (65)

$$\theta_1(t) = \text{arctg}\frac{R\frac{1}{i}\sum_{r=1}^{n} A_r e^{i\frac{m_r}{m}t}}{R\sum_{r=1}^{n} A_r e^{i\frac{m_r}{m}t}} + 2m\pi\tau E\frac{\tau t}{2m\pi}\cdot M. \qquad (67)$$

From the formula (67) innumberable relations can be derived by using properties of the E-function.

From (1) we get

$$[r(t)]^2 = \left[R\sum_{r=1}^{n} A_r e^{ig_r t}\right]^2 + \left[R\frac{1}{i}\sum_{r=1}^{n} A_r e^{ig_r t}\right]^2.$$

The important question to determine the maxima and minima of the function $r(t)$ we do not treat here.

MEDDELANDEN

FRÅN

LUNDS ASTRONOMISKA OBSERVATORIUM

N:o 20.

ÜBER DIE SECULAREN PERIHELSTÖRUNGEN DER KLEINEN PLANETEN

VON

GUSTAF NORÉN

LUND 1904
BUCHDRUCKEREI HÅKAN OHLSSON

Wir betrachten die Bewegung eines massenlosen Körpers (m) der von zwei Massen m_1 und m_2 attrahirt wird. Wir machen über die Bewegung der drei Körper und über die Einheiten der Zeit, der Massen und der Abstände die folgenden Voraussetzungen:

1) die drei Körper bewegen sich in derselben Ebene.

2) m_2 bewegt sich in einem Kreis im Verhältniss zu m_1. Der Abstand $m_1 m_2$ wird $= 1$ angenommen.

3) Die Attraktionskonstante k^2 und die mittlere Bewegung von m werden auch gleich Eins angenommen, woraus $m_1 + m_2 = 1$ folgt.

Wir bekommen dann für m die folgenden Bewegungsgleichungen:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y}; \tag{1}$$

$$\text{wo } U = \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} - m_2 x \cos t - m_2 y \sin t$$

und x, y die Koordinaten von m in Verhältniss zu m_1 bezeichnen, wonebst r_1, r_2 die Abstände mm_1 und mm_2 bezeichnen.

Wir wollen das Gleichungssystem (1) mit einem kanonischen System ersetzen.

Zu dem Zwecke setzen wir

$$q_1 = x; \quad q_2 = y; \quad p_1 = \frac{dq_1}{dt}; \quad p_2 = \frac{dq_2}{dt};$$

und

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) - \frac{m_1}{r_1} - \frac{m_2}{r_2} + m_2 q_1 \cos t + m_2 q_2 \sin t$$

und bekommen dann

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i};\ \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}\ (i = 1, 2). \tag{2}$$

Dieses System wollen wir jetzt nach der Methode der Variation der Konstanten integriren.

Wir setzen darum

$$H = H' + H'',$$

$$H' = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) - \frac{1}{r_1},$$

$$H'' = \frac{\mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2} + \mu(q_1 \cos t + q_2 \sin t),$$

wo wir $m_2 = \mu$, also $m_1 = 1 - \mu$, gesetzt haben.

Die Integration dieser Gleichungen

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H'}{\partial p_i};\ \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H'}{\partial q_i}$$

durch die HAMILTON-JACOBI'sche Differential-Gleichung liefert bekanntlich das folgende System von kanonischen Integrationskonstanten

$$h_1 = -\frac{1}{2a};\ h_2 = \sqrt{a(1-e^2)};$$

$$\gamma_1 = -t_\pi;\ \gamma_2 = \Pi - \Omega,$$

wonebst für die mittlere Bewegung n des kleinen Planeten (m):

$$n = \frac{1}{a^{3/2}}.$$

erhalten wird. Die Grössen a, e, Π, Ω bedeuten hier die gewöhnlichen elliptischen Elemente; t_π ist die Zeit des Periheldurchgangs. Für die Variation dieser Konstanten bekommen wir dann die Differential-Gleichungen:

$$\frac{d\gamma_i}{dt} = \frac{\partial H''}{\partial h_i};\ \frac{dh_i}{dt} = -\frac{\partial H''}{\partial \gamma_i}.$$

Die Elemente h_i und γ_i sind aber für unsere Zwecke nicht geeignet und wir werden sie darum gegen andere vertauschen.

Wir setzen darum zuerst:

$$L = \sqrt{a}; \; l = n(t + \gamma_1);$$
$$G = \sqrt{a(1-e^2)} = h_2; \; g = \Pi - \Omega = \gamma_2;$$
$$R = \frac{1}{2L^2} - H''$$

und bekommen dann für diese neuen Veränderlichen das kanonische System

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial R}{\partial l}; \; \frac{dl}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial L};$$
$$\frac{dG}{dt} = \frac{\partial R}{\partial g}; \; \frac{dg}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial G}.$$

Es liegt aber noch der Uebelstand vor, dass die charakteristische Funktion R nicht nur von den Elementen sondern auch von der Zeit explicite abhängt. Um von diesem los zu werden machen wir dann endlich die Substitutionen:

$$x_1 = L = \sqrt{a}; \qquad y_1 = l = n(t + \gamma_1);$$
$$x_2 = G = \sqrt{a(1-e^2)}; \; y_2 = g - t = \Pi - \Omega - t;$$
$$F = R + x_2$$

und bekommen dann

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_i}; \; \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_i}.$$

Um die *secularen* Störungen zu ermitteln haben wir dann den secularen Theil von F aufzusuchen.

Wir setzen

$$F = F_0 + F_1,$$
$$F_0 = \frac{1}{2x_1^2} + x_2,$$
$$F_1 = -\frac{\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} - \mu(q_1 \cos t + q_2 \sin t).$$

Wir finden dann zuerst, dass, wenn wir den sekularen Teil mit einem Klammer bezeichnen,

$$[F_0] = \frac{1}{2x_1^2} + x_2,$$

$$\left[\frac{\mu}{r_1}\right] = \frac{\mu}{x_1^2}.$$

$q_1 \cos t + q_2 \sin t$ enthält kein seculares Glied.

Wir kommen dann schliesslich zu dem secularen Theil von $\frac{\mu}{r_2}$.

Es lässt sich leicht beweisen, dass $\frac{1}{r_2}$ eine gerade periodische Funktion von y_1 und y_2 ist, so dass $\frac{\mu}{r_2}$ sich in eine FOURIER'sche Reihe von der Form

$$\frac{\mu}{r_2} = \Sigma\, A_{ij} \cos(i\, y_1 + j\, y_2)$$

entwickeln lässt, wobei die Koefficienten A_{ij} Funktionen von x_1 und x_2 sind. Hiernach folgt, nach dem Theorem von FOURIER, dass

$$\left[\frac{\mu}{r_2}\right] = A_{00} = \frac{\mu}{\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{dy_1\, dy_2}{r_2}.$$

Wir haben nun zur Bestimnung der secularen Störungen:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial [F]}{\partial y_i};\ \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial [F]}{dx_i}.$$

Weil $[F]$ weder y_1 noch y_2 enthält, so ist demnach

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{dx_2}{dt} = 0$$

d. h. die mittlere Entfernung a und die Excentricität e erleiden keine secularen Störungen. Für y_1 und y_2 lauten die Gleichungen:

$$\frac{dy_1}{dt} = -\frac{\partial [F]}{\partial x_1} = \frac{1}{x_1^3} - \frac{\partial [F_1]}{\partial x_1}$$

$$\frac{dy_2}{dt} = -\frac{\partial [F]}{\partial x_2} = -1 - \frac{\partial [F_1]}{\partial x_2}$$

Die letzte Gleichung giebt uns die Perihelstörungen. Es ist nämlich

$$y_2 = \Pi - t,$$

Also
$$\frac{dy_2}{dt} = \frac{d\Pi}{dt} - 1,$$

wonach

$$\frac{d\Pi}{dt} = -\frac{\partial [F_1]}{\partial x_2} = -\frac{\partial I}{\partial x_2},$$

wenn

$$I = \frac{\mu}{\pi^2}\int_0^\pi\int_0^\pi \frac{dy_1\, dy_2}{r_2},$$

Wir wollen dieses Integral etwas transformiren. Wir haben für r_2 den Ausdruck

$$r_2 = \sqrt{1 + r^2 - 2\, r \cos (v + y_2)},$$

wo v die wahre Anomalie bezeichnet und r statt r_1 geschrieben ist.

Tauschen wir darum y_1 gegen v aus, so bekommen wir

$$I = \frac{\mu}{\pi^2 x_1{}^3 x_2}\int_0^\pi\int_0^\pi \frac{r^2\, dv\, dy_2}{r_2},$$

Die Substitution $u = v + y_2$ giebt weiter

$$I = \frac{\mu}{\pi^2 x_1{}^3 x_2}\int_0^\pi\int_0^\pi \frac{r^2\, dv\, du}{\sqrt{1 + r^2 - 2\, r \cos u}}$$

und darauf die Substitution von LANDEN:

$$I = \frac{\mu}{\pi^2 x_1{}^3 x_2}\int_0^\pi\int_0^\pi \frac{r^2\, dv\, dz}{\sqrt{1 - r^2 \sin^2 z}}.$$

Schliesslich führen wir statt der wahren Anomalie v die excentrische Anomalie w ein und erhalten dann

$$I = \frac{\mu}{\pi^2 x_1{}^2}\int_0^\pi r dw \int_0^\pi \frac{dz}{\sqrt{1 - r^2 \sin^2 z}}.$$

Die obige Entwickelung hat Herr Prof. CHARLIER in seinen Vorlesungen über die Mechanik des Himmels gegeben und es wird jetzt die Aufgabe der folgenden Untersuchung, Methoden für die numerische Berechnung von $\frac{d\Pi}{dt}$ anzugeben.

Ich will mich dabei einer bekannten Formel für mechanische Quadratur bedienen, nähmlich

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(\varphi)\,d\varphi = \frac{1}{n}\sum_1^n f(\varphi_i), \text{ wo } \varphi_i = \frac{2\pi i}{n}.$$

Nach dieser Formel bekommen wir also

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{dz}{\sqrt{1 - r^2 \sin^2 z}} = \frac{1}{n}\sum_1^n \frac{1}{\sqrt{1 - r^2 \sin^2 z_i}}\,;\quad z_i = \frac{2\pi i}{n}$$

und demnach

$$I = \frac{\mu}{na\pi}\sum_1^n \int_0^\pi \frac{r dw}{\sqrt{1 - r^2 \sin^2 z_i}}$$

$$= \frac{\mu}{na\pi}\sum_1^n R_i,$$

woraus folgt

$$\frac{d\Pi}{dt} = -\frac{\partial I}{\partial x_2} = -\frac{\mu}{na\pi}\cdot\frac{\partial e}{\partial x_2}\cdot\sum_1^n \frac{\partial R_i}{\partial e}.$$

Es ist aber

$$x_1 = \sqrt{a},\; x_2 = \sqrt{a(1 - e^2)}$$

und dann

$$e^2 = 1 - \frac{x_2^2}{a};\; \frac{\partial e}{\partial x_2} = -\frac{x_2}{ae} = -\frac{\sqrt{1 - e^2}}{\sqrt{a}\,.\,e} = -\frac{\cot\varphi}{\sqrt{a}}$$

wo $e = \sin\varphi$.

Wenn wir weiter

$$\frac{r}{\sqrt{1 - r^2 \sin^2 z_i}} = f_i(r)$$

setzen, so ist

$$\frac{\partial R_i}{\partial e} = \int_0^\pi \frac{\partial f_i}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial e} dw.$$

Es ist aber

$$\frac{\partial f_i}{\partial r} = \frac{1}{(1-r^2 \sin^2 z_i)^{3/2}}; \; \frac{\partial r}{\partial e} = -a \cos w,$$

also

$$\frac{\partial R_i}{\partial e} = -a \int_0^\pi \frac{\cos w \, dw}{(1-r^2 \sin^2 z_i)^{3/2}}$$

und dann endlich

$$\frac{d\Pi}{dt} = -\frac{\mu \cot \varphi}{n\sqrt{a} \, . \, \pi} \sum_{i=1}^{n} \int_0^\pi \frac{\cos w \, dw}{(1-r^2 \sin^2 z_i)^{3/2}}.$$

Die zweite Integration können wir entweder mit Anwendung mechanischer Quadratur oder rein analytisch durchführen.

Im ersteren Falle erhalten wir dann

$$\frac{d\Pi}{dt} = -\frac{\mu \cot \varphi}{m\, n\sqrt{a} \, . \, \pi} \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \frac{\cos w_j}{(1-r_j^2 \sin^2 z_i)^{3/2}},$$

$$\text{wo} \quad w_j = \frac{2\pi j}{m}; \; r_j = a\,(1 - e \cos w_j)$$

ist.

Diese Methode zeigt doch aus praktischem Gesichtspunkte den Uebelstand, dass die Anzahl der zu berechnenden Glieder proportional dem Quadrat der Zahl der Theile, in welche der Kreis bei der Integration getheilt wird, wächst. Es ist aber zu bemerken, dass man sowohl bei diesem Integrationsverfahren als bei dem Mechanisch-analytischen mehrere Glieder zum Zusammenfallen bringen kann dadurch, dass man für die Zahlen m und n stets gerade Zahlen wählt. Ich habe darum nach dieser Methode nur den Werth für den Fall $a = 0{,}5$ $e = 0{,}1$, gerechnet, um zu bestimmen, in wie viele Theile der Kreis getheilt werden muss, gerechnet.

Ich bekam dabei

$$\text{für } m = n = 8: \frac{d\Pi}{dt} = -47''.7942,$$

$$» \quad m = n = 16: \frac{d\Pi}{dt} = -47''.6664,$$

$$» \quad m = n = 32: \frac{d\Pi}{dt} = -47''.6664,$$

woraus man ersieht, dass es völlig hinreichend ist, den Kreis in 16 Theile zu theilen.

Aus den angeführten Gründen habe ich es vorgezogen, die zweite Integration analytisch auszuführen.

Wir werden es dann mit Integralen von der Form

$$S_i = \int_0^\pi \frac{\cos w\, dw}{(1 - r_i^2 \sin^2 z_i)^{3/2}} = \int_0^\pi \frac{\cos w\, dw}{(1 - \gamma_i^2 (1 - e \cos w)^2)^{3/2}}$$

wo $\gamma_i = a \sin z_i$, zu thun haben.

Gesetzt

$$x = \cos w$$

wird

$$S = \int_{-1}^{+1} \frac{x\, dx}{[1 - \gamma^2 (1 - ex)^2] \sqrt{(1 - x^2)(1 - \gamma^2 (1 - ex)^2)}}.$$

Ich werde dies Integral durch die bekannte RIEMANN-sche Substitution transformieren.

Setze ich

$$\gamma^2 e^2 F(x) = (1 - x^2)(1 - \gamma^2 (1 - ex)^2),$$

und bezeichne ich mit a_i die Wurzeln zu $F(x) = 0$, so sind

$$a_1 = \frac{\gamma - 1}{\gamma e}, \quad a_2 = -1, \quad a_3 = +1, \quad a_4 = \frac{\gamma + 1}{\gamma e},$$

und es wird

$$S = \frac{1}{\gamma^3 e^3} \int_{-1}^{+1} \frac{x\, dx}{(x - a_1)(a_4 - x) \sqrt{F(x)}}.$$

Man ersieht sogleich dass $a_4 > a_3 > a_2$.

Was a_1 betrifft, so müssen wir die Bedingung dafür untersuchen, dass $a_1 < a_2$ ist.

Diese Bedingung kann ja auch folgendermassen formulirt werden

$$|a_1| = \frac{1-\gamma}{\gamma e} > 1,$$

was mit

$$\gamma(1+e) < 1$$

gleichbedeutend ist.

Diese Ungleichkeit ist ja immer erfüllt, wenn

$$a(1+e) < 1,$$

d. h. wenn der Aphelabstand des kleinen Planeten kleiner wie die mittlere Entfernung von Jupiter ist, was wir hier annehmen wollen.

Wir haben also

$$a_4 > a_3 > a_2 > a_1.$$

Für diesen Fall lautet die RIEMANN'sche Substitution:

$$y = \frac{x-a_2}{x-a_1} \cdot \frac{a_3-a_1}{a_3-a_2} = \frac{x+1}{x-a_1} \cdot \frac{1-a_1}{2},$$

oder

$$x = \frac{a_2 - a_1 my}{1 - my} = -\frac{1 + a_1 my}{1 - my},$$

wo

$$m = \frac{a_3-a_2}{a_3-a_1} = \frac{2}{1-a_1}$$

ist.

Nach dieser Substitution wird das Integral

$$S = \frac{1}{\gamma^3 e^3} \cdot \frac{1}{\sqrt{B}} \cdot \frac{1}{(1+a_1)(1+a_4)} \int_0^1 \frac{(1+a_1 my)(1-my)\,dy}{\sqrt{y(1-y)}\,(1-k^2 y)^{3/2}},$$

wo $B = (a_3 - a_1)(a_4 - a_2) = (1 - a_1)(1 + a_4)$;

$$k^2 = \frac{a_4-a_1}{a_4-a_2} \cdot \frac{a_3-a_2}{a_3-a_1} = \frac{a_4-a_1}{1+a_4} \cdot \frac{2}{1-a_1}$$

ist.

Setzen wir jetzt

$$S_1 = \int_0^1 \frac{(1 + a_1 my)(1 - my)\, dy}{\sqrt{y(1-y)}\,(1 - k^2 y)^{3/2}}$$

und substituieren in S_1

$$y = \sin^2 \lambda,$$

so wird

$$S_1 = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{(1 + a_1 m \sin^2 \lambda)(1 - m \sin^2 \lambda)\, d\lambda}{(1 - k^2 \sin^2 \lambda)^{3/2}},$$

und nach einigen Reduktionen

$$S_1 = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{[(1 + \tfrac{1}{2} a_1 m^2) \cos 2\lambda - \tfrac{1}{8} a_1 m^2 \cos 4\lambda - {}^3/_8\, a_1 m^2]\, d\lambda}{(1 - k^2 \sin^2 \lambda)^{3/2}}.$$

Setzen wir weiter

$$k^2 = \frac{4\alpha}{(1 + \alpha)^2},$$

so erhalten wir:

$$S_1 = 2(1 + \alpha)^3 \int_0^{\pi/2} \frac{[(1 + \tfrac{1}{2} a_1 m^2) \cos 2\lambda - \tfrac{1}{8} a_1 m^2 \cos 4\lambda - \tfrac{3}{8} a_1 m^2]\, d\lambda}{(1 + \alpha^2 + 2\alpha \cos 2\lambda)^{3/2}}.$$

Wir machen jetzt die Substitution

$$\psi = 180^0 - 2\lambda$$

und erhalten somit

$$S_1 = (1 + \alpha)^3 \Big\{ -(1 + \tfrac{1}{2} a_1 m^2) \int_0^{\pi} \frac{\cos \psi\, d\psi}{(1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos \psi)^{3/2}} -$$

$$- \tfrac{1}{8} a_1 m^2 \int_0^{\pi} \frac{\cos 2\psi\, d\psi}{(1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos \psi)^{3/2}} - \tfrac{3}{8} a_1 m^2 \int_0^{\pi} \frac{d\psi}{(1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos \psi)^{3/2}} \Big\}.$$

Wir wollen jetzt sogenannte LAPLACE'sche Koefficienten einführen.

Diese Koefficienten sind bekanntlich folgenderweise definirt

$$(1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos \lambda)^{-s} = \tfrac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} L_i^{(s)} \cos i\lambda$$

und also nach dem Theorem von FOURIER

$$L_i^{(s)} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos i\lambda \, d\lambda}{(1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos \lambda)^s}.$$

Durch Einführung dieser Koefficienten bekommen wir für S_1 den folgenden Ausdruck

$$S_1 = \frac{\pi}{2} (1 + \alpha)^3 \left\{ -(1 + \tfrac{1}{2} a_1 m^2) L_1^{(3/2)} - \tfrac{1}{8} a_1 m^2 L_2^{(3/2)} - {}^3/_8\, a_1 m^2 L_0^{(3/2)} \right\}$$

Dieser Ausdruck lässt sich aber bedeutend vereinfachen. Es gilt nämlich für die Koefficienten von LAPLACE die folgende Rekursionsformel

$$L_i^{(s)} = \frac{i-1}{i-s} \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right) L_{i-1}^{(s)} - \frac{i + s - 2}{i - s} L_{i-2}^{(s)}$$

und also für $s = {}^3/_2$, $i = 2$:

$$L_2^{(3/2)} = 2 \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right) L_1^{(3/2)} - 3\, L_0^{3/2}.$$

Damit geht der obige Ausdruck in den folgenden über

$$S_1 = \frac{\pi}{2} (1 + \alpha)^3 \left\{ - \left(1 + \frac{a_1 m^2}{2} \right) - \tfrac{1}{4} a_1 m^2 \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right) \right\} L_1^{(3/2)}.$$

Um diesen Ausdruck für numerische Rechnung geeigneter zu machen will ich einige Hülfswinkel einführen.

Setzen wir, wie gewöhnlich

$$k = \sin \theta,$$

so wird

$$\alpha = tg^2 \tfrac{1}{2} \theta.$$

Setzen wir weiter

$$| a_1 | = \frac{1-\gamma}{\gamma e} = tg^2 \tfrac{1}{2} \psi,$$

so wird

$$a_1 m^2 = - \frac{4 \,| a_1 |}{(1 + | a_1 |)^2} = - \sin^2 \psi,$$

$$m = \frac{2}{1 + | a_1 |} = 2 \cos^2 \tfrac{1}{2} \psi.$$

Es wird dann. nach einigen Reduktionen

$$S_1 = -\frac{\pi}{2}\sec^6 \tfrac{1}{2}\theta \frac{\sin(\theta+\psi)\sin(\theta-\psi)}{\sin^2\theta}.$$

Führen wir dieselben Hülfswinkel in den Ausdruck für S ein, so bekommen wir endlich

$$S = \frac{\pi}{16}\cdot\frac{1}{(\gamma e)^{3/2}}\cdot\frac{\sin\theta\sin(\theta+\psi)\sin(\theta-\psi)}{\cos\psi\cos^6\frac{1}{2}\theta}\cdot L_1^{(3/2)}.$$

Die Koefficienten $L_1^{(3/2)}$ sind bekanntlich von RUNKLE [1]) tabulirt bis $\alpha = 0.75$, was $\theta = 81^0.8$ entspricht.

RUNKLE tabulirt aber nicht $L_1^{(3/2)}$ direkt, sondern

$$\frac{\alpha^3}{\beta^4}L_1^{(3/2)},\ \text{wo}\ \beta = \frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}\ \text{ist}$$

oder mit unseren Substitutionen

$$\frac{4\,L_1^{(3/2)}}{\cos^4\frac{1}{2}\theta\, tg^2\theta}.$$

Bezeichnen wir darum RUNKLE's Tafelwerth mit P so ist

$$S = \frac{\pi}{32}\cdot\frac{1}{(\gamma e)^{3/2}}\cdot\frac{\sin(\theta+\psi)\sin(\theta-\psi)}{\cos\psi}\, tg\, {}^1/_2\,\theta\, tg^2\theta\,.\,P.$$

Für $\alpha = 0.75$—0.83 (*d. h.* bis $\theta = 84^0.8$) kann man die $L_{(1)}^{(3/2)}$ den von mir und RAAB berechneten Tafeln [2]) entnehmen, die

$$P_1(\alpha) = \frac{\sqrt{\alpha}}{4}L_1^{(3/2)} = \tfrac{1}{4}\, tg\,\tfrac{1}{2}\theta\, L_1^{(3/2)}$$

für α bis 0.83 enthalten.

In diesem Falle erhält man

$$S = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{(\gamma e)^{3/2}}\frac{\sin(\theta+\psi)\sin(\theta-\psi)}{\cos\psi\cos^4\frac{1}{2}\theta}\cdot P_1(\alpha).$$

Wenn θ aber grösser als $84^0.8$ ist, müssen wir uns von elliptischen Integralen bedienen. Zu dem Zwecke gehen wir

---

[1]) J. D. RUNKLE: New tables for determining the values of the coefficients in the perturbative function of the planetary motion (Smithsonian Contributions to knowledge Vol. IX).

[2]) GUSTAF NORÉN und SIGFRID RAAB: Hülfstafeln zur Berechnung der säkularen Störungen der kleinen Planeten. (Meddelanden från Lunds Observatorium N:o 2 Serie II, Tafel I b).

von dem durch die RIEMANN'sche Substitution und die Substitution $y = \sin^2 \lambda$ erhaltenen Anfangsausdruck für S_1 aus. Den da gegebenen Ausdruck für S_1 können wir auch folgendermassen schreiben

$$\tfrac{1}{2} S_1 = \int_0^{\pi/2} \frac{d\lambda}{\Delta^3} + \frac{a_1 m^2}{k^4} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \lambda \, d\lambda}{\Delta} - \left(2 + \frac{a_1 m^2}{k^2}\right) \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \lambda \, d\lambda}{\Delta^3}$$

wo $$\Delta = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \lambda}$$

Wir haben jetzt die Formeln

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\lambda}{\Delta^3} = \frac{E}{1 - k^2},$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \lambda \, d\lambda}{\Delta^3} = \frac{E - (1 - k^2) F}{k^2 (1 - k^2)},$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \lambda \, d\lambda}{\Delta} = \frac{F - E}{k^2},$$

wo F und E die vollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung bezeichnen.

Nach diesen Formeln nimmt S_1 die folgende Gestalt an

$$S_1 = \left\{ \frac{1}{1 - k^2} - \frac{a_1 m^2}{k^4} - \left(2 + \frac{a_1 m^2}{k^2}\right) \frac{1}{k^2 (1 - k^2)} \right\} E +$$

$$+ \left\{ \frac{a_1 m^2}{k^4} + \left(2 + \frac{a_1 m^2}{k^2}\right) \frac{1}{k^2} \right\} F = \alpha E + \beta F.$$

Die Koefficienten α und β lassen sich aber sehr beträchtlich vereinfachen.

Man findet in der That

$$\alpha = -\frac{2}{k^2} \left(1 + \frac{a_1 m^2}{k^2}\right) \cdot \frac{2 - k^2}{2 (1 - k^2)},$$

$$\beta = \frac{2}{k^2} \left(1 + \frac{a_1 m^2}{k^2}\right),$$

so dass

$$\tfrac{1}{2} S_1 = \frac{2}{k^2}\left(1 + \frac{a_1 m^2}{k^2}\right)\left(F - \frac{2-k^2}{2(1-k^2)} E\right).$$

Für S erhält man in diesem Fall auch eine noch einfachere Form, nämlich

$$S = \frac{1}{\sqrt{\gamma}\, e^{3/2}} \cdot \frac{1}{k}(F - \alpha_1 E),$$

$$\text{wo } \alpha_1 = \frac{2-k^2}{2(1-k^2)}$$

ist.

Setzt man hier $k = \sin\theta$, so wird

$$\alpha_1 = \frac{1+\cos^2\theta}{2\cos^2\theta} = 1 + \tfrac{1}{2}\, tg^2\,\theta,$$

so dass

$$S = \frac{1}{\sqrt{\gamma}\, e^{3/2}} \cdot \frac{1}{k}(F - E - \tfrac{1}{2} E\, tg^2\,\theta)$$

ist.

Es erübrigt noch die Berechnung von k^2 *bez.* θ.

Es ist

$$k^2 = \frac{a_4 - a_1}{1 + a_4} \cdot \frac{2}{1 - a_1} = \frac{4}{1 + \gamma(1+e)} \cdot \frac{1}{1 + |a_1|}.$$

Führen wir jetzt den folgenden Hülfswinkel ein

$$tg^2\,\psi_1 = \gamma(1+e) = 2\gamma \sin^2\left(45^0 + \frac{\varphi}{2}\right),$$

so bekommen wir

$$k^2 = 4\cos^2 \tfrac{1}{2}\psi \cos^2\psi_1$$

und also

$$\sin\theta = 2\cos {}^1\!/_2\,\psi \cos\psi_1.$$

Für hohe Werthe von θ ist es zweckmässiger, sich von $\cos\theta$ zu bedienen.

Wir haben dann

$$\cos^2\theta = 1 - k^2 = 1 - \frac{a_4 - a_1}{1 + a_4} \cdot \frac{2}{1 - a_1}$$

$$= \frac{(1 + a_1)(1 - a_4)}{(1 - a_1)(1 + a_4)},$$

Setzen wir also

$$a_4 = tg^2\, {}^1/_2\, \psi_2,$$

so wird

$$\cos\theta = \sqrt{\cos\psi\cos\psi_2}.$$

Stellen wir nun die obigen Resultate zusammen, so erhalten wir das folgende System von Formeln und Substitutionen:

$$\gamma_i = a\sin z_i, \text{ wo } z_i = \frac{2\pi i}{n},$$

$$a_1 = \frac{\gamma - 1}{\gamma e}, \quad a_4 = \frac{\gamma + 1}{\gamma e};$$

$$k = \sin\theta = 2\cos\psi_1 \cos\frac{\psi}{2}$$

oder

$$\sqrt{1 - k^2} = \cos\theta = \sqrt{\cos\psi\cos\psi_2} \text{ (für hohe Werthe von } \theta),$$

wenn

$$tg^2\, \tfrac{1}{2}\, \psi = |\, a_1 \,| = \frac{1 - \gamma}{\gamma e};\ tg^2\, \psi_1 = \gamma\,(1 + e);\ tg^2\, \tfrac{1}{2}\, \psi_2 = a_4.$$

Weiter

$$\alpha = tg^2\, \tfrac{1}{2}\, \theta$$

und

$$S = \frac{\pi}{32} \cdot \frac{1}{(\gamma e)^{3/2}} \cdot \frac{\sin(\theta + \psi)\sin(\theta - \psi)}{\cos\psi}\, tg\, {}^1/_2\, \theta\, tg^2\, \theta \,.\, P$$

(für α bis 0.75 oder θ bis $81^0.8$),

$$S = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{(\gamma e)^{3/2}} \cdot \frac{\sin(\theta + \psi)\sin(\theta - \psi)}{\cos\psi\cos^4 \frac{1}{2}\theta}\, P_1(\alpha) \text{ (für } \alpha = 0.75 - 0.83 \text{ oder } \theta = 81^0.8 - 84^0.8),$$

$$S = \frac{1}{ke^{3/2}\sqrt{\gamma}} \cdot \left(F - \frac{2 - k^2}{2\,(1 - k^2)}\, E\right) \text{ (für } \theta > 84^0.8),$$

und endlich

$$\frac{d\Pi}{dt} = -\frac{\mu \cot\varphi}{n\,\pi\sqrt{a}} \sum_1^n S_i.$$

Um den so erhaltenen Ausdruck für $\frac{d\Pi}{dt}$ in Bogensekunden ausgedrückt zu bekommen, und um den Übergang zu der gewöhnlichen Zeiteinheit zu vermitteln, muss man schliesslich mit einer Konstante multipliciren.

In der That, wenn N die mittlere Bewegung des störenden Planeten in einem mittleren Sonnentag bezeichnet, so wird diese Konstante, wie man unmittelbar einsieht

$$C = 365.25\, N$$

wenn das Julianische Jahr als Zeiteinheit für die Perihelbewegung genommen wird. Weiter hat man zu bemerken dass die Masseneinheit hier etwas anders wie gewöhnlich gewählt ist. Wenn wir mit m die Masse des störenden Planeten bezeichnen, wenn die Sonnenmasse die Einheit ist, so ist nach unserer Annahme über die Massen:

$$\frac{\mu}{m} + \mu = 1,$$

und also

$$\mu = \frac{m}{1 + m}.$$

Als ein Beispiel der Anwendung der oben auseinandergesetzten Methode habe ich die von Jupiter bewirkten Perihelstörungen für $a = 0.6$ und für verschiedene Werthe der Excentricität berechnet. Ich habe dabei den Kreis in 16 Theile getheilt.

Die Grösse (0.5)[1] ist bekanntlich derjenige Werth für die Perihelbewegung, den man erhält, wenn man sich auf den zweiten Grad der Excentricitäten beschränkt.

In der folgenden kleinen Tafel habe ich darum nebst $\frac{d\Pi}{dt}$

---

[1] Siehe NORÉN u. RAAB ‹Hülfstafeln› Tafel IV. Es ist dabei zu bemerken dass das dortige Argument α gerade dasselbe wie unser a ist.

auch $\frac{d\Pi}{dt} - (0.5)$ tabulirt um den Einfluss der höheren Potenzen der Excentricität für hohe Werthe von e zu zeigen.

e	$\frac{d\Pi}{dt}$	$\frac{d\Pi}{dt} - (0.5)$
0.1	85".66	1".14
0.2	88.82	4.30
0.3	92.41	7.89
0.4	108.18	23.66
0.5	132.92	48.40
0.55	148.52	64.00
0.6	219.73	135.21

$(0.5) = 84''.52$

Der Grund, weshalb ich vorläufig nur dieses Beispiel gerechnet habe ist, dass ich zuerst untersuchen will, ob nicht etwa eine durch eine andere Behandlung des Problems erhaltene Methode, wenigstens wenn es sich um gleichzeitige Berechnung mehrerer Werthe handelt, sich für die numerische Rechnung bequemer stellen wird. Unter allen Umständen können die obigen Entwicklungen als ein Beispiel dafür dienen, wie man ein Doppelintegral durch ein kombinirt analytisches und mechanisches Verfahren berechnen kann.



